理論地理学ノート，No. 18(2016)，21〜26

多目的計画法を用いた行政原理モデルの定式化

石　崎　研　二

Ⅰ　はじめに

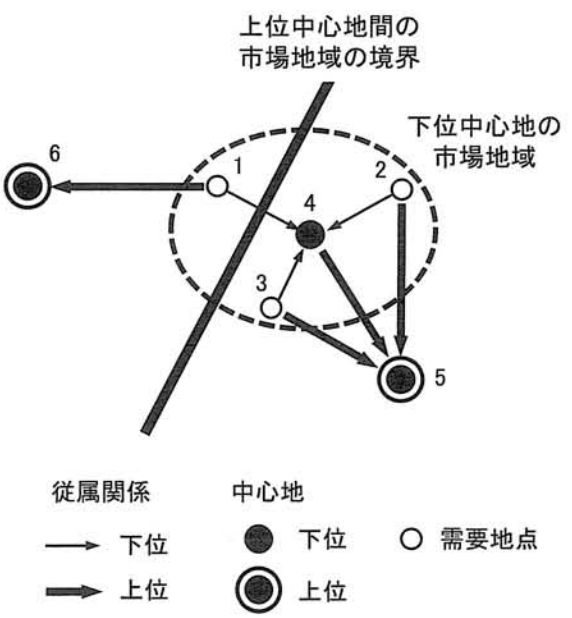
階層的施設配置問題とは，たとえば中学校と小学校，総合病院と専門医院などのように，提供されるサービスの種類や規模の違いが存在する施設の立地を考察する問題である．階層的施設配置問題に関する研究は，施設の最適配置を求めるための立地・配分モデル（石崎，2003）の開発とともに，1970 年代以降，本格的に進展してきた．その嚆矢ともいうべき Schultz（1970）では，施設の階層性を検討する際の理論的基盤として，クリスターラーの中心地理論（クリスタラー，1969）に着目している．上位の中心地（施設）が下位の中心地（施設）で提供されるサービスも保有するという，財の包括的保有 successively inclusive の条件（以下，SI の条件と略）は，クリスターラーの中心地理論の特徴であり（Parr，2002），その条件の有無がさまざまな階層的施設配置問題を整理する際の重要な項目として取り上げられてきた（Şahin and Süral，2007；Farahani *et al.*，2014）．

他方，クリスターラーの中心地理論のもう一つの特徴である六角形の市場地域の包含関係については，Serra and ReVelle（1993）以降，明示的に扱われるようになった．下位の中心地（施設）の市場地域（施設のサービス圏）が，上位の中心地（施設）の市場地域によって分割されるか完全に包含されるかという違いは，クリスターラーの中心地理論における供給原理および交通原理と行政原理との違いでもある．Serra and ReVelle（1993）では，施設のサービス圏が階層間で分割されないための空間的整合性 coherence の条件を導入しており，さらに，Serra（1996）や Marianov and Serra（2001）では同条件の新たな定式化が図られている．

筆者はこれまで，クリスターラーの中心地理論の供給原理のモデル化について検討し（石崎，1992，1995），供給原理のモデルをベースとした交通原理モデルへの拡張（Ishizaki，2015）を試みてきた．そこで本稿では，Serra and ReVelle（1993）による空間的整合性の条件を改良し，多目的計画法として定式化することによって，拡張的な行政原理モデルを提示することを目的としたい．

Ⅱ　モデルの定式化

サービス圏や市場地域が階層間で分割されるということは，ある階層レベルの市場地域の領域が複数の上位のレベルの施設や中心地にまたがって従属することを意味している．たとえば第 1 図に示した需要地点 1 〜 3 は，下位のレベルでは同じ地点 4 の中心地に従属する．しかし，上位のレベルでは，地点 2，3 が地点 5 の中心地に従属するのに対して，地点 1 は地点 6 の中心地に従属するため，下位中心地の市場地域は，上位中心地間の市場地域の境界によって二分される．これを防ぐためには，地点 1 の上位のレベルの従属先を強制的に地点 5 の中心地に指定すればよい．Serra and ReVelle（1993）による空間的整合性の条件とは，



第 1 図　市場地域が分割される場合
注）中心地の立地点は需要地点を兼ねている．

このように下位のレベルの従属先と上位のレベルの従属先を連動させる制約条件のことである．

本稿では，空間的整合性の条件について，制約条件ではなく目的関数の中に組み込み，供給原理のモデルをベースとして次第に行政原理に近づけるような拡張的なモデルを展開する．すなわち，第1図の地点1のように空間的整合性から逸脱する越境的なパターンをできるだけ少なくするような，越境数最小化の目的を導入する．ここで，供給原理のモデルとしてメディアン問題を採用し，多目的計画法を用いて越境数最小化と組み合わせると，モデルは以下のように定式化できる．

$$\min Z = w\sum_m\sum_i\sum_j a_i d_{ij} X_{ijm} + (1-w)\sum_m\sum_i a_i Z_{im} \quad (1)$$

制約条件：

$$\sum_j X_{ijm} = 1 \quad \forall i,m \quad (2)$$

$$Y_{jm} - X_{ijm} \geq 0 \quad \forall i,j,m \quad (3)$$

$$Y_{jm} - Y_{j(m-1)} \leq 0 \quad \forall j,m \geq 2 \quad (4)$$

$$X_{ij(m-1)} + X_{jkm} - X_{ikm} - 1 \leq Z_{im} \quad \forall i,j,k,m \geq 2 \quad (5)$$

$$\sum_j Y_{jm} = p_m \quad \forall m \quad (6)$$

$$X_{ijm} = 0,1 \quad \forall i,j,m \quad (7)$$

$$Y_{jm} = 0,1 \quad \forall j,m \quad (8)$$

$$Z_{im} = 0,1 \quad \forall j,m \quad (9)$$

ただし，X_{ijm} はレベル m のサービスについて地点 i が地点 j に配分される場合は1，それ以外は0となる配分変数，Y_{jm} は地点 j がレベル m のサービスの供給地点となる場合に1，それ以外は0となる立地変数，そして Z_{im} はレベル m において地点 i が越境的なパターンとみなされる場合に1，それ以外は0となる内生変数である．a_i は地点 i の人口，d_{ij} は地点 ij 間の距離，p_m はレベル m のサービスの供給地点数である．

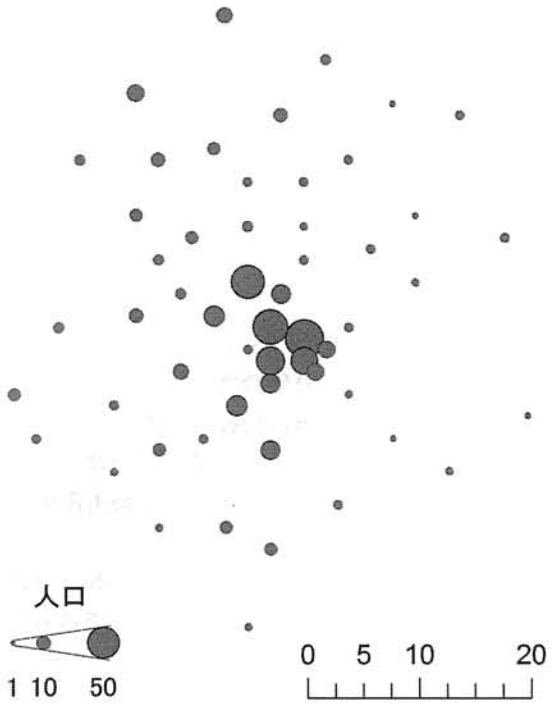
式(1)は，右辺第1項が総移動距離最小化を，第2項が越境数最小化を表す目的関数であり，重み付け w の値を微小に変化させることによって，折衷的な非劣解を導出する．ただし，$0<w<1$ とする．式(2)，式(3)および式(6)は通常のメディアン問題で用いられる制約条件であり，式(4)は高次のレベル m のサービスの供給地点は，同時に低次のサービス $m-1$ の供給地点となることを表すSIの条件である．そして，式(5)がSerra and ReVelle (1993) による空間的整合性の条件に，越境地点を定義するための Z_{im} を加えて拡張した制約条件である．

具体的に第1図をもとに説明すると，地点間の従属関係は配分変数 X_{ijm} で定義できるため，たとえば，地点4と地点5との間の上位の従属関係は，高次のレベル m の配分変数 $X_{45m}=1$ と表せる．ここで，$j=4$, $k=5$ のとき，式(5)は，$X_{i4(m-1)}+1-X_{i5m}-1\leq Z_{im}$ となる．地点2のように下位の従属先が地点4，上位の従属先が地点5であるならば，低次のレベル $m-1$ の配分変数 $X_{24(m-1)}=1$，高次のレベル m の配分変数 $X_{25m}=1$ となり，式(5)は $0\leq Z_{2m}$ となるが，地点1の場合は $X_{14(m-1)}=1$ かつ $X_{15m}=0$ であるため，$1\leq Z_{1m}$ となる．式(1)の目的関数で Z_{im} は最小化の対象であることから，自ずと前者では0，後者では1の値をとる．すなわち，高次のレベル m において，地点1は越境的なパターンとみなされる．

Ⅲ　サンプルデータを用いたモデルの適用

ここで，Swain（1971）による55地点のサンプルデータ（第2図）にモデルを適用してみたい．地点間の距離は直線距離で算出し，すべての地点は需要地点でありサービスの供給地点になりうると仮定する．サービスのレベルは低次（$m=1$）から高次（$m=3$）の三種類とし，サービスの供給地点数をそれぞれ $p_1=12$, $p_2=5$, $p_3=2$ とした．モデルを解く際は，株式会社NTTデータ数理システムの汎用数理計画法パッケージNUOPT ver. 15.1.0を利用した．用いるデータの地点数によっては，とくに式(5)の制約条件の数が著しく増大するため，発見的解法（Serra and ReVelle, 1994）の適用も考えられるが，本稿で用いたデータと計算機環境では，シンプレックス法と分枝限定法を用いて，数分～数十分程度で厳密解を求めることができた．

第1表は，式(1)の重み付け w を0.01刻みで変化させて得られた七つの非劣解の目的関数値を示している．式(1)右辺の第1項である総移動距離と第2項の越境数との間にはトレードオフの関係が認



第２図　Swain（1971）によるサンプルデータ

注）サンプルデータの立地点，人口については，石崎（1995）の第１表を参照されたい．

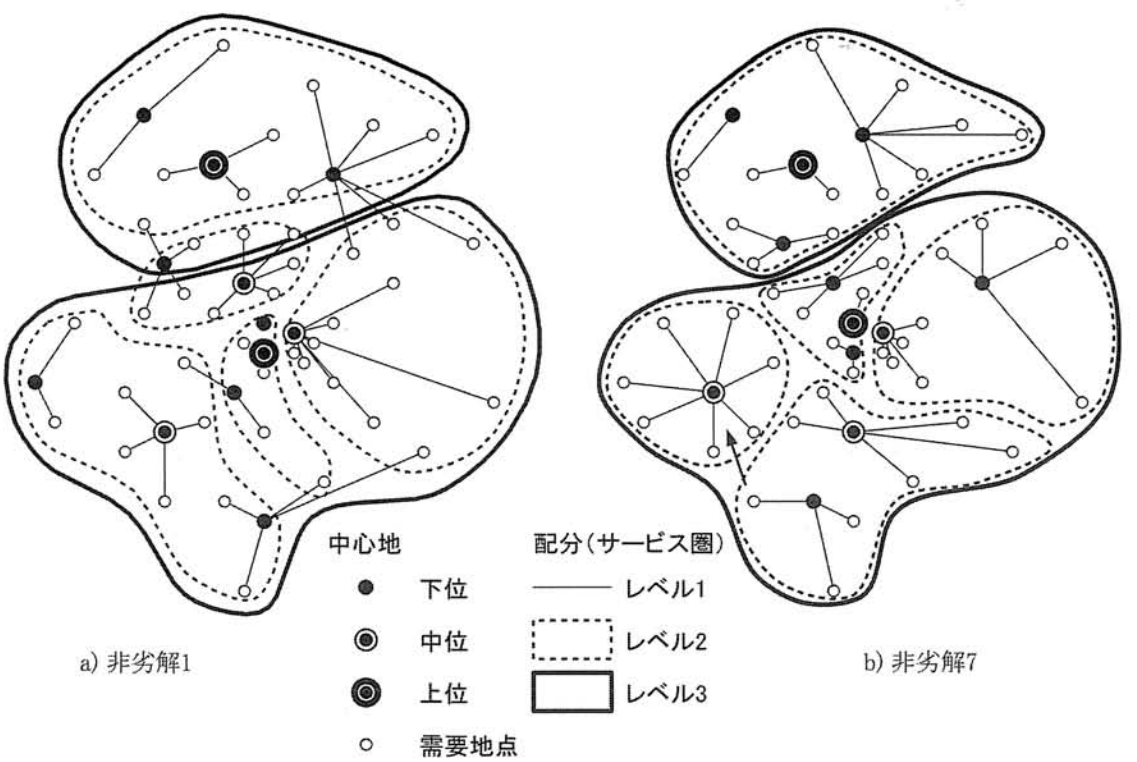
第１表　多目的計画法による非劣解

非劣解	目的関数	
	総移動距離	越境数
1	9391.3	62
2	9392.0	59
3	9398.7	50
4	9411.7	33
5	9421.3	27
6	9458.8	10
7	9485.5	0

注）重み付け w は，非劣解１から７にかけて小さい値をとる．

められる．このうち，非劣解１が第１項を最優先した場合の解であり，非劣解７が空間的整合性を満たす場合の解である．第３図は二つの解を図示したものであり，サービスの供給地点の集積の程度で中心地の階層を表している．すなわち，レベル１～３のすべてのサービスの供給地点が集積した上位中心地，レベル１～２の中位中心地，そしてレベル１のみの下位中心地である．

非劣解１の結果（第3-a図）をみると，レベル１



第３図　多目的計画法による立地解と配分パターン

注）配分パターンについては，レベル１の配分先を実線で，レベル２とレベル３はそれぞれのサービス圏の範囲で示している．

では同じ下位中心地に配分される需要地点が，レベル2では複数の中位中心地のサービス圏にまたがる例や，レベル2のサービス圏がレベル3のサービス圏で分割される例など，いくつかの越境パターンが散見される．総移動距離からみたサービスの効率的な供給は実現しているが，サービス圏すなわち市場地域の空間的整合性が保たれない非劣解1の結果は，クリスターラーの中心地理論における供給原理に基づく中心地システムを想起させる．他方，越境数が0となる非劣解7の結果（第3-b図）は，行政原理に基づく中心地システムに類似したサービス圏の包含関係が成立するが，各需要地点から各階層の中心地までの移動距離が全体的に増大するため（第1表），サービス供給の効率性が失われる．したがって，非劣解1と同程度の効率性を維持するためには，サービスの供給地点数を増やす必要がある．

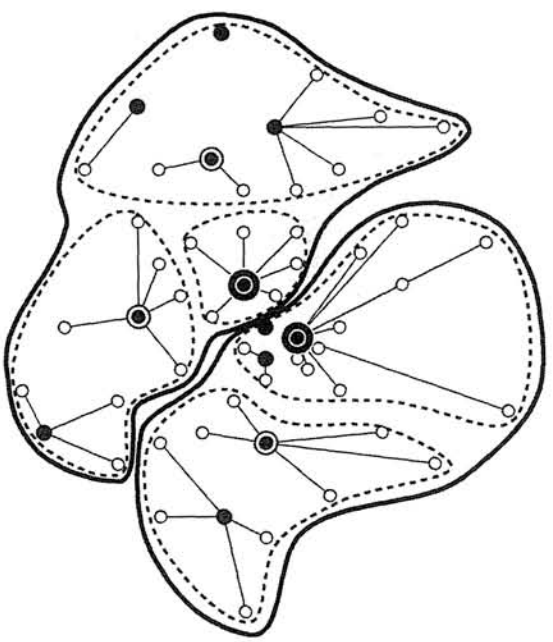
ただし，越境数最小化によって空間的整合性の条件を優先させた結果，需要地点の配分先が必ずしも最近隣の供給地点にならない場合が生じる．第3-b図中の矢印は，ある需要地点におけるレベル2の最近隣の中心地を示しているが，レベル1のサービス圏を包含するために，当該地点は最近隣ではない中位中心地のサービス圏に含まれていることがわかる．このように中心地理論における最近隣中心地利用仮説に反する配分パターンを防ぐには，Wagner and Falkson（1975）による以下の制約条件を追加すればよい．

$$\sum_{h \in F_{ij}} X_{ihm} + Y_{jm} \leq 1 \quad \forall i,j,m \tag{10}$$

ここで，F_{ij}は需要地点iからみて地点ij間よりも遠方にある地点hの集合である．地点jにレベルmのサービスの供給地点が立地した場合（$Y_{jm}=1$），それよりも遠方にあるすべての地点への配分が0となるため，式(10)は結果的に最近隣供給地点への配分を促す制約条件となる．

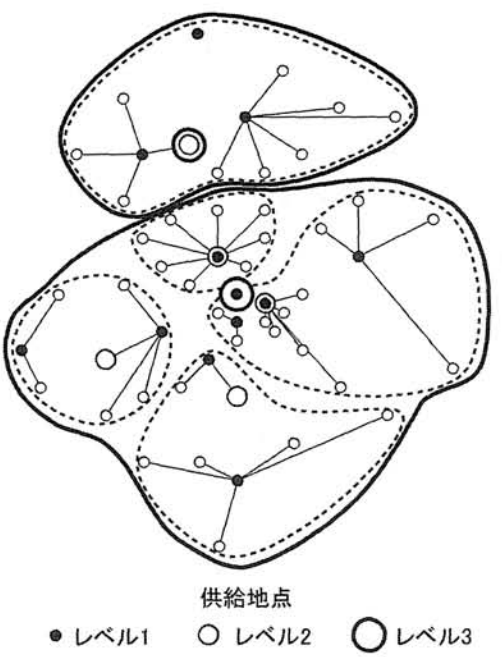
式(10)を加えたモデルについて，越境数が0になる場合の適用結果を示したのが第4図である．制約条件が増えることによって，目的関数値である総移動距離の値は9585.7と，第1表の非劣解7よりも増大している．しかし，いずれのサービス圏も最近隣中心地利用仮説を満たしているため，中心地理論の前提を遵守するならば，式(10)を追加した行政原理モデルの適用が望ましい．

クリスターラーの中心地理論の前提とは異なる



第4図　最近隣供給地点配分の条件を考慮した場合の解

注）凡例は第1図と同じである．



第5図　SIの条件を考慮しない場合の解

注）第1図と異なり，高次のサービスと低次のサービスの供給地点が必ずしも一致しないため，各レベルに分けて供給地点を示している．その他の凡例は第1図と同じである．

が，階層的施設配置問題における対象施設の中には，必ずしもSIの条件を必要としない場合がある．たとえば学校の配置計画では，学区の包含関係は考慮しても，小学校と中学校の立地点を必ずしも一致させる必要はないだろう．そこでSIの条件である式(4)を除いて式(1)〜式(9)のモデルを適用すると，越境数が0になる場合の結果として第5図が得られた．総移動距離の値は9303.8であり，第1表のいずれの非劣解よりも目的関数値が改善されている．一部で複数のレベルの供給地点が一致しているが，これは偶然集積によるものである．実際の施設配置問題に適用する際は，対象とする施設特性に応じて，上記のような制約条件の緩和や目的関数の優先度を考慮すればよい．

Ⅳ　むすびにかえて

本稿では，多目的計画法を用いて，クリスターラーの中心地理論における供給原理から行政原理へと近づける拡張的なモデルを提示した．越境的パターンを求める変数Z_{im}を特定のレベルに限定すれば，ある階層間のみに行政原理が働く中心地システムを導出することも可能である．このことは，Ishizaki（2015）のモデルと組み合わせれば，供給原理，交通原理，行政原理の三つの混合的な階層システムが構築可能であることを意味する．他方，現実的な階層的施設配置問題への適用を想定した場合，サービス圏の包含関係の条件を再検討する必要があるかもしれない．第3-b図や第5図をみると，レベル2とレベル3のサービス圏が同じ範囲となる例が存在する．これは当該施設で対応する住民数が階層間で変わらないことを意味しており，地域全体における施設の効率的な管理運営や，サービスのレベルに応じた対費用効果などを考慮すると，階層レベルによって大きさの異なるサービス圏を設定する必要があるかもしれない．Serra and ReVelle（1993, p. 306）によるサービス圏の包含数の条件以外に，階層レベルに応じた施設の収容人口の上限・下限の制約条件を導入するなど，対象施設に応じたモデルの改良が望まれる．

冒頭でも述べたように，中心地理論の基本概念を取り入れるかたちで進展してきた階層的施設配置問題研究であるが，モデル化にあたっては，本稿で示した空間的整合性の条件や最近隣中心地利用仮説の条件など，複雑かつ計算量の多い定式化が要求される場合がある．計算機環境の改善によって相応の時間短縮が実現しつつあるとはいえ，データ量の多い現実の中心地の分布や施設配置問題に適用するには，理論上の前提の妥当性も含めて検討すべき課題が残っている．近年，適用例が増えつつあるメタヒューリスティクス（Farahani *et al.*, 2014）などの，新たな解法を利用することも考える必要があるだろう．

（奈良女子大学・文学部）

文　献

石﨑研二（1992）：立地－配分モデルによるクリスタラー中心地理論の定式化の試み．地理学評論 **65A**, 747-768.

石﨑研二（1995）：クリスタラーの中心地理論の配置原理に関する一考察―供給原理から一般化最大カバー問題へ―．地理学評論 **68A**, 579-602.

石﨑研二（2003）：立地・配分モデル．杉浦芳夫編『シリーズ＜人文地理学＞3 地理空間分析』朝倉書店, 61-83.

クリスタラー, W. 著, 江沢譲爾訳（1969）：『都市の立地と発展』大明堂, 396p. Christaller, W. (1933): *Die zentralen Orte in Süddeutschland*. Gustav Fischer, Jena, 331S.

Farahani, R. Z, Hekmatfar, M., Fahimnia, B. and Kazemzadeh, N. (2014): Hierarchical facility location problem：Models, classification, techniques, and applications. *Computers & Industrial Engineering*, **68**, 1096-1109.

Ishizaki, K. (2015): A multiobjective maximal covering location problem incorporating inter-city traffic network. *Geographical Reports of Tokyo Metropolitan University*, **50**, 37-44.

Marianov, V. and Serra, D. (2001): Hierarchical location-allocation models for congested systems. *European Journal of Operational Research*, **135**, 195-208.

Parr, J. B. (2002): The location of economic activity: Central place theory and the wider urban system. McCann, P. ed.: *Industrial Location Economics*. Edward Elgar, Cheltenham, 32-82. マッカン, P. 著, 上遠野武司編訳（2007）：『企業立地行動の経済学－都市・産業クラスターと現代企業行動への視角』学文社, 35-97.

Şahin, G. and Sural, H. (2007): A review of hierarchical facility location models. *Computers & Operations Research*, **34**, 2310-2331.

Schultz, G. P. (1970): The logic of health care facility

planning. *Socio-Economic Planning Science*, **4**, 383–393.

Serra, D. (1996): The coherent covering location problem. *Papers in Regional Science: The Journal of the RSAI*, **75(1)**, 79–101.

Serra, D. and ReVelle, C. (1993): The pq-median problem : Location and districting of hierarchical facilities. *Location Science*, **1**, 299–312.

Serra, D. and ReVelle, C. (1994): The pq-median problem: Location and districting of hierarchical facilities, Part II: Heuristic solution methods. *Location Science*, **2**, 63–82.

Swain, R. A. (1971): *A Decomposition Algorithm for a Class of Facility Location Problems*. Ph. D dissertation, Cornell University, Ithaca, N. Y. (筆者未見)

Wagner, J. L. and Falkson, L. M. (1975): The optimal nodal location of public facilities with price-sensitive demand. *Geographical Analysis*, **7**, 69–83.