正規作用素の2次形式のBishop-Phelps-Bollobás性について

上野未由希

1　序

我々の思考の起点はBanach空間の幾何における次の定理である．以下, Xを実Banach空間とする．Xの双対空間をX^*で表す．Xの閉単位球をB_Xで表し, Xの単位球面をS_Xで表す: $B_X = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$, $S_X = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$.

定理 1.1. (Bishop-Phelps, [4], 1961年) ノルムを達成するX上の有界線形汎関数の全体はX^*で稠密である．

ここで$f \in X^*$がノルムを達成するとは, $|f(x^*)| = \|f\|$かつ$\|x^*\| = 1$を満たすベクトル$x^* \in X$が存在することである．この定理は1970年にB. Bollobásにより次のように拡張された:

定理 1.2. (Bishop-Phelps-Bollobás, [5]) $\varepsilon > 0$とする．ベクトル$x \in B_X$と$x^* \in S_{X^*}$が$x^*(x) > 1 - \varepsilon^2/4$を満たすならば$y^*(y) = 1$, $\|y - x\| < \varepsilon$かつ$\|y^* - x^*\| < \varepsilon$を満たすベクトル$y \in S_X$と$y^* \in S_{X^*}$が存在する．

定理1.2は次の2つの点で定理1.1の拡張になっていることに注意する: (1) 定理の主張の定量化を行っている．(2) ノルムを殆ど達成するベクトル (定理1.2のx) の近似を与えている．

Bishop-Phelps-Bollobásの定理は多岐に渡り拡張された．その方向性は作用素に対する同種の性質の研究と, 2次形式についての同種の性質の研究に大別される．以下, Bishop-Phelps-Bollobás性をBPB性と略記する．前者については, 手短には[1], [2]およびそれらの参考文献を参照されたい．後者について説明する．否定的な結果として, Y. S. ChoiとH. G. Song [6] は$l_1 \times l_1$上の2次形式に対しBPB性が成り立たないことを示した．肯定的な側としては, M. D. Acosta, J. Becerra-Guerrero, D. GarcíaとM. Maestre [3] はX_j, $j = 1, 2, \cdots, n$, が一様凸Banach空間のとき, 任意のBanach空間Yに対し, $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$上の$Y$-値連続$n$-線形写像に対してBPB性が成り立つことを示した．D. García, M. MaestreとH. J. Lee [7] はHilbert空間上の連続Hermite形式およびHilbert空間上のSchatten族の2次形式に対してBPB性が成り立つことを示した．その内, 前者は特に我々の研究の動機付けを与えているので, ここで詳細に説明する．

定義 1.3. (連続Hermite形式のBPB性) $\mathcal{H}$をHilbert空間とする．$\mathcal{H}$の単位球面を$S_{\mathcal{H}}$で表し, $\mathcal{H}$上の連続2次形式でノルムが1であるものの全体を$S_{L^2(\mathcal{H}\times\mathcal{H})}$で表す．$\mathcal{H}$が連続Hermite形式に対してBPB性を持つとは, 以下の条件 (1), (2) を満たす関数$\beta : (0,\infty) \to (0,\infty)$と$\eta : (0,\infty) \to (0,\infty)$が存在することをいう:
(1) $\lim_{\varepsilon\to 0+} \beta(\varepsilon) = 0$.
(2) 任意の$\varepsilon > 0$とすべてのHermite形式$B \in S_{L^2(\mathcal{H}\times\mathcal{H})}$に対して, $(x_0, y_0) \in S_{\mathcal{H}} \times S_{\mathcal{H}}$が

$|B(x_0, y_0)| > 1 - \eta(\varepsilon)$ を満たすならば, 以下を満たす $(u_0, v_0) \in S_{\mathcal{H}} \times S_{\mathcal{H}}$ と Hermite 形式 $D \in S_{L^2(\mathcal{H}\times\mathcal{H})}$ が存在する:

$$|D(u_0, v_0)| = 1, \ \ \|u_0 - x_0\| < \beta(\varepsilon), \ \ \|v_0 - y_0\| < \beta(\varepsilon), \ \ \|D - B\| < \varepsilon.$$

$\mathcal{H}$ の内積を $\langle\cdot,\cdot\rangle$ で表す. 次の定理は連続 Hermite 形式の BPB 性が成り立つことを主張する:

定理 1.4. (D. García, M. Maestre, H. J. Lee, [7]) $\eta(\varepsilon) = \varepsilon^2/4$, $\beta(\varepsilon) = 4\sqrt{\varepsilon}$ $(0 < \varepsilon < 1)$ とする. T をノルムが1である $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とする. 組 $(x_0, y_0) \in S_{\mathcal{H}} \times S_{\mathcal{H}}$ が $\langle Tx_0, y_0\rangle \geq 1 - \eta(\varepsilon)$ を満たすならば常に, 以下を満たす $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素 R と $(x_1, y_1) \in S_{\mathcal{H}} \times S_{\mathcal{H}}$ が存在する:

$$\begin{aligned}&\|R\| = \langle Rx_1, y_1\rangle = 1,\\ &\|R - T\| < \varepsilon,\\ &\|x_0 - x_1\| < \beta(\varepsilon),\\ &\|y_0 - y_1\| < \beta(\varepsilon).\end{aligned}$$

修士課程における研究で定理 1.4 と同種の結果が正規作用素の 2 次形式に対して成り立つことが判ったので報告する. 我々の主結果は次章の定理 2.1 である. 正規作用素のスペクトル分解定理が自己共役作用素のそれを用いて証明されることを鑑みると, 定理 2.1 は定理 1.4 に対して安定感を与えるものになっている. 我々の主結果の証明は概ね上述の定理 1.4 の証明の論法に従うが, 問題設定の違いによる微妙な変更が必要となる.

2 主結果とその証明

$\mathcal{H}$ を複素 Hilbert 空間とし, $\mathcal{H}$ の内積を $\langle\cdot,\cdot\rangle$, ノルムを $\|\cdot\|$ で表す. $\mathcal{H}$ の単位球面を $S_{\mathcal{H}}$ で表す: $S_{\mathcal{H}} = \{x \in \mathcal{H} \mid \|x\| = 1\}$. $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対し, $\mathrm{sgn} z = z/|z|$ と定める. 正規作用素の定義を呼び起こす: $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素 N が正規作用素であるとは, $NN^* = N^*N$ が成り立つことである. ここで N^* は N の共役作用素を表す.

定理 2.1. $\eta(\varepsilon) = \varepsilon^2/4$, $\beta(\varepsilon) = 4\sqrt{\varepsilon}$ $(0 < \varepsilon < 1)$ とする. N をノルムが 1 の正規作用素とする. 組 $(x_0, y_0) \in S_{\mathcal{H}} \times S_{\mathcal{H}}$ が $\langle Nx_0, y_0\rangle \geq 1 - \eta(\varepsilon)$ を満たすならば常に, 以下を満たす正規作用素 R と $(x_1, y_1) \in S_{\mathcal{H}} \times S_{\mathcal{H}}$ が存在する:

$$\begin{aligned}&\|R\| = \langle Rx_1, y_1\rangle = 1,\\ &\|R - N\| < \varepsilon,\\ &\|x_0 - x_1\| < \beta(\varepsilon),\\ &\|y_0 - y_1\| < \beta(\varepsilon).\end{aligned}$$

証明. 正規作用素 N のスペクトル分解を $\{E(\Delta)\}_{\Delta\in\mathcal{B}}$ と表す ([8, 111 節] または [9, 定理 12.23] を参照). ただし $\mathcal{B}$ は $\mathbb{R}^2$ の Borel 集合族を表す. $u, v \in \mathcal{H}$ に対し, 複素数値測度 $\Delta \mapsto \langle E(\Delta)u, v\rangle$ を $E_{(u,v)}$ で表す. $\|N\| = 1$ だから $\sigma(N) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ が成り立つことに注意する. $A = \{z \in \sigma(N) \mid |z| > 1 - \varepsilon\}$, $B = \{z \in \sigma(N) \mid |z| \leq 1 - \varepsilon\}$ とおき, 作用素 R を

$$R = \iint_{\sigma(N)} g(z)E(dxdy),$$

$$g(z) = \begin{cases} z & (z \in B), \\ \mathrm{sgn} z & (z \in A) \end{cases}$$

で定める. ただし, 本論文を通じて x, y はそれぞれ複素変数 z の実部, 虚部を表す. R は正規作用素である.

$\langle Nx_0, y_0 \rangle \geq 1 - \eta(\varepsilon)$, $\langle y_0, y_0 \rangle = 1$ より

$$\begin{aligned} \|Nx_0 - y_0\|^2 &= \|Nx_0\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle Nx_0, y_0 \rangle + \|y_0\|^2 \\ &\leq 1 - 2(1 - \eta(\varepsilon)) + 1 \\ &= 2\eta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2}. \end{aligned}$$

よって,

$$\|Nx_0 - y_0\| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}. \tag{2.1}$$

また,

$$\begin{aligned} 1 - \eta(\varepsilon) &\leq \langle Nx_0, y_0 \rangle \\ &= \iint_{\sigma(N)} zE_{(x_0, y_0)}(dxdy) \\ &= \iint_A zE_{(x_0, y_0)}(dxdy) + \iint_B zE_{(x_0, y_0)}(dxdy) \\ &\leq \|E(A)x_0\|\|E(A)y_0\| + (1 - \varepsilon)\|E(B)x_0\|\|E(B)y_0\| \\ &\leq \sqrt{\|E(A)x_0\|^2 + (1-\varepsilon)^2\|E(B)x_0\|^2}\sqrt{\|E(A)y_0\|^2 + \|E(B)y_0\|^2} \\ &= \sqrt{\|E(A)x_0\|^2 + (1-\varepsilon)^2\|E(B)x_0\|^2}\|y_0\| \\ &= \sqrt{\|E(A)x_0\|^2 + (1-\varepsilon)^2\|E(B)x_0\|^2} \\ &= \sqrt{\|E(A)x_0\|^2 + (1-\varepsilon)^2(1 - \|E(A)x_0\|^2)}. \end{aligned}$$

これを $\|E(A)x_0\|^2$ について解くと,

$$\|E(A)x_0\|^2 \geq 1 - \frac{2\eta(\varepsilon) - \eta(\varepsilon)^2}{2\varepsilon - \varepsilon^2}.$$

ここで, $2\eta(\varepsilon) < \varepsilon^2 = \varepsilon(2\varepsilon - \varepsilon) \leq \varepsilon(2\varepsilon - \varepsilon^2)$ から

$$\|E(A)x_0\|^2 \geq 1 - \frac{2\eta(\varepsilon) - \eta(\varepsilon)^2}{2\varepsilon - \varepsilon^2} > 1 - \frac{2\eta(\varepsilon)}{2\varepsilon - \varepsilon^2} > 1 - \varepsilon.$$

よって,

$$\|E(B)x_0\|^2 = 1 - \|E(A)x_0\|^2 < 1 - (1 - \varepsilon) = \varepsilon.$$

さらに, $x_1 = \dfrac{E(A)x_0}{\|E(A)x_0\|}$ とおくと

$$\begin{aligned}
\|x_1 - x_0\|^2 &= \left\| \frac{E(A)x_0}{\|E(A)x_0\|} - x_0 \right\|^2 \\
&= \left\| \frac{E(A)x_0}{\|E(A)x_0\|} \right\|^2 - 2\mathrm{Re} \left\langle \frac{E(A)x_0}{\|E(A)x_0\|}, x_0 \right\rangle + \|x_0\|^2 \\
&= \left\| \frac{E(A)x_0}{\|E(A)x_0\|} \right\|^2 - 2\mathrm{Re} \left\langle \frac{E(A)x_0}{\|E(A)x_0\|}, E(A)x_0 \right\rangle + \|E(A)x_0\|^2 + \|E(B)x_0\|^2 \\
&= \left\| \frac{E(A)x_0}{\|E(A)x_0\|} - E(A)x_0 \right\|^2 + \|E(B)x_0\|^2 \\
&= \left\| \frac{E(A)x_0}{\|E(A)x_0\|}(1 - \|E(A)x_0\|) \right\|^2 + \|E(B)x_0\|^2 \\
&= (1 - \|E(A)x_0\|)^2 + \|E(B)x_0\|^2 \\
&< (1 - \|E(A)x_0\|^2) + \|E(B)x_0\|^2 \\
&< 1 - (1 - \varepsilon) + \varepsilon = 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

よって,

$$\|x_1 - x_0\| < \sqrt{2\varepsilon} < \beta(\varepsilon). \tag{2.2}$$

一方, $x_0' = \left\{ \iint_A \mathrm{sgn} z E(dxdy) \right\} x_0$ とおくと

$$\begin{aligned}
\|x_0'\|^2 &= \left\| \left\{ \iint_A \mathrm{sgn} z E(dxdy) \right\} x_0 \right\|^2 \\
&= \left\langle \left\{ \iint_A \mathrm{sgn} z E(dxdy) \right\} x_0, \left\{ \iint_A \mathrm{sgn} z E(dxdy) \right\} x_0 \right\rangle \\
&= \left\langle \left\{ \iint_A \overline{\mathrm{sgn} z} E(dxdy) \right\} \left\{ \iint_A \mathrm{sgn} z E(dxdy) \right\} x_0, x_0 \right\rangle \\
&= \langle E(A)x_0, x_0 \rangle \\
&= \|E(A)x_0\|^2 > 0.
\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}
|\langle Rx, y \rangle| &\leq \|g\|_\infty \|E(\sigma(N))x\| \|E(\sigma(N))y\| \\
&\leq \|x\| \|y\|.
\end{aligned}$$

よって, $\|R\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle Rx, y \rangle| \leq 1$ であり,

$$\begin{aligned}
\langle RE(A)x_0, x_0' \rangle &= \left\langle \left\{ \iint_A \mathrm{sgn} z E(dxdy) + \iint_B z E(dxdy) \right\} E(A)x_0, \left\{ \iint_A \mathrm{sgn} z E(dxdy) \right\} x_0 \right\rangle \\
&= \left\| \left\{ \iint_A \mathrm{sgn} z E(dxdy) \right\} x_0 \right\|^2 \\
&= \|x_0'\|^2.
\end{aligned}$$

$y_1 = \dfrac{\{\iint_A \mathrm{sgn} z E(dxdy)\} x_0}{\|\{\iint_A \mathrm{sgn} z E(dxdy)\} x_0\|}$ とおくと, $y_1 = \dfrac{x_0'}{\|x_0'\|}$ であるから

$$\begin{aligned}\langle Rx_1, y_1\rangle &= \frac{1}{\|E(A)x_0\|}\cdot\frac{1}{\|x_0'\|}\langle RE(A)x_0, x_0'\rangle \\ &= \frac{1}{\|x_0'\|^2}\|x_0'\|^2 = 1 = \langle y_1, y_1\rangle.\end{aligned}$$

よって $\|R\| = 1$ である. ベクトル y_1 の張る $\mathcal{H}$ の部分空間を $\langle y_1\rangle$ で表す. $\mathcal{H}$ の直和分解 $\mathcal{H} = \langle y_1\rangle \oplus \langle y_1\rangle^\perp$ に沿って Rx_1 を分解すると $Rx_1 = \langle Rx_1, y_1\rangle y_1 + (Rx_1 - \langle Rx_1, y_1\rangle y_1)$ となるから

$$\begin{aligned}1 \geq \|Rx_1\|^2 &= \|\langle Rx_1, y_1\rangle y_1\|^2 + \|Rx_1 - \langle Rx_1, y_1\rangle y_1\|^2 \\ &= 1 + \|Rx_1 - \langle Rx_1, y_1\rangle y_1\|^2.\end{aligned}$$

よって, $\|Rx_1 - \langle Rx_1, y_1\rangle y_1\|^2 \leq 0$. すなわち

$$Rx_1 = \langle Rx_1, y_1\rangle y_1 = y_1.$$

また,

$$\begin{aligned}R - N &= \iint_{\sigma(N)} g(z)E(dxdy) - \iint_{\sigma(N)} zE(dxdy) \\ &= \left\{\iint_A \mathrm{sgn} z E(dxdy) + \iint_B zE(dxdy)\right\} - \left\{\iint_A zE(dxdy) + \iint_B zE(dxdy)\right\} \\ &= \iint_A (\mathrm{sgn} z - z)E(dxdy).\end{aligned}$$

$z \in A$ に対し

$$|\mathrm{sgn} z - z| = \left|\frac{z}{|z|} - z\right| = \left|\frac{z}{|z|}(1 - |z|)\right| = |1 - |z|| < 1 - (1 - \varepsilon) = \varepsilon$$

だから, 全ての x, $y \in \mathcal{H}$ に対し

$$|\langle (R - N)x, y\rangle| \leq \varepsilon \|E(A)x\|\|E(A)y\| \leq \varepsilon\|x\|\|y\|.$$

よって,

$$\|R - N\| \leq \varepsilon. \tag{2.3}$$

(2.1), (2.2), (2.3) より

$$\begin{aligned}\|y_1 - y_0\| &= \|Rx_1 - y_0\| \\ &\leq \|Rx_1 - Nx_1\| + \|Nx_1 - Nx_0\| + \|Nx_0 - y_0\| \\ &\leq \varepsilon + \|x_1 - x_0\| + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \\ &< \varepsilon + \sqrt{2}\sqrt{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \\ &< 4\sqrt{\varepsilon} = \beta(\varepsilon).\end{aligned}$$ □

参考文献

[1] M. D. Acosta, R. M. Aron, D. García and M. Maestre, The Bishop-Phelps-Bollobás theorem for operators, J. Funct. Anal. **254** (2008), 2780-2799.

[2] M. D. Acosta, J. Becerra-Guerrero, D. García, S. K. Kim and M. Maestre, The Bishop-Phelps-Bollobás property: a finite-dimensional approach, Publ. RIMS Kyoto Univ. **51** (2015), 173-190.

[3] M. D. Acosta, J. Becerra-Guerrero, D. García and M. Maestre, The Bishop-Phelps-Bollobás theorem for bilinear forms, Trans. Amer. Math. Soc. **365** (2013), no.11, 5911-5932.

[4] E. Bishop and R. R. Phelps, A proof that every Banach space is subreflexive, Bull. Amer. Math. Soc. **67** (1961), 97-98.

[5] B. Bollobás, An extension to the theorem of Bishop and Phelps, Bull. London. Math. Soc. **2** (1970), 181-182.

[6] Y. S. Choi and H. G. Song, The Bishop-Phelps-Bollobás theorem fails for bilinear forms on $l_1 \times l_1$, J. Math. Anal. Appl. **360** (2009), 752-753.

[7] D. García, M. Maestre and H. J. Lee, The Bishop-Phelps-Bollobás property for Hermitian forms on Hilbert spaces, Quart. J. Math. **65** (2014), 201-209.

[8] F. Riesz and Sz.-Nagy, Functional analysis, Dover, 1990.

[9] W. Rudin, Functional analysis, McGraw-Hill, 1991.