

◆ 研 究 ノ 一 ト

位相幾何的グラフ理論を使った論理的思考の 学習と高校数学との関連

相馬 輝彦*

はじめに

筆者は、高校生を対象として、高等学校の数学課程では扱われない位相幾何学（トポロジー）の初歩的な内容を紹介する講演をした．具体的には以下の講演・模擬授業である．

- 平面グラフとオイラーの公式，オープンクラス「高校生のための数学-夏の学校」，首都大学東京（南大沢キャンパス），2008年8月
- 平面グラフとオイラーの公式，高大連携授業，都立町田高等学校，2008年11月
- オイラーの多面体公式と正多面体，大学説明会・オープンラボ，首都大学東京（南大沢キャンパス），2011年8月
- トポロジー（軟らかい幾何学）入門，模擬授業，都立南平高等学校，2016年7月

題材として取り上げたのは，グラフという点と線からなる比較的簡単な図形である．これらの講義は，受講した高校生には好評であり，位相幾何学的な考え方を高等学校数学課程に導入することは数学的な論理思考を学ぶ上で効果的であるとの確信を持てた．グラフ理論は，比較的扱いやすい題材であるので今までも中学生・高校生を対象とする講座等によく使われてきたのは事実である．しかし，これらの講座の一部はグラフ理論のテクニカルな箇所の紹介になり，限定された数学マニアの学生向けのものになっている．しかし，高校の数学課程に位相幾何的グラフ理論の考え方を導入する上で重要なのは一部の学生を対象とするものではなく，一般的な学生にも修得してほしい内容を提供することである．そのような観点から，本紀要では次のような点に留意した．

- 数学的帰納法，背理法等の高等学校の数学課程で扱われている内容が，実際どのように利用できるか明確に説明する．
- 数学的論証が，「定義」→「定理」→「証明」の繰り返しで構成されていることを，実例を使って解説する．

数学的な内容に関しては，前原 [1]，鈴木・花木 [2] を参考にした．ただし，より一般の高校生対象とするため，話題を限定し詳細に説明した．

*首都大学東京 大学院理工学研究科 数理情報科学専攻

1 グラフ

最初に、グラフに関連した一連の基本的な概念を紹介する⁽¹⁾。

定義 1.1 (グラフ). 点 (頂点) とそれをつなぐ線分 (辺) からなる図形をグラフという. また, 2つの頂点をつなぐ辺が2つ以上あるとき, 多重辺という (図 1.1 参照)。

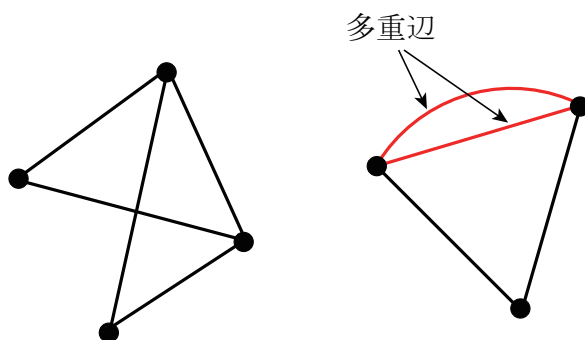


図 1.1 (左) 多重点を持たないグラフ (右) 多重点を持つグラフ

【仮定】 本紀要で扱うグラフは多重点を持たないとする。

グラフの研究において重要なのは, グラフの頂点のラベル付けと, どの頂点とどの頂点が辺で結ばれるか, または結ばれていないかのみである. 頂点をつなぐ辺は直線である必要はなく, 曲線でも折れ線でもかまない. したがって, ネットワークとして同じ場合は同一のグラフと考える. すなわち, グラフを位相幾何的 (トポロジ的) 図形として扱う. 例えば, 図 1.2 の3つのグラフは全く同じものとみなし, 同値なグラフという⁽²⁾。

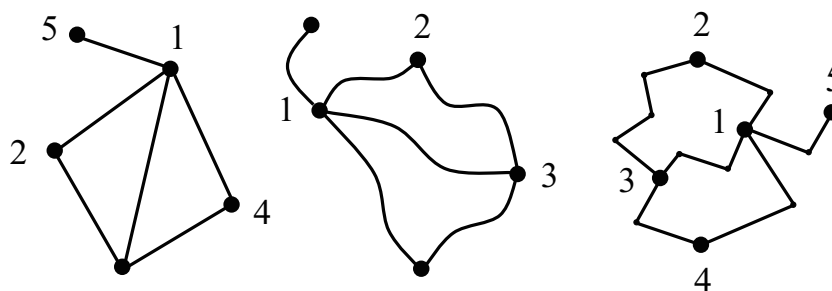


図 1.2

定義 1.2 (連結グラフ). グラフ G の任意の2頂点を端点とする辺の列 (これを道という) が必ず存在するとき, そのグラフを連結なグラフという. 例えば, 図 1.3 左側のグラフは連結である. 一方, 右側のグラフでは, 頂点 v_0 と v_1 を端点とする道は存在しないので, このグラフは非連結である.

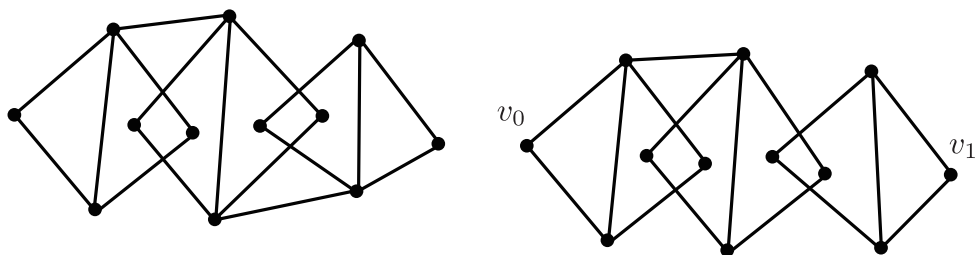


図 1.3 (左) 連結グラフ (右) 非連結グラフ

以下簡単のため、扱うグラフに関し次の仮定をおく.

【仮定】 グラフは全て連結であるとする.

グラフの研究をするときは、グラフの連結成分ごとに調べればよい場合が多いので、この仮定は許容されるものである.

例 1.3 (n 頂点完全グラフ K_n). n 個の頂点からなり、どの頂点のペアも必ず辺で結ばれるようなグラフを n 頂点完全グラフといい、これを K_n と表す (図 1.4 参照).

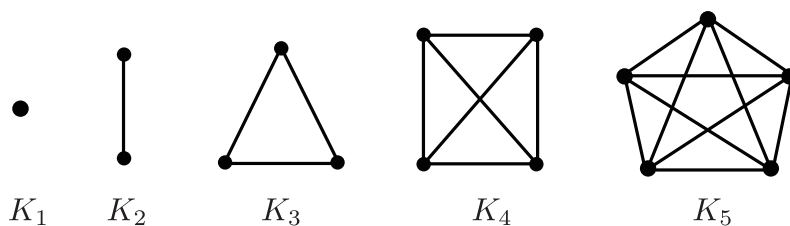


図 1.4 完全グラフ

例 1.4 (2 部グラフ). (i) 頂点が 2 つのグループに分かれ、同じグループの頂点どうしをつなぐ辺がないグラフを **2 部グラフ**という.

(ii) 頂点が、 m 個と n 個からなる 2 つのグループに分かれ、異なるグループに属する頂点のペアは必ず辺で結ばれているような 2 部グラフを、 (m, n) 型の完全 2 部グラフといい、これを $K_{m,n}$ と表す.

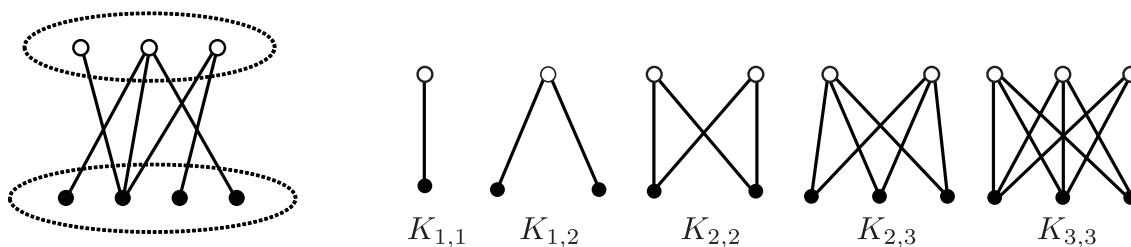


図 1.5 2 部グラフ

(1) 数学的論証の立ち上げが「定義」から始まることを理解させる.

(2) 数学において本質的に重要な同値・同型の概念の具体例を与える.

例 1.5 (平面グラフ). 平面上に描かれたグラフで、辺どうしや辺と頂点が交叉していないものを平面グラフという. それ自身が平面グラフでなくても平面グラフと同値なグラフを, 平面的グラフという. 図 1.6 (左) から分かるように, 4 頂点完全グラフ K_4 は平面グラフではないが, 図 1.6 (右) のように, K_4 と同値な平面グラフがあるので, K_4 は平面的である.

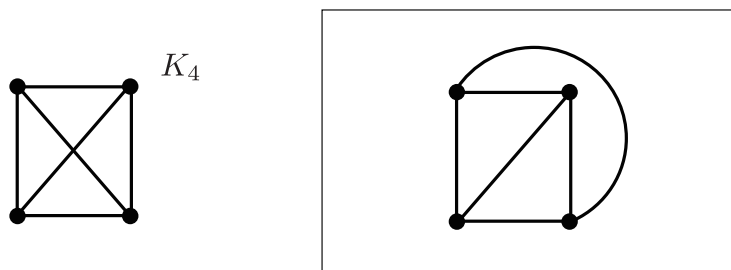


図 1.6 (左) 平面的グラフ (右) 平面グラフ

図 1.7 から分かるように, K_5 から 1 つの辺 e を除いたグラフ $K_5 - e$ や, $K_{3,3}$ から 1 つの辺 e を除いたグラフ $K_{3,3} - e$ も平面的である.

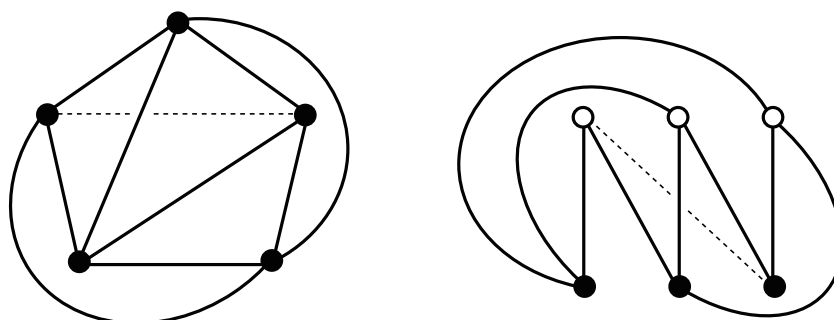


図 1.7 (左) $K_5 - e$ と同値な平面グラフ (右) $K_{3,3} - e$ と同値な平面グラフ
※ 破線部分は, 除かれた辺 e に対応する箇所を表している.

2 オイラーの公式

第 1 節で, $K_5 - e$, $K_{3,3} - e$ は平面的であることを示した. 今度は, 次の問題を考えることにする.

問題 2.1. K_5 , $K_{3,3}$ は平面的であるか. 平面的であれば, それと同値な平面グラフを描け. もし平面的でないならば, それを証明しなさい.

グラフ G と同値な平面グラフを描くことができれば, 平面的であると結論付けられるが, 何回試しても平面グラフにならないといって, それだけで G は平面的でないとは結論付けることはできない. やはりできないことを数学的に証明する必要がある. 「不可能性」をどうやって (数学的に) 証明したらよいか? このような

場合，背理法が有効な場合が多い⁽³⁾．背理法は，何らかの公式（不変量）とペアで使われることがある．ここでは，オイラーの公式を使う．

定義 2.1 (頂点数，辺数，面数). G を平面グラフとする． G に沿って平面を切り開いてできる各ピース（連結成分）を面という． G の頂点数を $v(G)$ ，辺数を $e(G)$ ，面数を $f(G)$ で表す．また， $\chi(G)$ を次の式で定義する．

$$\chi(G) = v(G) - e(G) + f(G) \quad (2.1)$$

図 2.1 の平面グラフでは， $\chi(G_1) = 3$ ， $\chi(G_2) = 2$ である．

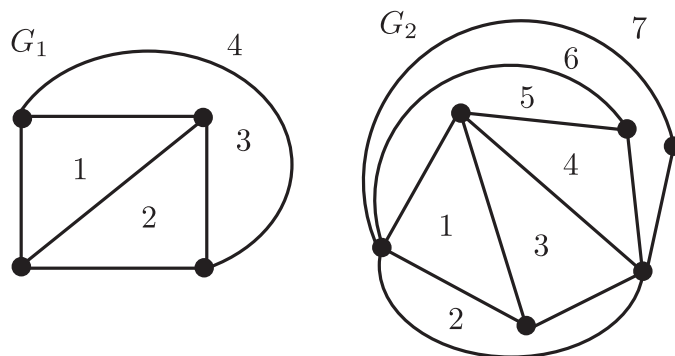


図 2.1 $\chi(G_1) = 4 - 5 + 3 = 2$ ， $\chi(G_2) = 6 - 11 + 7 = 2$ ※ 図の中の数は，面の個数を数えたものである．

これらの例から，どのような連結平面グラフ G に対しても， $\chi(G) = 2$ と推察される．簡単なグラフなので，偶然成り立ったともだけだと考えられるので，図 2.2 のような，より複雑な平面グラフを考えてみる⁽⁴⁾．

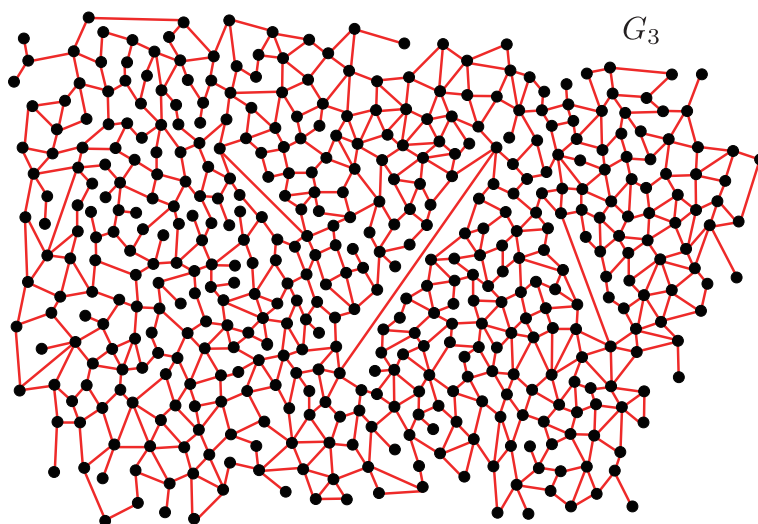


図 2.2 $\chi(G_3) = 466 - 819 + 355 = 2$

⁽³⁾背理法をつかった不可能性の証明の具体例を与えることによって，学生に「背理法」の重要性を認識させる．

⁽⁴⁾具体的な例を多く与えることによって，学生に $\chi(G) = 2$ が成り立つことを推測させる．

これらの例より，任意の連結な平面グラフについて $\chi(G) = 2$ であることが推察できるが，これでは不十分である．数学では証明があって初めて真理として認められる⁽⁵⁾．ここでは，数学的帰納法「数学B」(ドミノ倒し法)を使って，この公式を証明する⁽⁶⁾．

定理 2.2 (オイラーの公式). G を任意の連結な平面グラフとする．このとき，次の等式が成り立つ．

$$\chi(G) = 2 \quad (2.2)$$

これを，平面グラフに関するオイラーの公式という．

証明. G の辺数に関する数学的帰納法を使う．

第1段階 G を辺数0の平面グラフとする． G が2以上の頂点を持つとすると，それらをつなぐ辺が存在しないので， G は非連結になる．これは， G は連結であるという仮定に反する．したがって， G はただ1つの頂点からなる．このとき， $v(G) = 1, e(G) = 0, f(G) = 1$ である．よって， $\chi(G) = 1 - 0 + 1 = 2$ となり，(2.2) が成り立つ．したがって，帰納法の第1段階は真である．

第2段階 (帰納法の仮定) G の辺数が n 以下のとき， $\chi(G) = 2$ が成り立つと仮定する．

第3段階 ($n+1$ の場合) G の辺数は， $n+1$ であるとする．このとき， G は辺数 n の連結な平面グラフ G' より，操作Iまたは操作IIにより得られる．

操作I. G' の頂点と G' 上にはない点を新しい辺 e でつなげることによって G が得られる．このとき，頂点数と辺数は1つずつ増えるが，1つの面が2つ以上に分

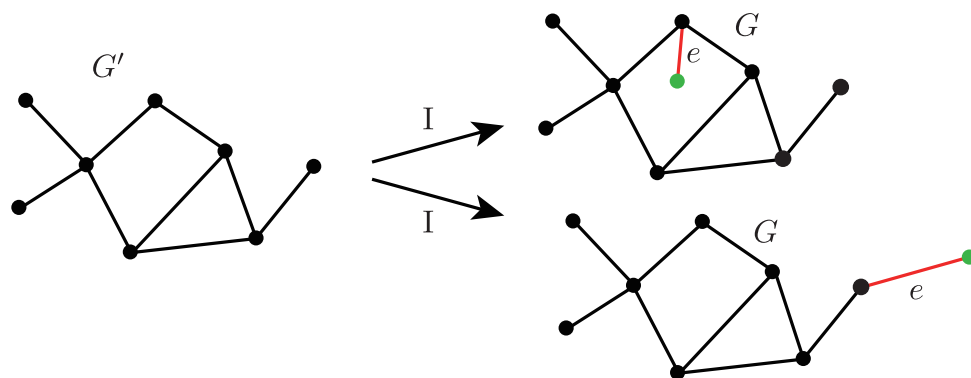


図 2.3

離することはない．したがって， $v(G) = v(G') + 1, e(G) = e(G') + 1$ であるが，依然として $f(G) = f(G')$ である (図 2.3 参照)．よって， $\chi(G)$ の定義 (2.1) より， $\chi(G) = \chi(G')$ が成り立つ．帰納法の仮定より， $\chi(G') = 2$ であるから， $\chi(G) = 2$ も成り立つ．

⁽⁵⁾ 数学における，「予想」と「証明」の関連を実感させることができる．

⁽⁶⁾ このようなグラフに関連した等式の証明にも帰納法を使うことにより，この論法的重要性を理解してもらうことができる．

操作 II. G' の 2 頂点を G' の 1 つの面の上にある新しい辺で結ぶことによって G が得られる. このとき, 頂点数は変わらず, 辺数は 1 つ増える. また, 1 つの面が 2 つに分離するので, 辺数も 1 つ増える (図 2.4 参照). したがって, $v(G) = v(G')$, $e(G) = e(G') + 1$, $f(G) = f(G') + 1$ である. この場合も $\chi(G)$ の定義 (2.1) より, $\chi(G) = \chi(G')$ が成り立つ. よって帰納法の仮定により, $\chi(G) = \chi(G') = 2$ であるから, (2.2) が成り立つ.

以上により, 数学的帰納法が完成した. よって, すべての平面グラフ G に関し, (2.2) が成り立つ. 【証明終】

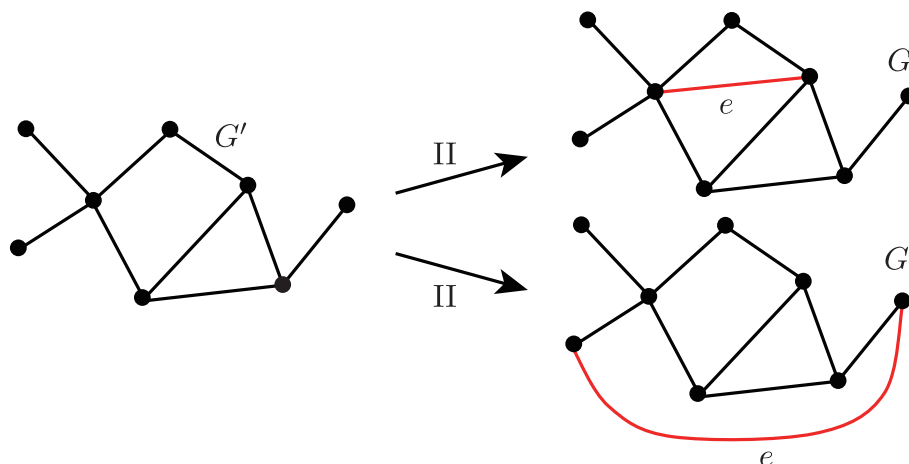


図 2.4 右上のグラフでは内側の面が 2 つに分離されている. 一方, 右下のグラフでは外側の面が 2 つに分離されている.

オイラーの公式を使うと, 平面グラフに関する不等式が得られる.

定理 2.3. 頂点が 3 個以上の平面グラフ G に関し, 次の不等式が成り立つ.

$$e(G) \leq 3v(G) - 6. \quad (2.3)$$

証明. G の各辺の両側に小石をおく (図 2.5 左参照). このとき, 「小石の総数」 $= 2e(G)$ が成り立つ. 一方, 各面には 3 個以上の小石がおかれることに注意せよ.

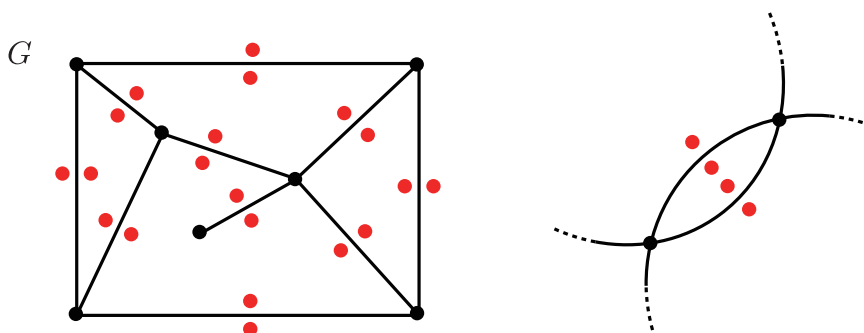


図 2.5

2 個しか小石がおかれていない面があるとする, それらの小石に隣接する 2 辺は

グラフの多重辺となる (図 2.5 右参照). これは, G が多重辺を持たないことに矛盾する. したがって, 「小石の総数」 $\geq 3f(G)$ が成り立つ. よって, $3f(G) \leq 2e(G)$ となる. オイラーの公式 (2.2) より

$$6 = 3v(G) - 3e(G) + 3f(G) \leq 3v(G) - 3e(G) + 2e(G) = 3v(G) - e(G)$$

が成り立つ. これから, 容易に (2.3) が得られる.

【証明終】

この不要式を使って, 問題 2.1 の前半に解答する.

解答 2.4. K_5 は平面的でない.

証明. 背理法「数学 I」を使って証明する⁽⁷⁾. 「 K_5 は平面的である」と仮定する. $v(K_5) = 5$, $e(K_5) = 10$ であるから, 不等式 2.3 より, $10 \leq 3 \cdot 5 - 6 = 9$ が成り立つ. これは矛盾である. よって, K_5 は平面的でない. 【証明終】

$K_{3,3}$ の場合, $v(K_{3,3}) = 6$, $e(K_{3,3}) = 9$ である. これを, 定理 2.3 の不等式 (2.3) に代入すると, $9 \leq 3 \cdot 6 - 6 = 12$ である. したがって, 矛盾はおこらない. しかしこれは, $K_{3,3}$ が平面的であることを意味しているわけではありません. なぜならば, 「逆は, 必ずしも真ではない」【数学 I】からです⁽⁸⁾. そこで, 2 部グラフにのみ適用できる不等式を導入する.

定理 2.5. 頂点が 3 個以上の平面 2 部グラフ G に関し, 次の不等式が成り立つ.

$$e(G) \leq 2v(G) - 4. \quad (2.4)$$

証明. G の各辺の両側に小石をおく. 定理 2 の場合と違い, 2 部グラフの場合, 各面には 3 以上の偶数個の小石がおかれる. したがって特に, 各面には 4 個以上の小石がおかれる (図 2.6 参照). したがって, 「小石の総数」 $= 2e(G) \geq 4f(G)$ が成

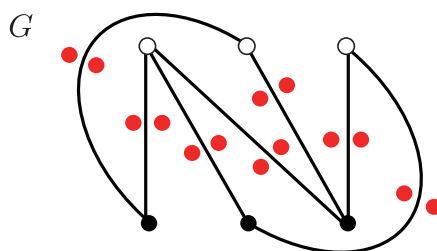


図 2.6

り立つ. よって, $2f(G) \leq e(G)$ となる. オイラーの公式 (2.2) より

$$4 = 2v(G) - 2e(G) + 2f(G) \leq 2v(G) - 2e(G) + e(G) = 2v(G) - e(G)$$

が成り立つ.

【証明終】

⁽⁷⁾ 数学 I で学ぶ背理法が, 強力な手法であることを学生に実感させる.

⁽⁸⁾ 矛盾が生じないことが, 必ずしも真であることの証明にはならないことを強調し, 学生に理解させる.

定理 2.5 の不等式を使って，問題 2.1 の後半に解答する．

解答 2.6. $K_{3,3}$ は平面的でない．

証明. 再度背理法を使って証明する．「 $K_{3,3}$ は平面的である」と仮定する． $v(K_{3,3}) = 6$, $e(K_{3,3}) = 9$ であるから，不等式 (2.4) より， $9 \leq 2 \cdot 6 - 4 = 8$ となる．これは矛盾である．したがって， $K_{3,3}$ は平面的でない． **【証明終】**

3 まとめ

本紀要の解説した内容を，公開講義や模擬授業で話すと，受講している高校生は自分たちが学んでいる「数学」とは少し違った印象を持つようである．多くの学生は，数学の本質が単に計算をして，数値的な答えを出すことが主目的であると考えていたようである．しかし講義を通じ，定義・定理・証明を繰り返しながら，少しずつ数学的現象に対する理解を深めていくことも重要であることを理解してもらえた．またその過程で，実際に授業で学んだ論理的手法が有効に使用されていることも実感できたように思う．以上のような理由より，位相幾何的グラフ理論の初歩を高等学校の数学課程に導入することが有効であると考察する次第である．また，この考察を実証するためには，さらなる試行が必要であると考えている．

参考文献

- [1] 前原 潤，直観トポロジー，共立出版，1993
- [2] 鈴木晋一，花木 良，数学教材としてのグラフ理論，学文社，2012