カイラル摂動論による核子-K^+ 中間子散乱と核媒質中におけるカイラル対称性の部分的回復

青木　健児

概要

カイラル対称性の自発的破れは相転移現象であるので温度・密度など環境を変化させるとカイラル対称性が回復すると考えられている。カイラル対称性が自発的に破れている時、クォーク凝縮 $<\bar{q}q>$ は有限の値を持ち、カイラル対称性が自発的に破れた相にいるか否かのオーダーパラメーターとなる。超高温において、クォークとグルーオンがハドロンの閉じ込めから解放されてバラバラに存在する事が実験的に示されている (Quark Gluon Plasma,QGP)。しかし、これは高エネルギーにおける動的な反応であるのでQGP が本当にカイラル対称性の完全回復 ($<\bar{q}q>=0$) の帰結であるかは明らかではない。カイラル対称性が自発的に破れる機構を現象論的に理解するためには、環境を変える事により、クォーク凝縮 $<\bar{q}q>$ の絶対値が減少する事を示せば良い。そこで、原子核のような有限密度系にハドロンを埋め込み、カイラル対称性が回復に向かう際のハドロン物理量の振る舞いを調べ、そこから真空の情報を引き出そうとする研究が行われている。

すでに、深く束縛された π 中間子の分光実験からカイラル対称性が部分的に回復する事を示唆するようなデータが得られている。しかしながら、その他の中間子-原子核系でカイラル対称性が回復する影響がどのように見えるかは自明ではない。本論文では π 中間子には含まれなかったストレンジネスを含む K^+ 中間子を用いてカイラル対称性の部分的に回復に起因すると考えられる核媒質中のハドロンの性質を調べた。

Nambu-Goldstone ボソンの 1 つである K^+ 中間子は核子と低エネルギーにおいて弱い斥力で相互作用する事が知られている。また、ストレンジネス $S=+1$ である事から $S=-1$ の $\bar{K}$ と異なり強く結合する共鳴状態が存在しない。そのため K^+ は核媒質中におけるハドロンの性質を調べる際のクリーンなプローブとして注目されてきた。K^+-原子核散乱を考えたとき、K^+ と核子は低エネルギーで弱く相互作用する事から単純な $t_{\rm free}\rho$ 近似が成り立つと予想される。しかし、この近似は破綻している事が実験的に知られている。本論文ではこの近似が破綻する理由を波動関数のくりこみの観点から説明した。

まず、$K^+N \to K^+N$ 散乱をカイラル摂動論に基づき next-to-leading order (NLO) まで計算した。その際、NLO に含まれる低エネルギー定数 (low energy constant,LEC) を χ^2 法を用いて $I=1$ と $I=0$ の全散乱断面積のデータとフィットし最適値を採用した。求めた低エネルギー定数の最適値を用いて散乱長、位相差、微分散乱断面積を計算した。最後に K^+ と核媒質の相互作用を与える自己エネルギーを計算し媒質効果の一部は波動関数のくりこみから説明できる事を示した。

目次

第 1 章

導入

強い相互作用は量子色力学 (Quantum Chromodynamics,QCD) によって記述される。QCD は色の自由度を持つ $SU(3)_c$ ゲージ群に基づきクォークとグルーオンの間に働く強い相互作用を記述する。QCD はエネルギーに依存して結合定数が変化する。従ってエネルギー領域に依存して異なる描像が現れる。高エネルギー (近距離) では漸近的自由性によりほとんど自由に運動するクォークとグルーオンが見える。この時、強い相互作用の結合定数が小さいため摂動計算が可能である。一方、低エネルギー (遠距離) では強い相互作用の結合定数が増大する。そのため、カラーの閉じ込めが起こりカラー 1 重項 (無色) のクォーク・グルーオン複合状態として存在する。この状態をハドロンと呼び、低エネルギー QCD で基本的自由度となる。本論文の興味は、この低エネルギーにおけるハドロンの性質についてである。

ハドロンはクォークの組成により様々な種類があるが大きくメソンとバリオンに分類される。メソンはクォーク-反クォークの対で構成されており、例えば π 中間子、K 中間子などがある。バリオンは 3 つのクォークから構成されており、例えば陽子、中性子などがある。強い相互作用には、ハドロンを構成する力とハドロン同士を結びつける力という 2 重の構造がある。低エネルギーにおいてはハドロンが基本的自由度であるので後者を考える。

低エネルギー QCD で重要になってくるのはカイラル対称性である。QCD のカイラル対称性は運動項、ゲージ場の自己相互作用項については常に満たされている。しかし、質量項はカレントクォーク質量が有限である場合においてカイラル不変にならない。現実の世界ではヒッグス機構によりカレントクォーク質量が僅かに付与されているので、QCD におけるカイラル対称性は近似的対称性である。

QCD は真空が無限に縮退しているという非自明な構造を持つ。そのため、ラグランジアン (理論) の持つ対称性はハドロンスペクトラム (物理状態) には反映されない事がわかっている。このことは、ラグランジアンの持つ対称性の一部は真空で失われる事を示唆している。これを、カイラル対称性が自発的破れていると表現し、この時、クォーク凝縮 $<\bar{q}q>$ は有限の値を持つ。

1.1 カイラル対称性の部分的回復

カイラル対称性が自発的に破れる機構をカイラル対称性の部分的回復の観点から現象論的に理解したいというハドロン物理の興味がある。カイラル対称性の自発的破れは相転移現象であるので温度・密度を変化させるとカイラル対称性は回復すると考えられている。超高温において、クォークとグルーオンがハドロンの閉じ込めから解放されてバラバラに存在する事が実験的に示されている (Quark Gluon Plasma,QGP)。しかし、これは高エネルギーにおける動的な反応であるので QGP が本当にカイラル対称性の完全回復 ($<\bar{q}q>= 0$) の帰結であるかは明らかではない。真空の変化を見るためには静的な反応

を調べる必要がある。原子核のような有限密度系ではカイラル対称性が部分的に回復すると考えられている。カイラル対称性の部分的回復とはカイラル対称性が完全回復 ($<\bar{q}q>=0$) しないまでもクォーク凝縮が減少する状態のことを意味する。

これを調べるためには、カイラル対称性の自発的破れに敏感な Nambu-Goldstone ボソン (NG ボソン) を原子核に埋め込む。(NG ボソンはカイラル対称性の自発的破れの申し子とも言われるべき存在であり、π, K, η はこれである。) そして、核媒質中でハドロン物理量の変化を調べ、そこからクォーク凝縮の変化についての情報を引き出す。クォーク凝縮は直接の観測量ではないのでハドロン物理量の変化から間接的に情報を引き出すのである。

深く束縛された π 中間子 (π^--原子核系) の分光実験によりカイラル対称性が 30% 回復することを示唆するようなデータが得られている [1]。これは、しきい値よりも下のエネルギー領域 (subthreshold) における測定である。しかし、しきい値 (threshold) より上のエネルギー領域で同じ事が起こるかどうかは自明ではない。そこで、$\pi^{\pm}$-原子核弾性散乱においても同じようにカイラル凝縮が減少するか調べられている。$\pi^{\pm}$ は強い相互作用において核子と斥力で相互作用する。$\pi^{\pm}$ 両方の場合について入射エネルギー 21.5MeV/c における微分散乱断面積のデータが与えられている。光学ポテンシャルを用いたフィットから散乱長の比が $b_1^{\mathrm{free}}/b_1 = 0.69$ となることがわかっている [2]。これは $\pi^{\pm}$ が核媒質中にある時、斥力が増す事を示唆している。そして、この現象はカイラル対称性が回復に向かう事の帰結であると示されている。

その他の中間子-原子核系についてカイラル対称性が回復に向かう際の影響がどのように見えるかは自明ではない。本研究ではストレンジネスを含む K 中間子-原子核系について計算を行った。まず、K^+-原子核散乱の素過程である K^+N(核子) 散乱を記述する散乱振幅をカイラル摂動論に基づき構成した。そして、構成した散乱振幅を用いて核媒質中における K^+ 中間子の性質の変化を計算した。

1.2　K^+-原子核散乱

本研究では K^+-原子核系を考える。なぜ、特に K^+ を用いるのかについて述べる [3]。K^+N 散乱で K^+ は強い相互作用において比較的弱い斥力で核子と相互作用する。そのため、散乱断面積は小さいので平均自由行程は 5fm と長い。これは原子核の典型的な大きさと同程度である。単純に考えると K^+ は原子核に入ったときに核子 1 つ 1 つと弾性散乱すると考えられる。よって、$P_{LAB} \leq 800$MeV/c において

$$\sigma(K^+A) \simeq A\sigma(K^+N) \tag{1.1}$$

と近似的にあらわすことができると予想される。この式は K^+ と原子核の散乱断面積は、素過程である K^+N 散乱断面積に質量数をかけた量としてあらわせる事を意味する。

また K^+ は反ストレンジクォークを含むのでストレンジネスは $S=+1$ である。このとき K^+-N の強く共鳴する結合状態が存在しない。よって、核媒質の K^+ に対する純粋な効果を見る事ができる。$S=-1$ であるような $\bar{K}$ を用いた場合、$\bar{K}$ と核子の共鳴状態である $\Lambda(1405)$ が現れるので、今回の目的には適さない。

以上、2 つの理由から K^+ は核媒質のハドロンに対する影響を調べるプローブとして適している事がわかる。原子核は K^+ にとって、ほとんど「透明」であると考えられるが、これと反するような実験データが得られている。

炭素 ^{12}C と重陽子 d の 1 核子当りの散乱断面積比 R は

$$R = \frac{\sigma(K^{+\,12}C)/12}{\sigma(K^{+}d)/2} > 1 \tag{1.2}$$

となる事が実験からわかっている [4]。重陽子 d は自由な核子の標的として考えられるので

$$\sigma(K^{+}d) = 2\sigma(K^{+}N) \tag{1.3}$$

が成り立つ。一方で $R > 1$ である事から炭素 ^{12}C 標的については予想される単純な近似が成り立たない。つまり、何らかの相互作用を増す機構のために

$$\sigma(K^{+\,12}C) > 12\sigma(K^{+}N) \tag{1.4}$$

となっている。この事を自己エネルギーの観点から述べる。

自己エネルギーとは K^{+} と核媒質の相互作用を与える量である。予測される線形密度近似において自己エネルギーは

$$\Sigma_{\mathrm{free}} = \frac{1}{2m_N}\mathcal{M}(K^{+}N)_{\mathrm{free}}\rho \tag{1.5}$$

$$\mathcal{M}(K^{+}N)_{\mathrm{free}} = -8\pi\sqrt{s}b_{\mathrm{free}} \tag{1.6}$$

と表す事ができる。m_N、ρ、$\sqrt{s}$ はそれぞれ、核子の質量、原子核の密度、全エネルギーを表す。真空中の $K^{+}N$ 散乱振幅は、しきい値で散乱長になる量 b_{free} でパラメトライズされる。一方で K^{+}-原子核散乱のデータに対するフィットから計算される自己エネルギー（実験に対応）は

$$\Sigma_{\mathrm{fit}} = \frac{1}{2m_N}\mathcal{M}(K^{+}N)_{\mathrm{fit}}\rho \tag{1.7}$$

$$\mathcal{M}(K^{+}N)_{\mathrm{fit}} = -8\pi\sqrt{s}b_{\mathrm{fit}} \tag{1.8}$$

と表す事ができる。この場合、$K^{+}N$ 散乱振幅はフィットによって決まるパラメーターであり、しきい値で散乱長になる b_{fit} でパラメトライズされる。E.Friedman と A.Gal の議論 [2] によると $Re\, b_{\mathrm{fit}}$ は $Re\, b_{\mathrm{free}}$ に比べてエネルギーに依存して 14% から 50% 大きい。また $Im\, b_{\mathrm{fit}}$ は $Im\, b_{\mathrm{free}}$ に比べてエネルギーに依存して 12% から 25% 大きくなる事がわかっている。この事を波動関数くりこみによるものであることを示したい。

1.3　波動関数くりこみ

ハドロンが核媒質中にある時、次のように変更を受ける。

- 質量の変化
- 自己エネルギーにエネルギー依存性がある時は波動関数の規格化の変化

後者を波動関数くりこみと呼び、これは媒質の高次の効果の 1 つである。自己エネルギーは式 (1.5)、式 (1.7) からわかるように、NG ボソンの 1 つである K^{+} と核子の自由度で表されている。NG ボソンの散乱振幅はエネルギーでの展開であるので、媒質の高次の効果の 1 つである、波動関数くりこみが大きいと予想して計算を行う。その他の媒質効果は小さいと考えて今回は無視する事にする。波動関数くりこみにより自己エネルギーは Z なる因子が付与される。

$$\Sigma = Z\frac{1}{2m_N}\mathcal{M}(K^{+}N)\rho \tag{1.9}$$

$$Z \simeq 1 + \frac{\partial\Sigma}{\partial E^{2}} \tag{1.10}$$

これより Z の 1 からのずれを計算する事により波動関数くりこみの効果を計算できる。これは、線形密度近似を超えて ρ^2 の効果を計算する事に対応する。

1.4　カイラル摂動論

さて、Z を計算するためには K^+-原子核散乱に対する素過程である $\mathcal{M}(K^+N)$ を計算する必要がある。$\mathcal{M}(K^+N)$ を求めるためには、例えば vector meson exchange モデルなどの現象論的モデルを用いる事もできる。しかし、今回の研究については計算結果をハドロン物理で解釈したい。そこで、強い相互作用の第一原理である QCD に基づくカイラル摂動論 (Chiral Perturbation Theory,ChPT) を用いる。これは、低エネルギーにおける QCD 有効理論であり、ハドロンが基本的自由度となっているので理論的解釈がし易いのである。よって、真空の変化の応答としてのハドロン物理量の変化を調べる際に適した方法であると言えるであろう。カイラル摂動論はラグランジアンがカイラル対称性を保ちながら物理的自由度はカイラル対称性が破れた世界を記述するように構成されている。そして NG ボソンをはじめとするハドロンの動力学を記述する。

1.5　論文の構成

第 2 章で QCD の持つ局所ゲージ対称性とカイラル対称性について概観する。第 3 章でカイラル対称性の自発的破れとその帰結について議論する。第 4 章でカイラル対称性が自発的に破れた世界を記述する低エネルギー QCD 有効理論であるカイラル摂動論について詳しく述べる。ここでは、メソン、メソン-バリオンの相互作用を記述するラグランジアンの構成方法について述べる。第 5 章では第 4 章で構成したラグランジアンを用いて K^+N 弾性散乱の散乱振幅の計算を行う。第 6 章では第 5 章で計算した散乱振幅を用いて様々な量を計算し文献と比較する。そして、波動関数くりこみの効果を見積もる。第 7 章では結果についてまとめ、今後の展望について述べる。

第 2 章

QCD の対称性

この章では量子色力学 (Quantum Chromodynamics,QCD) の持つ 2 種類の対称性（ゲージ対称性、カイラル対称性）について概観する。ゲージ対称性はクォークとグルーオンの相互作用を規定する。カイラル対称性はクォーク質量が 0 であるとき厳密に成り立つ対称性であるが現実世界ではクォークは 0 ではないが有限の質量を持つのでカイラル対称性は近似的な対称性である。

2.1 ゲージ対称性

QCD はカラー $SU(3)_c$ をゲージ群とする強い相互作用の理論である。物質場はクォークと呼ばれるスピン 1/2 のフェルミオンであり 6 種類のフレーバー u, d, s, c, b, t を持ちそれぞれが 3 種類のカラー自由度を持つ。ゲージ場はグルーオンと呼ばれるスピン 1 のボソンであり強い力を媒介する。QCD ラグランジアンを得るためには自由なクォーク場のラグランジアンに対して $SU(3)_c$ ゲージ変換についての不変性を課せばよい。

$$\mathcal{L}_{free} = \sum_{A=1}^{3}\sum_{f=1}^{6}\sum_{\alpha,\alpha'=1}^{4} \bar{q}_{\alpha,f,A}(\gamma^{\mu}_{\alpha,\alpha'} i\partial_\mu - m_f \delta_{\alpha,\alpha'}) q_{\alpha',f,A} \tag{2.1}$$

ここでクォーク場の添字 A, f, α はそれぞれカラー、フレーバー、ディラックスピノルの添字である。また、それぞれのフレーバーのクォーク場は $q_f = (q_{f,1}, q_{f,2}, q_{f,3})^t$ のようにカラー 3 重項で表記する。

$SU(3)_c$ ゲージ変換:

$$q_f(x) \to q'_f(x) = \exp\left[-i\sum_{a=1}^{8}\theta_a(x)\frac{\lambda_a}{2}\right] q_f(x) \equiv U(x) q_f(x) \tag{2.2}$$

$$q^\dagger_f(x) \to q'^\dagger_f(x) = q^\dagger_f(x) U^\dagger(x) \tag{2.3}$$

$$U \in SU(3)_c$$

(λ_a : ゲルマン行列　$\theta_a(x)$: 実関数)

さて、このようなローカルな変換に対してラグランジアンを不変にしたい。質量項はそのままで不変であるので運動項のみを考える。まず通常の微分 ∂_μ を共変微分 D_μ で置き換える。そして $\mathcal{L}_{free}$ を不変にするように A_μ の変換則を決めてやると

$$D_\mu q_f \equiv (\partial_\mu + igA_\mu) q_f \tag{2.4}$$

$$A_\mu = A_{a\mu}\frac{\lambda_a}{2} \to A'_\mu = UA_\mu U^\dagger + \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^\dagger \tag{2.5}$$

となる。$A_{a\mu}(a=1...8)$ はグルーオン場，g は強い相互作用の結合定数である。g が 1 種類であることから強い相互作用はフレーバーに依存しない事がわかる。QCD ラグランジアンの物質場パートは

$$\mathcal{L}_{matter}=\sum_{f=u,d,s,c,b,t}\bar{q}_f(i\not{D}-m_f)q_f \tag{2.6}$$

となる。ここまでで $\mathcal{L}_{QCD}$ の物質場 (クォーク場) とゲージ場 (グルーオン場) の相互作用の仕方が決まった。次にゲージ場の自己相互作用もゲージ原理から決める。

場の強さのテンソルを

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu} &\equiv F_{a\mu\nu}\frac{\lambda_a}{2} && (2.7)\\
F_{\mu\nu} &= D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu \\
&= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu] && (2.8)\\
F_{a\mu\nu} &= \partial_\mu A_{a\nu} - \partial_\nu A_{a\mu} - g f_{abc} A_{b\mu} A_{c\nu} \quad (f_{abc} : SU(3)\text{ の構造定数}) && (2.9)
\end{aligned}$$

とすると

$$F_{\mu\nu}\to F'_{\mu\nu}=UF_{\mu\nu}U^\dagger \tag{2.10}$$

のように変換する。従って

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{gauge} &= -\frac{1}{4}F_{a\mu\nu}F_a^{\mu\nu}\\
&= -\frac{1}{2}Tr(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) && (2.11)
\end{aligned}$$

とするとゲージ場の自己相互作用パートもゲージ不変となる。

QCD ラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{QCD}=\sum_{f=u,d,s,c,b,t}\bar{q}_f(i\not{D}-m_f)q_f-\frac{1}{2}Tr(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \tag{2.12}$$

である。

2.2　カイラル対称性

カイラル対称性を考えるにあたってまずカイラリティを定義する。カイラリティは γ^5 の固有値 ± 1 で定義され、その固有状態をカイラルスピノルと呼ぶ。従ってガンマ行列は γ^5 が対角であるカイラル表示を用いる。

$$\gamma^0=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\qquad \gamma^j=\begin{pmatrix}0&-\sigma^j\\ \sigma^j&0\end{pmatrix}\quad (j=1,2,3) \tag{2.13}$$

$$\gamma^5=\mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} \tag{2.14}$$

４成分波動関数 ψ の上２成分を ξ, 下２成分を ζ と書く。

$$\psi=\begin{pmatrix}\xi\\ \zeta\end{pmatrix} \tag{2.15}$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \zeta \end{pmatrix} = \psi_R + \psi_L \tag{2.16}$$

ψ_R,ψ_L をカイラルスピノルと呼ぶ。カイラルスピノルは

$$\gamma^5 \psi_R = \psi_R \tag{2.17}$$
$$\gamma^5 \psi_L = -\psi_L \tag{2.18}$$

のようになり γ^5 の固有状態となっている。γ^5 の固有値をカイラリティと呼び、カイラリティ +1 の ψ_R は右巻き, カイラリティ-1 の ψ_L は左巻きであるという。

次に 4 成分波動関数をカイラルスピノルに分解する際に用いる射影演算子を導入する。

$$P_R = \frac{1+\gamma^5}{2}, \qquad P_L = \frac{1-\gamma^5}{2} \tag{2.19}$$

射影演算子は以下の性質を満たす。

$$P_R + P_L = 1 \tag{2.20}$$
$$(P_R)^2 = P_R, \qquad (P_L)^2 = P_L \tag{2.21}$$
$$P_R P_L = P_L P_R = 0 \tag{2.22}$$

射影演算子を用いると 4 成分波動関数は

$$P_R \psi = \psi_R \tag{2.23}$$
$$P_L \psi = \psi_L \tag{2.24}$$

のように分解する事ができる。ψ_L,ψ_R のエルミート共役は

$$\bar{\psi}_L = \psi^\dagger P_L \gamma^0 = \bar{\psi} P_R \tag{2.25}$$
$$\bar{\psi}_R = \psi^\dagger P_R \gamma^0 = \bar{\psi} P_L \tag{2.26}$$

で与えられる。ここで、$\gamma_5 = \gamma_5^\dagger$, $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$ を用いた。

これらを用いて QCD ラグランジアンをカイラルスピノルを用いて書き下す。質量項 $\bar{\psi}\psi$ は

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\psi &= \bar{\psi}_R\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_L\psi_L \\ &= \bar{\psi}P_L P_R\psi + \bar{\psi}P_L P_L\psi + \bar{\psi}P_R P_R\psi + \bar{\psi}P_R P_L\psi \\ &= \bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R \end{aligned} \tag{2.27}$$

となる。運動項も同様にして

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = \bar{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R + \bar{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L \tag{2.28}$$

と計算できる。QCD ラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_f \Big(\bar{q}_{L,f} i \not{D} q_{L,f} + \bar{q}_{R,f} i \not{D} q_{R,f} - m_f(\bar{q}_{L,f} q_{R,f} + \bar{q}_{R,f} q_{L,f}) \Big) - \frac{1}{4} F_{a\mu\nu} F_a^{\mu\nu} \tag{2.29}$$

となる。運動項において右巻きクォークと左巻きクォークは完全に分離している。しかし、質量項に着目すると右巻き、左巻きは左右の成分が混ざっている事がわかる。従って $m_f \to 0$(カイラル極限) とすると QCD ラグランジアンは右巻き、左巻きについて独立なグローバル変換 $U(N_f)_L \otimes U(N_f)_R = SU(N_f)_L \otimes SU(N_f)_R \otimes U(1)_L \otimes U(1)_R$ を行っても不変である。特に $SU(N_f)_L \otimes SU(N_f)_R$ のもとでのラグランジアンの不変性をカイラル対称性と呼ぶ。つまりカイラル極限をとったとき、

$$q_L \to U_L q_L,\ \ U_L = \exp\left[i\sum_{a=1}^{8}\theta_L^a \frac{t^a}{2}\right]$$

$$\exp\left[i\sum_{a=1}^{8}\theta_L^a \frac{t^a}{2}\right] \in SU(N_f)_L \tag{2.30}$$

$$q_R \to U_R q_R,\ \ U_R = \exp[i\sum_{a=1}^{8}\theta_R^a \frac{t^a}{2}]$$

$$\exp\left[i\sum_{a=1}^{8}\theta_R^a \frac{t^a}{2}\right] \in SU(N_f)_R \tag{2.31}$$

(θ : 群の実パラメーター，t^a : $SU(N_f)$ 群の生成子)

の変換のもとでラグランジアンが不変であるときラグランジアンはカイラル対称性をもつと言う。

生成子は

$$[t^a, t^b] = 2if^{abc}t_c \ \ (f_{abc} : SU(N_f) \text{ の構造定数}) \tag{2.32}$$

$$Tr[t^a t^b] = 2\delta^{ab} \ \ (a = 0 \cdots N_f^2 - 1) \tag{2.33}$$

$$t^0 = \sqrt{2/N_f} \tag{2.34}$$

を満たす。生成子は

$$N_f = 2: \quad \tau^0 = 1, \quad \tau^{1,2,3} \ \ (\text{Pauli 行列}) \tag{2.35}$$

$$N_f = 3: \quad \lambda^0 = \sqrt{2/3}, \quad \lambda^{1,2\cdots 8} \ \ (\text{Gell} - \text{Mann 行列}) \tag{2.36}$$

などで与えられる。

ここでカイラル極限をとった時の QCD ラグランジアンを

$$\mathcal{L}_{QCD}^0 = \sum_f (\bar{q}_{L,f} i \not{D} q_{L,f} + \bar{q}_{R,f} i \not{D} q_{R,f}) - \frac{1}{4} F_{a\mu\nu} F_a^{\mu\nu} \tag{2.37}$$

とおくと $\mathcal{L}_{QCD}^0$ の $SU(N_f)_L \otimes SU(N_f)_R$ 不変性に対応するネーターカレントは

$$L_a^\mu = \bar{q_L} i\gamma^\mu \frac{t^a}{2} q_L,\ \ \partial_\mu L_a^\mu = 0 \tag{2.38}$$

$$R_a^\mu = \bar{q_R} i\gamma^\mu \frac{t^a}{2} q_R,\ \ \partial_\mu R_a^\mu = 0 \tag{2.39}$$

と計算される。カレント L_a^μ, V_a^μ に対応する電荷は

$$Q_L^a = \int d^3x L_{\mu=0}^a,\ \ \frac{dQ_L^a}{dt} = 0 \tag{2.40}$$

$$Q_R^a = \int d^3x R_{\mu=0}^a,\ \ \frac{dQ_R^a}{dt} = 0 \tag{2.41}$$

である。これらは $SU(N_f)_L \otimes SU(N_f)_R$ の代数

$$[Q_{La}, Q_{Lb}] = if_{abc}Q_{Lc}, \qquad [Q_{Ra}, Q_{Rb}] = if_{abc}Q_{Rc}, \qquad [Q_{Ra}, Q_{Lb}] = 0 \tag{2.42}$$

を満たす。

今まで見てきたカイラル変換 $SU(N_f)_L \otimes SU(N_f)_R$ は恒等的にベクトル変換、軸性変換に書き換える事ができる。ベクトル変換は U_L と U_R で同じアングルに変換 ($\theta_V \equiv \theta_R = \theta_L$) し、軸性変換は U_L と U_R で逆のアングルで変換 ($\theta_A \equiv \theta_R = -\theta_L$) する。

$$\text{ベクトル変換}: \ q \to Vq, \ \ V = \exp\left[i\sum_{a=1}^{8}\theta_V^a \frac{t^a}{2}\right] \tag{2.43}$$

$$\text{軸性変換}: \ q \to Aq, \ \ A = \exp\left[i\sum_{a=1}^{8}\theta_A^a \gamma^5 \frac{t^a}{2}\right] \tag{2.44}$$

カレントは

$$V_a^\mu = R_a^\mu + L_a^\mu = \bar{q}i\gamma^\mu \frac{t^a}{2}q, \ \ \partial_\mu V_a^\mu = 0 \tag{2.45}$$

$$A_a^\mu = R_a^\mu - L_a^\mu = \bar{q}i\gamma^\mu\gamma^5 \frac{t^a}{2}q, \ \ \partial_\mu A_a^\mu = 0 \tag{2.46}$$

となり、電荷は

$$Q_V^a = Q_L^a + Q_R^a \tag{2.47}$$

$$Q_A^a = Q_R^a - Q_L^a \tag{2.48}$$

と書き換えられる。Q_V^a, Q_A^a の交換関係は

$$[Q_V^a, Q_V^b] = if_{abc}Q_V^c, \qquad [Q_A^a, Q_A^b] = if_{abc}Q_V^c, \qquad [Q_V^a, Q_A^b] = if_{abc}Q_A^c \tag{2.49}$$

となりベクトル変換については代数が閉じているが軸性変換については代数が閉じていない。従って軸性変換は群をなさない。

ネーターの定理より得られた電荷は元の変換の量子力学的な生成子となっている。すなわち

$$\hat{U}_V = \exp[i\theta_V^a Q_V^a], \ \ \hat{U}_A = \exp[i\theta_A^a Q_A^a] \tag{2.50}$$

は

$$\hat{U}_V^\dagger q \hat{U}_V \simeq [1 + i\theta_V^a \frac{t^a}{2}]q \tag{2.51}$$

$$\hat{U}_A^\dagger q \hat{U}_A \simeq [1 + i\theta_A^a \gamma^5 \frac{t^a}{2}]q \tag{2.52}$$

となり古典場の変換と同じ形を成す。

第 3 章

カイラル対称性の自発的破れ

第 1 章で質量ゼロの QCD ラグランジアンはカイラル変換に対して不変であることを示した。カイラル対称性が自発的に破れるとラグランジアンの持つ対称性の一部は真空がカイラル対称性を破ることによって失われる。カイラル対称性が破れている時、クォーク凝縮 $<\bar{q}q>$ は有限の値をとり、これがカイラル対称性が破れている相にいるか否かのオーダーパラメーターとなる。クォーク凝縮 $<\bar{q}q>$ は有限の値をとるということに対応して対称性が破れた生成子の数に等しい数の擬スカラーメソンがあらわれる。これを Nambu-Goldstone ボソン (NG ボソン) と呼び、π、K、η はこれである。

3.1 カイラル対称性の自発的破れ

ここでは簡単のため $N_f = 2$ の場合を考える。すなわち $q = (u, d)^t$ とした場合である。また $m_f \to 0$ であるとする。その時の QCD ハミルトニアンを H^0_{QCD} とする。$\partial_t Q^a_V = 0, \partial_t Q^a_A = 0$ なのでハイゼンベルグ方程式から

$$[H^0_{QCD}, Q^a_V] = 0,\ \ [H^0_{QCD}, Q^a_A] = 0 \tag{3.1}$$

が成り立つ。これらの式は等価に

$$\hat{U}^\dagger_V H^0_{QCD} \hat{U}_V = H^0_{QCD},\ \ \hat{U}^\dagger_A H^0_{QCD} \hat{U}_A = H^0_{QCD} \tag{3.2}$$

と書き換える事ができる。ハミルトニアンはベクトル変換、軸性変換に対して対称であるので、その対称性がハドロンのスペクトルにも反映されていることが予想される。(ハミルトニアンがユニタリー変換の元で不変であるならばユニタリー変換の属する群の規約表現のあいだでエネルギー固有値は縮退する。) 現実のハドロンスペクトルでは $SU(2)_V$ (アイソスピン対称性) についてみると例えば

$$\begin{aligned} I = 1 :&\ \ m_{\pi^\pm} = 140\ \text{MeV},\ \ m_{\pi^0} = 135\ \text{MeV} \\ I = 0 :&\ \ m_p = 938\ \text{MeV},\ \ m_n = 939\ \text{MeV} \end{aligned}$$

となり近似的に縮退していることがわかる。軸性変換 (パリティに関する対称性) に対しては

$$\begin{aligned} I = 1, J^P = 1^+ :&\ \ m_{a1} = 1260\ \text{MeV} \\ I = 1, J^P = 1^- :&\ \ m_\rho = 770\ \text{MeV} \end{aligned}$$

となり正負のパリティで縮退が現れていない。このようにハドロンのスペクトラムは $SU(2)_V$ 対称性を反映しているが軸性変換に対する対称性は反映していないことがわかる。このことは軸性変換に関して真空の持つ対称性が破れている事を意味している。場の理論において粒子 (場の励起状態) は真空を一点に定

めその上で定義しているので真空が対称性を破るのであれば、その上で構成されるハドロンのスペクトラムも対称性を満足するような構造を持たないのである。ハミルトニアンの持つ対称性 $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ は真空では一部失われ $SU(2)_V$ となっていると結論される。これを称してカイラル対称性の自発的破れと呼ぶ。このことは「表記的」に以下のように表す事ができる。

$$\hat{U}_V|0>=|0>,\ \ Q_V^a|0>=|0> \tag{3.3}$$
$$\hat{U}_A|0>\neq|0>,\ \ Q_A^a|0>\neq|0> \tag{3.4}$$

この表式は真空が無限に縮退しており真空に対する軸性変換によってその間を移り変われることを意味する。その無限に縮退した真空の中から一点を選ぶ事によって物理状態からハミルトニアンの持つ対称性の一部が失われるのである。

次に Q_A^a 電荷を持つような (カイラリティを保存しないような) 非自明な真空でゼロでないクォーク凝縮 $\langle 0|\bar{q}q|0\rangle \equiv <\bar{q}q>$ を持つ事を見る。まず準備として

$$\text{保存則} : \partial_\mu j^\mu = 0 \tag{3.5}$$
$$\text{保存電荷} : C_V(t) \equiv \int_V d^3x\rho(x,t),\ \ C^\dagger = C \tag{3.6}$$
$$\text{対称性} : [C,H]=0,\ \ \partial_t C = 0 \tag{3.7}$$

とする。対称性が自発的に破れているならば

$$C\,|0\rangle \neq |0\rangle \tag{3.8}$$

が成り立っている。ここで問題なのは式 (3.8) を満たす電荷は well-defined なものではないという事である。

$$\begin{aligned}|C(0)\,|0\rangle\,|^2 &= \langle 0\,|\,C(0)^\dagger C(0)\,|\,0\rangle \\ &= \int d^3x\,\langle 0\,|\,\rho(x,0)^\dagger C(0)\,|\,0\rangle \\ &= \int d^3x\,\langle 0\,|\,\rho(0,0)^\dagger C(0)\,|\,0\rangle \\ &\propto V\end{aligned} \tag{3.9}$$

V は空間体積であり $V\to\infty$ で発散してしまう。第 2 式から第 3 式へ移る際に真空の推進不変性を用いた。つまり C はカイラル対称性が自発的に破れているとき $V\to\infty$ で発散してしまうので well-defined ではない。では well-defined にするためにはどうしたら良いだろうか？電荷を以下のように定義し直す。

$$\begin{aligned}S_t(x) &= \lim_{V\to\infty}[C_V(t),P(x)] \\ &= \lim_{V\to\infty}\int_V d^3x'[\rho(x',t),P(x)]\end{aligned} \tag{3.10}$$

とすると保存則より

$$\frac{dS_t}{dt}=0 \tag{3.11}$$

がいえる。このように定義しなおすと $S_t(x)$ が well-defined になるのは因果律と関係がある。因果律とは光速を超えて情報が伝わる事がない事を意味している。このことは演算子の交換関係で表現することができる。時空点 x^μ での演算子を $A(x)$, 時空点 y^μ での演算子を $B(y)$ とする。演算子 $A(x),B(y)$ は, それ

らの時空点が $(x-y)^2 < 0$(space-like) の関係にあるとき, 光速を超えた情報の伝搬を意味するので因果関係を持つ事ができない。つまり時空点 x で起こった事と時空点 y で起こった事は互いに影響を及ぼす事がない。すなわち

$$[A(x), B(y)] = 0, \ \ (x-y)^2 < 0 \tag{3.12}$$

が成り立つ。このことから光円錐の内側 $(x-y)^2 > 0$ (time-like) でしか値を持たないので $V \to \infty$ の時、必ず $(x-y)^2 = 0$ (light-like) を満たす時空点で bound が存在しその bound の外では交換関係は 0 となるため発散が起こらず well-defined に定義できるのである。そのような well-defined な電荷

$$S_t(x) = \lim_{V\to\infty} \int_V d^3x' [\rho(x', t), P(x)] \tag{3.13}$$

を order parameter field と呼ぶ。ここで H_Ω の基底状態を $|\Omega\rangle$ とし真空期待値をとると

$$\begin{aligned}\langle\Omega\,|\,S_t(x)\,|\,\Omega\rangle &= \lim_{V\to\infty} \int_V d^3x' \,\langle\Omega\,|\,[\rho(x', t), P(x)]\,|\,\Omega\rangle \\ &= \lim_{V\to\infty} \langle\Omega\,|\,[C_V(t), P(x)]\,|\,\Omega\rangle \end{aligned}\tag{3.14}$$

となる。これを order parameter と呼ぶ。

カイラル対称性が自発的に破れていない「自明な真空」では $[H_\Omega, C_\Omega] = 0$ であるとき $|\Omega\rangle$ は C_V の固有状態でもあることから

$$\langle\Omega\,|\,S_t(x)\,|\,\Omega\rangle = 0 \tag{3.15}$$

が成り立つ。他方でカイラル対称性が破れている「非自明な真空」ではハミルトニアンは対称性を持っているため依然 $[H_\Omega, C_V] = 0$ が成り立つ。しかし真空は対称性が自発的に破れた非自明な真空 $|\Omega'\rangle$ であるので、もはや H_Ω の固有状態でないし C_V の固有状態でもない。真空は C_V によるユニタリ変換によって別の真空に移り変わる事ができる。よって

$$\langle\Omega'\,|\,S_t(x)\,|\,\Omega'\rangle \neq 0 \tag{3.16}$$

が可能になる。これが対称性の自発的破れの定義である。

ここで実際に order parameter を計算しカイラル対称性が自発的に破れているとき $< \bar{q}q > \neq 0$ となる事を示す。

$$C_V = Q_A^{a=1,2,3} = \int_V d^3x q^\dagger i\gamma^5 \frac{\tau^a}{2} q \tag{3.17}$$

$$P^a(x) = \bar{q} i\gamma^5 \tau^a q \tag{3.18}$$

とおくと

$$[Q_A^a(t), P^b(x)] = -i\delta^{ab}\bar{q}q \tag{3.19}$$

が成り立つ。よって

$$< \bar{q}q > \neq 0 \tag{3.20}$$

となりカイラル対称性が自発的に破れた真空ではクォーク凝縮がゼロでない値を持つ。

3.2 Nambu-Goldstone の定理

カイラル対称性が自発的に破れているとき破れた生成子の数 Q_A^a の数 ($SU(2)$ の時には 3 個) に応じて masless の粒子の存在が示唆されることを証明する。カイラル対称性の自発的破れが起きていると仮定すると $\langle\Omega\,|\,S_t(x)\,|\,\Omega\rangle \neq 0$ であり、その時間微分はゼロになることを利用する。まず完全系を挟み込み時間推進不変性を用いると

$$\begin{aligned}\langle\Omega\,|\,S_t(x)\,|\,\Omega\rangle &= \lim_{V\to\infty}\sum_n\left[\left\langle\Omega\,\middle|\,e^{iHt}C_V(0)e^{-iHt}\,\middle|\,n\right\rangle\langle n\,|\,P(x)\,|\,\Omega\rangle - \langle\Omega\,|\,P(x)\,|\,n\rangle\left\langle n\,\middle|\,e^{iHt}C_V(0)e^{-iHt}\,\middle|\,\Omega\right\rangle\right]\\ &= \lim_{V\to\infty}\sum_n\left[\langle\Omega\,|\,C_V(0)\,|\,n\rangle\langle n\,|\,P(x)\,|\,\Omega\rangle e^{-iE_nt} - \langle\Omega\,|\,P(x)\,|\,n\rangle\langle n\,|\,C_V(0)\,|\,\Omega\rangle e^{+iE_nt}\right]\end{aligned} \tag{3.21}$$

となる。次に時間微分をとると

$$0 = \lim_{V\to\infty}\sum_n E_n\left[\langle\Omega\,|\,C_V(0)\,|\,n\rangle\langle n\,|\,P(x)\,|\,\Omega\rangle e^{-iE_nt} + \langle\Omega\,|\,P(x)\,|\,n\rangle\langle n\,|\,C_V(0)\,|\,\Omega\rangle e^{+iE_nt}\right] \tag{3.22}$$

が任意の t で成立する。式 (3.22) において E_n がゼロである時

$$\langle\Omega\,|\,C_\Omega(0)\,|\,n\rangle\langle n\,|\,P(x)\,|\,\Omega\rangle \neq 0 \tag{3.23}$$

である事が結論される。従って、$\langle\Omega\,|\,S_t(x)\,|\,\Omega\rangle$ がゼロでないのは $E_n = 0$ であるような中間状態が存在する時に限られる。この中間状態を Nambu-Goldstone ボソンと呼ぶ。そして Nambu-Goldstone ボソンは自発的に破れた対称性の数 a に対応して存在し $SU(2)$ の場合は NG ボソンは三種類のパイオン $(\pi^0, \pi^\pm)$ であると考えられる。現実のパイオンが 0 でない値を持つのはカレントクォーク質量が実際には 0 でない値を持つ事に起因する。つまり現実ではカレントクォーク質量がゼロでない値を持つためにハミルトニアンの持つ対称性が僅かに破れているのでパイオンが 0 でない質量を持つのである。この事は次のように示される。

3.3 Gell-Mann-Oakes-Renner 関係式

カレントクォーク質量が有限の時、その質量を $\hat{m} \equiv (m_u + m_d)/2$ とする。変換に対応するネーターカレントは

$$\partial_\mu V_a^\mu = i\bar{q}\Big[M, \frac{\lambda^a}{2}\Big]q \tag{3.24}$$

$$\partial_\mu A_a^\mu = i\bar{q}\gamma^5\Big\{M, \frac{\lambda^a}{2}\Big\}q \tag{3.25}$$

$$M = \begin{pmatrix} \hat{m} & 0 \\ 0 & \hat{m} \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

で与えられる。ベクトルカレントは $SU(2)_V$ 対称性を仮定している時、質量行列は単位行列に比例するので右辺はゼロになり保存する。軸性カレントは質量が 0 でない限り必ず質量に比例する項が残るので保存しない。この関係は PCAC(Partially-Conserved-Axial vector-Current) と呼ばれている。その意味は $\hat{m}$ が考えているエネルギースケールよりも小さいと見ることができるならば軸性ベクトルカレントが完全に保存しないまでも「部分的」には保存するだろうということである。

パイオンが軸性ベクトルになって崩壊する過程を考える。アイソスピン対称性、真空の時空並進対称性、相対論的不変性から

$$\left\langle 0 \,\middle|\, A^a_\mu(x) \,\middle|\, \pi^b(p) \right\rangle = i f_\pi(p^2) p_\mu e^{-ipx} \delta^{ab} \tag{3.27}$$

と考えられる。$|\pi^b(p)\rangle$ はパイオンの状態を表す。比例定数 f_π はパイオン崩壊定数であり実験値は $f_\pi = 92.4MeV$ である。式 (3.25) を

$$\partial_\mu A^\mu_a = \hat{m} i \bar{q} \gamma^5 \tau_a q = \hat{m} P_a(x) \tag{3.28}$$

と書き直す。

$$\begin{aligned} \left\langle 0 \,\middle|\, \partial^\mu A^a_\mu(x) \,\middle|\, \pi^b(p) \right\rangle &= f_\pi m_\pi^2 e^{-ipx} \delta^{ab} \\ &= \hat{m} < 0|P^a(x)|\pi^b(p) > \\ &= \hat{m} e^{-ipx} \delta^{ab} G \end{aligned} \tag{3.29}$$

G は結合定数である。式 (3.29) より

$$f_\pi m_\pi^2 = \hat{m} G \tag{3.30}$$

が成り立つ。$V \to \infty$ とした後に $m \to 0$ とする Bogoliubov limit において完全系を挟み込むと

$$-i\delta^{ab} \langle 0 \,|\, \bar{q}q \,|\, 0 \rangle = \sum_c \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \left[\langle 0 \,|\, Q^a_A \,|\, \pi^c(p) \rangle \left\langle \pi^c(p) \,\middle|\, P^b(x) \,\middle|\, 0 \right\rangle - \left\langle 0 \,\middle|\, P^b(x) \,\middle|\, \pi^c(p) \right\rangle \langle \pi^c(p) \,|\, Q^a_A \,|\, 0 \rangle \right] \tag{3.31}$$

となる。

$$\langle 0 \,|\, Q^a_A \,|\, \pi^c(p) \rangle = i f_\pi p_{\mu=0} \delta^{ac} \int d^3x e^{-ipx} = i f_\pi p_{\mu=0} \delta^{ac} (2\pi)^3 \delta^3(p) \tag{3.32}$$

$$\left\langle \pi^c(p) \,\middle|\, P^b(x) \,\middle|\, 0 \right\rangle = e^{ipx} \delta^{cb} G \tag{3.33}$$

を用いると式 (3.31) 右辺は

$$\sum_c \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} i f_\pi p_{\mu=0} \delta^{ac} (2\pi)^3 \delta^3(p) \delta^{cb} G \left[e^{ipx} + e^{-ipx} \right] = i f_\pi \delta^{ab} G \tag{3.34}$$

となる。以上より Glashow-Weinberg relation

$$\langle 0 \,|\, \bar{q}q \,|\, 0 \rangle |_{m\to 0} = -f_\pi G|_{m\to 0} \tag{3.35}$$

が得られる。もし $\langle 0 \,|\, \bar{q}q \,|\, 0 \rangle |_{m\to 0} \neq 0$ であるならば $f_\pi|_{m\to 0} \neq 0$ かつ $G|_{m\to 0} \neq 0$ が成り立つ。よって

$$G|_{m\to 0} = -\frac{\langle 0 \,|\, \bar{q}q \,|\, 0 \rangle}{f_\pi}|_{m\to 0} \tag{3.36}$$

と書く事ができる。

$$m_\pi^2 = \hat{m} \frac{G}{f_\pi} \tag{3.37}$$

で $m \to 0$ とすると

$$m_\pi^2 = -\hat{m} \frac{\langle 0 \,|\, \bar{q}q \,|\, 0 \rangle}{f_\pi^2}|_{m\to 0} + \mathcal{O}(\hat{m}^2) \tag{3.38}$$

これを Gell-Mann-Oakes-Renner 関係式と呼びクォーク凝縮と観測量であるハドロンの質量と関係づけることのできる点で有益な式である。

第 4 章

カイラル摂動論

カイラル摂動論はカイラル対称性が自発的に破れた世界を記述する QCD の低エネルギー有効理論である。カイラル対称性の自発的破れの帰結として生じる Nambu-Goldstone ボソンなどのハドロンの動力学を記述する。低エネルギーの QCD ではカラーの閉じ込めから漸近状態はハドロンとして存在するのでクォーク、グルーオンの代わりにハドロンを基本自由度として低エネルギー有効理論を構成するのである。この章ではメソンとメソン-バリオンに対する有効ラグランジアンを構成する。カイラル摂動論は第５章で K^+ 中間子-核子散乱を計算する際に用いる。ここでの議論は [5, 6, 18] を参考にした。

4.1 Nambu-Goldstone 場の変換則

この節では NG ボソンを記述する場の変数がどのような変換を受けるか考察する。まず一般的な群の変換について議論し後にこれを QCD の場合に応用する。

4.1.1 一般の考察

いまコンパクトなリー群 G による変換のもとで不変であるようなラグランジアンで記述される系を考える。真空は G の部分群 H による変換においてのみ不変であるとする。NG ボソン場は独立な場の変数 ϕ_i であらわされるミンコフスキー空間 M^4 上の関数である。NG ボソン場は $\Phi = (\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n)^t$ のように R^n のベクトルとしてまとめて書かれる。集合 M_1 を NG ボソン場の集合とすると

$$M_1 \equiv \{\Phi : M^4 \to R^n | \phi_i : M^4 \to R\} \tag{4.1}$$

のようにあらわされる。

ここでの目的は $(g, \Phi) \in G \times M_1$ の任意のペアに対して元 $\varphi(g, \Phi) \in M_1$ を与えるような写像 φ を見つける事である。この写像 φ は以下の 2 つの条件を満たすとする。

$$\varphi(e, \Phi) = \Phi, \ \ ^\forall\Phi \in M_1 \tag{4.2}$$

$$\varphi(g_1, \varphi(g_2, \Phi)) = \varphi(g_1 g_2, \Phi), \ \ g_1, g_2 \in G, \ \ ^\forall\Phi \in M_1 \tag{4.3}$$

これは群 G が集合 M_1 上に働くことを意味している。つまり群 G は M_1 上に作用し M_1 上の「点」をまた別の M_1 上の「点」に移す。写像 φ は一般的に群 G の表現ではない。なぜなら写像が線形であるという仮定 $\varphi(g, \lambda\Phi) \neq \lambda\varphi(g, \Phi)$ はおいていないからである。

$\Phi = 0$ を集合 M_1 の原点 (origin) であるとする。NG ボソン場のみを含む場合、$\Phi = 0$ は真空の配位に

対応する。真空は部分群 H のもとで不変であるから $^\forall h \in H$ に対して

$$\varphi(h, \Phi = 0) = 0 \tag{4.4}$$

となる。つまり、$\Phi = 0$ は $h \in H$ による変換によって自分自身に戻る。

次に群 G を剰余類で類別する。いま群 G の部分群として H が与えられているので左剰余類は $\{gH | g \in G\}$ は満たす集合として定義される。この集合は G/H ともかかれる。G/H の元の 1 つは $\{gh | h \in H\}$ であらわせる。すると群 G は

$$\begin{aligned} &G = eH + aH + bH + \cdots \\ &a, b, \cdots \in G \end{aligned} \tag{4.5}$$

のように類別できる。ここで $+$ は単純な代数的の和の意味ではなく共通点のない和集合となっていることを示している。

商空間 G/H を考えた時、写像 φ について重要な 2 つの性質が示される。

1. 剰余類 gH の全ての元に対して原点 $\Phi = 0$ は同じベクトル空間 R^n 上に写像される

$$\varphi(gh, 0) = \varphi(g, \varphi(h, 0)) = \varphi(g, 0), \ \ ^\forall g \in G, \ \ h \in H \tag{4.6}$$

   $\varphi(g, 0)$ という関数は G/H 上であらわさる。また関数 $\varphi(g, 0)$ は G/H の元を NG ボソンの集合に写像する。

2. G/H の元に関して写像 φ は単射である。
   $g, \ \ g' \in G, \ \ g' \notin gH$ のとき $\varphi(g, 0) = \varphi(g', 0)$ と仮定する。

$$0 = \varphi(e, 0) = \varphi(g^{-1}g, 0) = \varphi(g^{-1}, \varphi(g, 0)) = \varphi(g^{-1}, \varphi(g', 0)) = \varphi(g^{-1}g', 0) \tag{4.7}$$

   しかしこのことは $g^{-1}g' \in H$ あるいは $g' \in gH$ を意味するので $g' \notin gH$ に反する。よって $\varphi(g, 0) \neq \varphi(g', 0)$ (単射) である。単射なので写像があれば逆写像も存在する。

以上より G/H と NG ボソン場 Φ の間に同型写像が存在することがわかる。つまり異なる gH に対して異なる Φ が 1 対 1 対応しているので G/H は gh を関数とした Φ でパラメトライズされる。NG ボソン場は定数の R^n 上のベクトルではなくミンコフスキー空間上の時空に依存する変数なので gH は実際には時空 x に依存する。

NG ボソン場の変換則を議論する。$g \in G$ の時、ある Φ に対応する剰余類を $\tilde{f} = \tilde{g}h \in gH$ とあらわすと

$$\Phi = \varphi(f, 0) = \varphi(\tilde{g}h, 0) \tag{4.8}$$

となる。この NG ボソン場の写像は

$$\begin{aligned} &\varphi(g, \Phi) = \varphi(g, \varphi(\tilde{g}h, 0)) = \varphi(g\tilde{g}h, 0) = \varphi(f', 0) = \Phi' \\ &f' \in g(\tilde{g}H) \end{aligned} \tag{4.9}$$

となる。Φ から変換された Φ' を求めたければ Φ に対応する $\tilde{g}H$ に左から g を作用させれば良い。

$$\begin{array}{ccc} \Phi & \stackrel{g}{\rightarrow} & \Phi' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{g}H & \stackrel{g}{\rightarrow} & g(\tilde{g}H) \end{array}$$

4.1.2　QCD への応用

QCD の場合、ラグランジアン (ハミルトニアン) を不変にする群 G と真空を不変にする部分群 H は

$$G = SU(N_f) \otimes SU(N_f) = \{(L,R)|L \in SU(N_f),\ \ R \in SU(N_f)\} \tag{4.10}$$

$$H = SU(N_f) = \{(V,V)|V \in SU(N_f)\} \tag{4.11}$$

である。代表元を $\tilde{g} = (\tilde{L},\tilde{R}) \in G$ とする。この代表元を $SU(N_f)$ 行列を通して定義する。慣習として

$$\tilde{U} = \tilde{R}\tilde{L}^\dagger \in G \tag{4.12}$$
$$\tilde{g}H = (1, \tilde{R}\tilde{L}^\dagger)H \tag{4.13}$$

のように 1 番目の変数が単位行列になるように定義する。代表元 U の $g = (L,R) \in G$ による変換は

$$g(\tilde{g}H) = (L,R)(1,\tilde{R}\tilde{L}^\dagger) = (L, R\tilde{R}\tilde{L}^\dagger)H = (1, R\tilde{R}\tilde{L}^\dagger L^\dagger)(L,L)H = (1, R\tilde{R}\tilde{L}^\dagger L^\dagger)H \tag{4.14}$$

となる。よって U は

$$U = \tilde{R}\tilde{L}^\dagger \mapsto U' = R\tilde{R}\tilde{L}^\dagger L^\dagger = RUL^\dagger \tag{4.15}$$

のように変換する。前節で述べたように代表元は時空 x に依存する。従って

$$U(x) \mapsto U(x)' = RU(x)L^\dagger \tag{4.16}$$

である。低エネルギー QCD では $N_f = 2,\ \ N_f = 3$ の場合が考えられる。NG ボソン場の集合 M_1 は
N_f=2:

$$M_1 = \{\Phi : M^4 \to R^3 | \phi_i : M^4 \to R\} \tag{4.17}$$

N_f=3:

$$M_1 = \{\Phi : M^4 \to R^8 | \phi_i : M^4 \to R\} \tag{4.18}$$

とあらわせる。エルミートかつトレースが 0 であるような $N \times N$ 複素行列を導入する。

$$\mathcal{A}(N) \equiv \{A \in gl(N,C)|A^\dagger = A,\ \ TrA = 0\} \tag{4.19}$$

この集合は和の演算について閉じているのでベクトル空間を成す。次に

$$M_2 \equiv \{\phi : M^4 \to \mathcal{A}(N)|\phi\} \tag{4.20}$$

を定義する。M_1 と M_2 はパウリ行列 τ_i, ゲルマン行列 λ_a を通して次のようにつながる。
N_f=2:

$$\phi = \sum_{i=1}^{3} \frac{\phi_i \tau_i}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} & \pi^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

N_f=3:

$$\phi = \sum_{a=1}^{8} \frac{\phi_a \lambda_a}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2\eta}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \tag{4.22}$$

そして

$$M_3 \equiv \left\{ U : M^4 \to SU(N_f) | U = \exp\left(i\frac{\sqrt{2}\phi}{F_0} \right),\ \ \phi \in M_2 \right\} \tag{4.23}$$

と定義する。ここで F_0 は exp の引数を無次元にするために付与されている。NG ボソン場はエネルギーの次元をもっているのでエネルギー次元を持つ F_0 で割っている。これはカイラル摂動論の最低次ではパイオン崩壊定数に対応する。U の和は再び $SU(N_f)$ の元にはならないので M_3 はベクトル空間をなさない。

最後に $SU(N_f) \otimes SU(N_f)$ が M_3 上に作用するときのことを議論する。準同型写像

$$\varphi : G \times M_3 \to M_3,\ \ \varphi[(L,R),U] \equiv RUL^\dagger \tag{4.24}$$

が G の M_3 上への働きを意味している。このことは以下のように確かめられる。

1. $U \in\ M_3,\ \ R, L^\dagger \in SU(N_f)$ なので $RUL^\dagger \in M_3$

2. $\phi[(1,1),U] = 1U1 = U$

3. $g_i = (L_i, R_i) \in G$ から $g_1 g_2 = (L_1L_2, R_1R_2)$ であるとする。

$$\varphi[g_1, \varphi[g_2, U]] = \varphi[g_1, R_2UL_2^\dagger] = R_1R_2UL_2^\dagger L_1^\dagger \tag{4.25}$$

$$\varphi[g_1g_2, U] = R_1R_2UL(L_1L_2)^\dagger = R_1R_2UL_2^\dagger L_1^\dagger \tag{4.26}$$

よって

$$\varphi[g_1, \varphi[g_2, U]] = \varphi[g_1g_2, U] \tag{4.27}$$

である。

ここでベクトル変換、軸性変換について真空はどのように変換するか確かめる。$\phi = 0$ つまり $U_0 = 1$ は系の真空をあらわす。ベクトル変換 $H = \{(V,V)|V \in SU(N_f)\}$ は QCD において左巻きのクォークと右巻きのクォークを同じアングルで回転させる変換である。その場合、U_0 は

$$\phi[g = (V,V), U_0] = VU_0V^\dagger = U_0 \tag{4.28}$$

となるので真空は不変である。他方で軸性変換は QCD において左巻きクォークと右巻きクォークを逆のアングルで回転させる変換である。従って真空は軸性変換のもとで

$$\phi[g = (A^\dagger, A), U_0] = A^\dagger U_0 A^\dagger = A^\dagger A^\dagger \neq U_0 \tag{4.29}$$

のようになり不変ではない。これは仮定したカイラル対称性の自発的破れと一致する。一般的に真空を不変にする部分群のもとで NG 場の変換は線形変換になり、真空を不変にしない軸性変換のもとでは NG 場は非線形的に変換する。これををカイラル対称性の非線形表現と呼ぶ。

4.2　メソンに対するカイラル摂動論

カイラル摂動論では行列 $U(\phi)$ を含む最も一般的なラグランジアンをカイラル対称性を指針として構築する。ラグランジアンが厳密に $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ 対称性を持っている時、NG ボソンの質量は 0 である

ので NG ボソンの 4 元運動量は $p^\mu = (|\boldsymbol{p}|, \boldsymbol{p})$ で与えられる。よって空間運動量がカイラル対称性の破れのスケール $4\pi F_\pi \sim 1170MeV$ よりも十分小さいと見なせるときは p^μ による摂動展開は良い近似になっている。ラグランジアンの $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ 対称性が厳密ではない時、つまりクォークの質量が 0 ではなくカイラル対称性があらわに破れているとき、NG ボソンに質量を持たせる事ができる。そのときの 4 元運動量は $p^\mu = (\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m_{NG}^2},\ \boldsymbol{p})$ と書かれる。この場合も m_{NG} が小さく $\boldsymbol{p}$ も小さければ p^μ も小さいとみなせるのでカイラル極限をとった時と同じように摂動展開が可能である。以上のような条件の下でラグランジアンは増加する NG ボソンの運動量の冪（微分の冪）で展開される。パリティの保存から偶数の冪のみが許されるので有効ラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{eff} = \sum_n \mathcal{L}_{2n} \tag{4.30}$$

のように書かれる。ユニタリー性 $U^\dagger U = 1$ から自明でない相互作用を生み出すためには最低限 2 つの微分が必要である。さもなければ $Tr(U^\dagger U) = 3$ などと定数になってしまう。従って最低次ではカイラル不変であるような最も一般的なラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{F_0^2}{4} Tr(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger) \tag{4.31}$$

で与えられる。

$SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ 変換は

$$\begin{aligned} U &\to RUL^\dagger && (4.32)\\ \partial_\mu U &\to R\partial_\mu U L^\dagger && (4.33)\\ U^\dagger &\to LU^\dagger R^\dagger && (4.34)\\ \partial_\mu U &\to L\partial_\mu U^\dagger R^\dagger && (4.35) \end{aligned}$$

で与えられるので

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff} &\to \frac{F_0^2}{4} Tr(R\partial_\mu U L^\dagger L \partial^\mu U^\dagger R^\dagger) \\ &= \frac{F_0^2}{4} Tr(RR^\dagger \partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger) \\ &= \mathcal{L}_{eff} \end{aligned} \tag{4.36}$$

となり有効ラグランジアンはたしかにカイラル不変である。係数 $F_0^2/4$ はスカラー場の運動項 $\frac{1}{2}\partial_\mu \phi_a \partial^\mu \phi_a$ の規格化 1/2 を与えるように付与されている。

$$U = 1 + i\frac{\sqrt{2}}{F_0}\phi - \frac{1}{F_0^2}\phi^2 + \cdots \tag{4.37}$$

$$\partial_\mu U = i\frac{\sqrt{2}}{F_0}\partial_\mu \phi - \frac{2}{F_0^2}\phi\partial_\mu\phi + \cdots \tag{4.38}$$

これを (3) 式に代入すると

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{eff} &= \frac{F_0^2}{4} Tr[(i\frac{\sqrt{2}}{F_0}\partial_\mu\phi)(-i\frac{\sqrt{2}}{F_0}\partial^\mu\phi)] + \cdots \\
&= \frac{1}{2} Tr[(\partial_\mu \frac{\phi_a\lambda_a}{\sqrt{2}})(\partial^\mu \frac{\phi_b\lambda_b}{\sqrt{2}})] + \cdots \\
&= \frac{1}{4}\partial_\mu\phi_a\partial^\mu\phi_b Tr[\lambda_a\lambda_b] + \cdots \\
&\equiv \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_a\partial^\mu\phi_a + \mathcal{L}_{int}
\end{aligned} \tag{4.39}
$$

となり 8 種類の NG 場の運動項が再現される。この有効ラグランジアンは NG ボソン同士の相互作用を記述する。

4.3　外場の導入

電磁相互作用、弱い相互作用、クォーク質量によるカイラル対称性のあらわな破れの効果を取り入れるためにクォーク質量 0 の QCD ラグランジアンを拡張し外場（古典場）との相互作用を導入する。この拡張した QCD ラグランジアンを

$$
\mathcal{L}_{QCD}^{ext} = \mathcal{L}_{QCD}^{0} + \mathcal{L}_{ext} \tag{4.40}
$$

とすると

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{QCD}^{ext} &= \bar{q}\gamma^\mu(v_\mu + \gamma_5 a_\mu)q - \bar{q}(S - i\gamma_5 P)q \\
&= \bar{q}_L\gamma^\mu(v_\mu - a_\mu)q_L + \bar{q}_R\gamma^\mu(v_\mu + a_\mu)q_R - \bar{q}_R(S + iP)q_L - \bar{q}_L(S - iP)q_R \\
&= \bar{q}_L\gamma^\mu l_\mu q_L + \bar{q}_R\gamma^\mu r_\mu q_R - \bar{q}_R(S + iP)q_L - \bar{q}_L(S - iP)q_R
\end{aligned} \tag{4.41}
$$

のように書ける。ここで v_μ, a_μ, S, P はそれぞれベクトルカレント、軸性ベクトルカレント、スカラー場、擬スカラー場である。また

$$
l_\mu = v_\mu - a_\mu,\ \ r_\mu = v_\mu + a_\mu \tag{4.42}
$$

と定義した。式 (4.41) はローカルな $SU(3)_L \times SU(3)_R$ 変換

$$
q_L \to V_L(x)q_L,\ \ q_R \to V_R(x)q_R \tag{4.43}
$$

のように変換する時

$$
S + iP \to V_R(S + iP)V_L^\dagger \tag{4.44}
$$

$$
l_\mu \to V_L l_\mu V_L^\dagger + iV_L\partial_\mu V_L^\dagger \tag{4.45}
$$

$$
r_\mu \to V_R r_\mu V_R^\dagger + iV_R\partial_\mu V_R^\dagger \tag{4.46}
$$

のように変換すると不変になる。もとのラグランジアン $\mathcal{L}_{QCD}^{ext} = \mathcal{L}_{QCD}^{0} + \mathcal{L}_{ext}$ に対応する有効ラグランジアンを作るためにはローカルな $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ 対称性を満たすようにつくってやれば良い。

$$
U(x) \to U'(x) = V_R(x)U(x)V_L^\dagger(x) \tag{4.47}
$$

のように変換する時、有効ラグランジアンを不変にするためには共変微分

$$
D_\mu U = \partial_\mu U - ir_\mu U + iUl_\mu \tag{4.48}
$$

を導入する。

$$\begin{aligned}
D_\mu U &\to \partial_\mu(V_R U V_L^\dagger) - i(V_R r_\mu V_R^\dagger + iV_R\partial_\mu V_R^\dagger)V_R U V_L^\dagger + iV_R U V_L^\dagger(V_L l_\mu V_L^\dagger + iV_L\partial_\mu V_L^\dagger) \\
&= (\partial_\mu V_R)UV_L^\dagger + V_R(\partial_\mu U)V_L^\dagger + V_R U(\partial_\mu V_L^\dagger) \\
&\quad -iV_R r_\mu U V_L^\dagger + \underbrace{V_R(\partial_\mu V_R^\dagger)V_R U V_L^\dagger}_{-(\partial_\mu V_R)UV_L^\dagger} + iV_R U l_\mu V_L L^\dagger - V_R U(\partial_\mu V_L^\dagger) \\
&= V_R(\partial_\mu U + iUl_\mu - ir_\mu U)V_L^\dagger = V_R(D_\mu U)V_L^\dagger
\end{aligned} \tag{4.49}$$

となり確かに共変である。

外場 r_μ,l_μ に対応する場の強さのテンソル (field strength tensor) を

$$F_{R\mu\nu} = \partial_\mu r_\nu - \partial_\nu r_\mu - i[r_\mu, r_\nu] \tag{4.50}$$

$$F_{L\mu\nu} = \partial_\mu l_\nu - \partial_\nu l_\mu - i[l_\mu, l_\nu] \tag{4.51}$$

として導入する。また

$$\chi = 2B_0(S + iP) \tag{4.52}$$

$$3F_0^2 B_0 = - < \bar{q}q > \tag{4.53}$$

を定義する。これらは

$$F_{R\mu\nu} \to V_R F_{R\mu\nu} V_R^\dagger,\ \ F_{L\mu\nu} \to V_L F_{L\mu\nu} V_L^\dagger \tag{4.54}$$

$$\chi \to V_R \chi V_L^\dagger \tag{4.55}$$

のように変換する。

このとき NG ボソンの運動量の次数の数え方は以下の通りになる。

$$U = \mathcal{O}(q^0) \tag{4.56}$$

$$D_\mu U = \mathcal{O}(q^1) \tag{4.57}$$

$$r_\mu, l_\mu = \mathcal{O}(q^1) \tag{4.58}$$

$$F_{L\mu\nu}, F_{R\mu\nu} = \mathcal{O}(q^2) \tag{4.59}$$

$$\chi = \mathcal{O}(q^2) \tag{4.60}$$

これらの式を building block として有効ラグランジアン構成することができる。$\mathcal{O}(q^2)$ の有効ラグランジアンは

$$\mathcal{L}_2 = \frac{F_0^2}{4}Tr[D_\mu U(D_\mu U)^\dagger] + \frac{F_0^2}{4}Tr[\chi U^\dagger + U\chi^\dagger] \tag{4.61}$$

で与えられる。$\mathcal{O}(q^{2n})$ の場合も同様にして building block を組み合わせて有効ラグランジアンを構築する。

ここで導入した外場を用いれば NG ボソン同士の相互作用に限らず対称性のあらわな破れ、光子場との結合による影響などを取り入れる事ができる。特にクォーク質量による、あらわなカイラル対称性の破れは外場として

$$\text{クォーク質量} : S = M = diag(m_u, m_d, m_s) \tag{4.62}$$

$$v_\mu = a_\mu = P = 0 \tag{4.63}$$

のように導入すれば良い。このように外場を導入すると有効ラグランジアンと元の QCD ラグランジアンが同じようにカイラル対称性を破るようになる。

4.4 メソン-バリオンに対するカイラル摂動論

この節の目的はメソンとバリオンの相互作用を記述する最も一般的な有効ラグランジアンを構成することである。まず外場を導入した場合と同様に物質場としてバリオン場を導入し変換則を指定する。そして、バリオン場と NG ボソン場を用いて、変換のもとでの対称性を指導原理として有効ラグランジアンを構成する。

$SU(2)$ のバリオン場は核子場であるのでアイソスピン 2 重項（基本表現）として導入する。

$$\Psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \tag{4.64}$$

$SU(3)$ の場合、バリオン場として $(1/2)^+$ バリオン 8 重項（随伴表現) を導入する。

$$B = \sum_{a=1}^{8} \frac{B_a \lambda_a}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\frac{2\Lambda}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \tag{4.65}$$

$SU(2)$,$SU(3)$ のバリオン場のそれぞれの成分は 4 成分波動関数である。

4.4.1 場の変換則

簡単のために、まず群 G について $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ の場合を考え、後に $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ の場合へ拡張する。$N_f = 2$ の場合を考えると U は $SU(2)$ の生成子を用いて式 (4.21) のように構成される。この場合 U は $(\pi^0, \pi^\pm)$ のパイオン場をあらわす。4.1 節で U は群 G のもとで $U \mapsto RUL^\dagger$ のように変換する事をみたが、$u^2 = U(x)$ と $K(L, R, U)$ という関数を定義すると変換は

$$u(x) \mapsto u'(x) = \sqrt{RUL^\dagger} \equiv RuK^{-1}(L, R, U) \tag{4.66}$$

$$K(L, R, U) = u'^{-1}(x)Ru = \sqrt{RUL^\dagger}^{-1} R\sqrt{U} \tag{4.67}$$

のようにあらわせる。

次のような準同型写像は群 G の集合 $\{(U, \Psi)\}$ 上への働きをあらわす。

$$\varphi(g) : \begin{pmatrix} U \\ \Psi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} U' \\ \Psi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} RUL^\dagger \\ K(L, R, U)\Psi \end{pmatrix} \tag{4.68}$$

このことは次のように確かめられる。まず G の単位元は集合 $\{(U, \Psi)\}$ 上での恒等写像を引き起こす。次に

$$\begin{aligned} \varphi(g_1 g_2) \begin{pmatrix} U \\ \Psi \end{pmatrix} &= \varphi(g_1) \begin{pmatrix} R_2 U L_2^\dagger \\ K(L_2, R_2, U)\Psi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R_1 R_2 U L_2^\dagger L_1^\dagger \\ K(L_1, R_1, R_2 U L_2^\dagger) K(L_2, R_2, U)\Psi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R_1 R_2 U (L_1 L_2)^\dagger \\ K(L_1 L_2, R_1 R_2, U)\Psi \end{pmatrix} \\ &= \varphi(g_1 g_2) \begin{pmatrix} U \\ \Psi \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.69}$$

より確かに準同型写像になっている。第 2 式から第 3 式に移る際に式 (4.67) より準同型性

$$K(L_1, R_1, R_2UL_2^\dagger)K(L_2, R_2, U) = K(L_1L_2, R_1R_2, U) \tag{4.70}$$

を用いた。よって $SU(2)$ の場合、場の変換則は式 (4.68) によって決められる。

$g = (L, R) \in G$ の変換のもとで Ψ の変換は U に依存している。特に $R = L = V$ の場合を考えると変換は U に依存しなくなる。このことは以下のように示される。

$$U' = VUV^\dagger = Vu^2V^\dagger = VuV^\dagger VuV^\dagger = u'^2 \tag{4.71}$$

より

$$u' = VuV^\dagger \tag{4.72}$$

が成り立つ。式 (4.66) より

$$u'(x) = VuK^{-1}(V, V, U) \tag{4.73}$$

が成り立つので、これと式 (4.72) を比較すると

$$V^\dagger = K^{-1}(V, V, U) \tag{4.74}$$
$$V = K(V, V, U) \tag{4.75}$$

が成り立つ。従って変換は U に依存しなくなり Ψ はアイソスピン 2 重項として変換する。一般的に言うと真空を不変にする部分群のもとでの場の変換は線形変換になるのである。

$G = SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ の場合、バリオン場は随伴表現として導入されているので

$$\varphi(g) : \begin{pmatrix} U \\ B \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} U' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} RUL^\dagger \\ K(L, R, U)BK^\dagger(L, R, U) \end{pmatrix} \tag{4.76}$$

となる。U が $SU(3)$ の生成子から構成されている事を除けば関数の定義は $N_f = 2$ の場合と同じである。この場合も $SU(3)_V$ に制限すれば $B' = VBV^\dagger$ のように B は随伴表現として変換する。

4.4.2　有効ラグランジアンの構成

バリオン場の変換則が決まったので次はローカルな $SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1)_V$ 変換に対して不変なラグランジアンを構成する。式 (4.68) より場の変換は

$$\begin{pmatrix} U(x) \\ \Psi(x) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} V_R(x)U(x)V_L^\dagger(x) \\ \exp[-i\theta(x)]K\left[V_L(x), V_R(x), U(x)\right]\Psi(x) \end{pmatrix} \tag{4.77}$$

で与えられる。$\exp[-i\theta(x)]$ は $\mathrm{U}(1)_V$ 変換に対応する。

$$D_\mu\Psi(x) = [D_\mu\Psi(x)]' = \exp[-i\theta(x)]K\left[V_L(x), V_R(x), U(x)\right][D_\mu\Psi(x)] \tag{4.78}$$

このように変換するように共変微分 D_μ を指定するとローカルな変換のもとで有効ラグランジアンは不変である。このとき K は V_R,V_L だけではなく U にも依存するので chiral connection と呼ばれる量

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{2}\left[u^\dagger(\partial_\mu - ir_\mu)u + u(\partial_\mu - il_\mu)u^\dagger\right] \tag{4.79}$$

を導入し共変微分を

$$D_\mu\Psi = \left(\partial_\mu + \Gamma_\mu - i\nu_\mu^{(s)}\right)\Psi \tag{4.80}$$

と定義する。以下ではこれが成り立つ事を示す。そのためには

$$D'_\mu \Psi' = \left[\partial_\mu + \Gamma'_\mu - i\left(\nu^{(s)}_\mu - \partial_\mu \theta\right)\right] \exp(-i\theta) K \Psi \tag{4.81}$$
$$= \exp(-i\theta) K \left(\partial_\mu + \Gamma_\mu - i\nu^{(s)}_\mu\right) \Psi \tag{4.82}$$

を示せば良い。式 (4.81) において積の微分を行うと

$$\partial_\mu \left[\exp(-i\theta) K \Psi\right] = \left[-i\partial_\mu \theta\right] \exp(-i\theta) K \Psi + \exp(-i\theta) \left[\partial_\mu K\right] \Psi + \exp(-i\theta) K \left[\partial_\mu \Psi\right] \tag{4.83}$$

が得られる。この時、

$$\partial_\mu K = K\Gamma_\mu - \Gamma'_\mu K \tag{4.84}$$

が成り立つので確かに式 (4.82) が成り立つ。式 (4.84) は式 (4.79) とユニタリー行列 V について成り立つ関係,$\partial_\mu V V^\dagger = (\partial_\mu V) V^\dagger = -V\left(\partial_\mu V^\dagger\right)$ に加えて

$$K = u'^\dagger V_R u = u' u'^\dagger u'^\dagger V_R u = u' U'^\dagger V_R u = u' V_L U^\dagger V_R^\dagger V_R u = u' V_L u^\dagger \tag{4.85}$$
$$\Gamma'_\mu = \frac{1}{2}\left[u'^\dagger \left(\partial_\mu - i V_R r_\mu V_R^\dagger + V_R \partial_\mu V_R^\dagger\right) u' + u' \left(\partial_\mu - i V_L l_\mu V_L^\dagger + V_L \partial_\mu V_L^\dagger\right) u'^\dagger\right] \tag{4.86}$$

を用いると示す事ができる。$\mathcal{O}(q)$ の他の building block として chiral vielbein と呼ばれる量がある。

$$u_\mu \equiv i\left[u^\dagger \left(\partial_\mu - i r_\mu\right) u - u \left(\partial_\mu - i l_\mu\right) u^\dagger\right] \tag{4.87}$$

これはパリティ変換のもとで軸性ベクトルとして変換する。

$$u_\mu \mapsto i\left[u \left(\partial^\mu - i l^\mu\right) u^\dagger - u^\dagger \left(\partial^\mu - i r^\mu\right) u\right] = -u^\mu \tag{4.88}$$

ここでパリティ変換のもとでの変換則

$$\phi(t, \vec{x}) \mapsto -\phi(t, -\vec{x}),\ \ U(t, \vec{x}) \mapsto U^\dagger(t, -\vec{x}) \tag{4.89}$$
$$l_\mu \mapsto r_\mu,\ \ r_\mu \mapsto l_\mu \tag{4.90}$$

を用いた。また $SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1)_V$ 変換のもとで

$$u_\mu \mapsto K u_\mu K^\dagger \tag{4.91}$$

と変換する。式 (4.79) と式 (4.87) はそれぞれベクトルカレント、軸性カレントと関係付けられる。

$$V_\mu = -i\Gamma_\mu,\ \ A_\mu = -\frac{u_\mu}{2} \tag{4.92}$$

有効ラグランジアンを構成する building block はバリオンの運動量の次数により分類され、次のように与えられる。

$$\Psi,\ \ \bar{\Psi} = \mathcal{O}(q^0) \tag{4.93}$$
$$u_\mu,\ \ \Gamma_\mu,\ \ (i \not{D} - m)\Psi = \mathcal{O}(q^1) \tag{4.94}$$
$$\chi^\pm = \mathcal{O}(q^2) \tag{4.95}$$

これを用いると最も一般的なカイラル摂動論の最低次の有効ラグランジアン $\mathcal{L}^{(1)}_{\pi N}$ は

$$\mathcal{L}^{(1)}_{\pi N} = \bar{\Psi}\left(i \not{D} - m + \frac{g_A}{2}\gamma^\mu \gamma_5 u_\mu\right)\Psi \tag{4.96}$$

で与えられる。m, g_A は対称性からは決まらない低エネルギー定数であり、それぞれ核子の質量、軸性ベクトル結合定数と同定され値は実験から決められる。ここで注意しなくてはならないのはバリオンの質量項 $m\bar{\Psi}\Psi$ はカイラル極限においても存在する事である。メソンの場合は、カイラル対称性による制限からカレントクォーク質量は 0 であるか、カイラル対称性の破れのスケールより十分小さいと見なせる時しか持つ事ができない。他方でバリオン質量項 $m\bar{\Psi}\Psi$ はそれと異なりカレントクォークの質量が 0 か有限かに関わらず常にカイラル不変である。tree-level ではバリオン質量 m はカイラル極限での質量とし、バリオンのエネルギー E を用いて $(E-m)$ が小さいとして展開する。

$SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ の場合、$N_f = 2$ の場合と同様に building block を組み合わせる事によって、最低次数 (leading order,LO) の有効ラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{MB}^{(1)} = Tr\left[\bar{B}\left(i\not{D} - M_0\right)B\right] + \frac{D}{2}Tr\left(\bar{B}\gamma^\mu\gamma_5\{u_\mu, B\}\right) + \frac{F}{2}Tr\left(\bar{B}\gamma^\mu\gamma_5[u_\mu, B]\right) \tag{4.97}$$

で与えられる。M_0 はカイラル極限におけるバリオン 8 重項の質量である。共変微分は

$$D_\mu B = \partial_\mu B + [\Gamma_\mu, B] \tag{4.98}$$

となる。D,F は低エネルギー定数であり semi-leptonic decay からフィットして決められる。

次の次数 (next-to-leading order,NLO) の有効ラグランジアンは対称性の要求から多くの項があらわれるが特にメソン-バリオン散乱に関係のある項を抜き出すと

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{MB}^{(2)} =& b_D Tr(\bar{B}\{\chi_+, B\}) + b_F Tr(\bar{B}[\chi_+, B]) + b_0 Tr(\bar{B}B)Tr(\chi_+) \\ &+ d_1 Tr(\bar{B}\{u^\mu, [u_\mu, B]\}) + d_2 Tr(\bar{B}[u^\mu, [u_\mu, B]]) + d_3 Tr(\bar{B}u_\mu)Tr(u^\mu B) + d_4 Tr(\bar{B}B)Tr(u^\mu u_\mu)\end{aligned} \tag{4.99}$$

となる。$b_D, b_F, b_0, d_1, d_2, d_3, d_4$ は低エネルギー定数であり実験から決める必要がある。

メソン-バリオンのカイラル摂動論の NLO までの項は図 4.1 のファインマン図で表される。

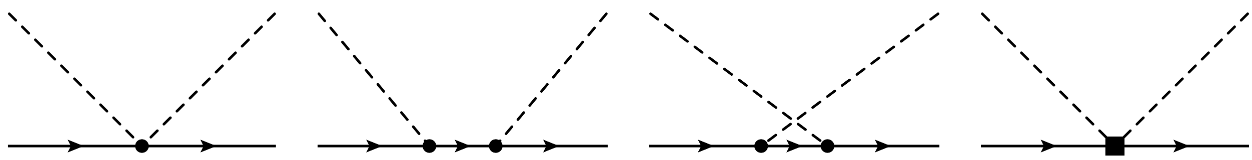


図 4.1: 左から (a)Weinberg-Tomozawa 項 (WT 項)　(b)Born 項 (直接項)　(c)Born 項 (交差項)　(d)NLO

第 5 章

カイラル摂動論に基づく核子-K^+ 中間子散乱の計算

メソン-バリオンのカイラル摂動論を用いて

$$K^+p \to K^+p$$
$$K^+n \to K^+n$$

を NLO まで計算し M-matrix を求める。M-matrix をマンデルスタム変数で書き換えた後、M-matrix を部分波分解し s 波、p 波に分解する。

5.1 運動学

K^+ と核子 N の弾性散乱を重心系で考えた時、始状態と終状態の 4 元運動量は以下のように与えられる。

$$p_1 = \left(\sqrt{\boldsymbol{p}_{CM}^2 + m_K^2},\ \boldsymbol{p}_{CM}\right) \tag{5.1}$$

$$p_2 = \left(\sqrt{\boldsymbol{p}_{CM}^2 + m_N^2},\ -\boldsymbol{p}_{CM}\right) \tag{5.2}$$

$$p_3 = \left(\sqrt{\boldsymbol{p}_{CM}^2 + m_K^2},\ \boldsymbol{p}_{CM}\right) \tag{5.3}$$

$$p_4 = \left(\sqrt{\boldsymbol{p}_{CM}^2 + m_N^2},\ -\boldsymbol{p}_{CM}\right) \tag{5.4}$$

m_K は K^+ の質量、m_N は核子の質量、$\boldsymbol{p}_{CM}$ は重心系の運動量をあらわす。この散乱は模式的に図 5.1 であらわされる。

ここでローレンツ不変な量としてマンデルスタム変数を導入する。

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \tag{5.5}$$

$$t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2 \tag{5.6}$$

$$u = (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2 \tag{5.7}$$

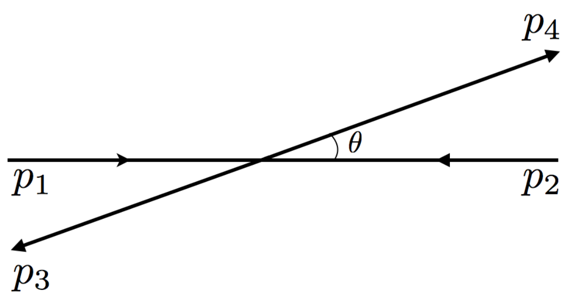


図 5.1: 粒子の散乱

これらを用いると 4 元運動量の内積は

$$p_1 p_2 = p_3 p_4 = \frac{s - m_N^2 - m_K^2}{2} \tag{5.8}$$

$$p_1 p_3 = \frac{2m_K^2 - t}{2} \qquad p_2 p_4 = \frac{2m_N^2 - t}{2} \tag{5.9}$$

$$p_1 p_4 = p_2 p_3 = \frac{m_N^2 + m_K^2 - u}{2} \tag{5.10}$$

と書ける。ここで on-shell 条件 $p_1^2 = p_3^2 = m_K^2$, $p_2^2 = p_4^2 = m_N^2$ を用いた。さらに

$$t = 2m_K^2 - 2p_1 p_3 = -2|\boldsymbol{p_{CM}}|^2(1 - \cos\theta) \tag{5.11}$$

$$u = 2m_K^2 + 2m_N^2 - s - t = -s + 2|\boldsymbol{p_{CM}}|^2(1 - \cos\theta) + 2(m_K^2 + m_N^2) \tag{5.12}$$

$$|\boldsymbol{p_{CM}}| = \frac{\sqrt{(s - (m_N + m_K)^2)(s - (m_N - m_K)^2}}{2\sqrt{s}} \tag{5.13}$$

のようにかける。(5.12) 式で $s + t + u = 2m_K^2 + 2m_N^2$ を用いた。以下では M-matrix を求めた後にマンデルスタム変数で書き換える。

5.2　$K^+ n \to K^+ n$

SU(3) メソン-バリオンのカイラル摂動論において、Born 項に現れる 1 粒子状態は $Q = -1, S = -1$ の量子数を持つ Σ^- のみである。よって、考える行列の成分は

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \Sigma^- & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.14}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & K^+ \\ 0 & 0 & 0 \\ K^- & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.15}$$

である (図 5.2)。

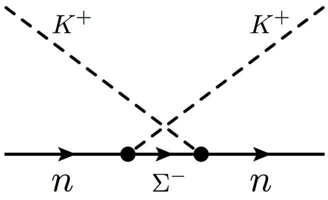


図 5.2: $K^+n \to K^+n$ の Born 項 (交差項)

5.2.1 LO

式 (4.97) を計算すると LO は

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(1)} &= \frac{i}{4f_K^2}(\bar{n}\ \partial\!\!\!/ K^- K^+ n - \bar{n} K^-\ \partial\!\!\!/ K^+ n) \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{2f_K}(D-F)(\bar{\Sigma}^-\ \partial\!\!\!/ K^- \gamma_5 n + \bar{n}\ \partial\!\!\!/ K^+ \gamma_5 \Sigma^-)\end{aligned} \tag{5.16}$$

となる。

M-matrix は

$$\mathcal{M}_{WT}^{(1)} = \frac{1}{4f_K^2}\bar{u}(\boldsymbol{p_4}, s_4)(p\!\!\!/_1 + p\!\!\!/_3)u(\boldsymbol{p_2}, s_2) \tag{5.17}$$

$$\mathcal{M}_{Born}^{(1)} = -\frac{(D-F)^2}{2f_K^2}\bar{u}(\boldsymbol{p_4}, s_4)\ p\!\!\!/_1 \gamma_5 S^{\Sigma}(p_2 - p_3)\ p\!\!\!/_3 \gamma_5 u(\boldsymbol{p_2}, s_2) \tag{5.18}$$

である。S はプロパゲーターであり添字 Σ は粒子の種類をあらわす。

$$S(q) = \frac{1}{m - q\!\!\!/ - i\epsilon} = \frac{m + q\!\!\!/}{m^2 - q^2 - i\epsilon} \tag{5.19}$$

$$\text{エネルギー・運動量の保存：}\ p_1 + p_2 = p_3 + p_4 \tag{5.20}$$

$$\text{Dirac 方程式}: (p\!\!\!/ - m)u(\boldsymbol{p}, s) = 0,\ \ \bar{u}(\boldsymbol{p}, s)(p\!\!\!/ - m) = 0 \tag{5.21}$$

を用いると WT 項は

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{WT}^{(1)} &= \frac{1}{4f^2}\bar{u}(\boldsymbol{p_4}, s_4)(p\!\!\!/_1 + p\!\!\!/_3)u(\boldsymbol{p_2}, s_2) \\ &= \frac{1}{4f_K^2}\bar{u}(\boldsymbol{p_4}, s_4)(p\!\!\!/_1 + p\!\!\!/_1 + p\!\!\!/_2 - p\!\!\!/_4)u(\boldsymbol{p_2}, s_2) \\ &= \frac{1}{4f_K^2}\bar{u}(\boldsymbol{p_4}, s_4)(p\!\!\!/_1 + p\!\!\!/_1 + \underbrace{p\!\!\!/_2 - p\!\!\!/_4}_{m_n - m_n})u(\boldsymbol{p_2}, s_2) \\ &= \frac{1}{2f_K^2}\bar{u}(\boldsymbol{p_4}, s_4)\ p\!\!\!/_1 u(\boldsymbol{p_2}, s_2)\end{aligned} \tag{5.22}$$

と簡単に書く事ができる。

Born 項もエネルギー・運動量の保存と Dirac 方程式と

$$\not{p}\,\not{k} = 2(kp) - \not{k}\,\not{p} \tag{5.23}$$

を用いると

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^{(1)}_{Born} &= -\frac{(D-F)^2}{2f_K^2}\bar{u}(\boldsymbol{p_4},s_4)\,\not{p}_1\gamma_5\frac{m_\Sigma + (\not{p}_2 - \not{p}_3)}{m_\Sigma^2 - (p_2-p_3)^2}\,\not{p}_3\gamma_5 u(\boldsymbol{p_2},s_2) \\
&= -\frac{(D-F)^2}{2f_K^2}\frac{1}{m_\Sigma^2-(p_2-p_3)^2}[m_\Sigma\bar{u}(\boldsymbol{p_4},s_4)\,\not{p}_1\gamma_5\,\not{p}_3\gamma_5 u(\boldsymbol{p_2},s_2) \\
&\quad +\bar{u}(\boldsymbol{p_4},s_4)\,\not{p}_1\gamma_5\,\not{p}_2\,\not{p}_3\gamma_5 u(\boldsymbol{p_2},s_2) - \bar{u}(\boldsymbol{p_4},s_4)\,\not{p}_1\gamma_5\,\not{p}_3\,\not{p}_3\gamma_5 u(\boldsymbol{p_2},s_2)]
\end{aligned} \tag{5.24}$$

$$\begin{aligned}
m_\Sigma\bar{u}(\boldsymbol{p_4},s_4)\,\not{p}_1\gamma_5\,\not{p}_3\gamma_5 u(\boldsymbol{p_2},s_2) &= -2m_\Sigma m_n\bar{u}(\boldsymbol{p_4},s_4)\,\not{p}_1 u(\boldsymbol{p_2},s_2) \\
&\quad + m_\Sigma[2(p_1p_4)-m_K^2]\bar{u}(\boldsymbol{p_4},s_4)u(\boldsymbol{p_2},s_2)
\end{aligned} \tag{5.25}$$

$$\begin{aligned}
\bar{u}(\boldsymbol{p_4},s_4)\,\not{p}_1\gamma_5\,\not{p}_2\,\not{p}_3\gamma_5 u(\boldsymbol{p_2},s_2) &= 2[(p_2p_3)-m_n^2]\bar{u}(\boldsymbol{p_4},s_4)\,\not{p}_1 u(\boldsymbol{p_2},s_2) \\
&\quad + m_n[2(p_1p_4)-m_K^2]\bar{u}(\boldsymbol{p_4},s_4)u(\boldsymbol{p_2},s_2)
\end{aligned} \tag{5.26}$$

$$-\bar{u}(\boldsymbol{p_4},s_4)\,\not{p}_1\gamma_5\,\not{p}_3\,\not{p}_3\gamma_5 u(\boldsymbol{p_2},s_2) = -m_K^2\bar{u}(\boldsymbol{p_4},s_4)\,\not{p}_1 u(\boldsymbol{p_2},s_2) \tag{5.27}$$

と書きかえることができる。

以上より Born 項は

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^{(1)}_{Born} = &-\frac{(D-F)^2}{2f_K^2}\frac{1}{m_\Sigma^2-(p_2-p_3)^2}\left[-2m_\Sigma m_n + 2(p_2p_3) - 2m_n^2 - m_K^2\right]\bar{u}(\boldsymbol{p_4},s_4)\,\not{p}_1 u(\boldsymbol{p_2},s_2) \\
&-\frac{(D-F)^2}{2f_K^2}\frac{1}{m_\Sigma^2-(p_2-p_3)^2}(m_\Sigma+m_n)(2(p_1p_4)-m_K^2)\bar{u}(\boldsymbol{p_4},s_4)u(\boldsymbol{p_2},s_2)
\end{aligned} \tag{5.28}$$

となる。

全体では

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^{(1)} &= \mathcal{M}^{(1)}_{WT} + \mathcal{M}^{(1)}_{Born} \\
&= \left[\frac{1}{2f_K^2} - \frac{(D-F)^2}{2f_K^2}\frac{1}{m_\Sigma^2-(p_2-p_3)^2}(-2m_\Sigma m_n + 2(p_2p_3) - 2m_n^2 - m_K^2)\right]\bar{u}(\boldsymbol{p_4},s_4)\,\not{p}_1 u(\boldsymbol{p_2},s_2) \\
&\quad - \frac{(D-F)^2}{2f_K^2}\frac{1}{m_\Sigma^2-(p_2-p_3)^2}(m_\Sigma+m_n)(2(p_1p_4)-m_K^2)\bar{u}(\boldsymbol{p_4},s_4)u(\boldsymbol{p_2},s_2)
\end{aligned} \tag{5.29}$$

となる。

5.2.2　NLO

式 (4.99) を計算するとラグランジアンは

$$\mathcal{L}^{(2)} = \frac{2B_0}{f_K^2}(\hat{m}+m_s)(-2b_0-b_D+b_F)\bar{n}nK^+K^- + \frac{2}{f_K^2}(-d_1+d_2+2d_4)\bar{n}n\partial_\mu K^+\partial^\mu K^- \tag{5.30}$$

となる。$\hat{m}=\frac{m_u+m_d}{2}$，$m_s$ はそれぞれ u クォークと d クォークのカレントクォーク質量のアイソスピン平均、s クォークのカレントクォーク質量を表す。また $B_0=\frac{m_K^2}{\hat{m}+m_s}$ である。これより M-matrix は

$$\mathcal{M}^{(2)}=\Bigg[-\frac{2B_0}{f_K^2}(\hat{m}+m_s)(-2b_0-b_D+b_F)-\frac{2}{f_K^2}(-d_1+d_2+2d_4)(p_1p_3)\Bigg]\bar{u}(\boldsymbol{p_4},s_4)u(\boldsymbol{p_2},s_2) \tag{5.31}$$

となる。

5.2.3 LO+NLO

以上の結果をまとめると

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{(1+2)}=&\left[-\frac{(D-F)^2}{2f_K^2}\frac{1}{m_\Sigma^2-(p_2-p_3)^2}(-2m_\Sigma m_n+2(p_2p_3)-2m_n^2-m_K^2)+\frac{1}{2f_K^2}\right]\bar{u}(\boldsymbol{p_4},s_4)\ \not{p}_1u(\boldsymbol{p_2},s_2)\\&+\Bigg[-\frac{(D-F)^2}{2f_K^2}\frac{1}{m_\Sigma^2-(p_2-p_3)^2}(m_\Sigma+m_n)(2(p_1p_4)-m_K^2)\\&-\frac{2B_0}{f_K^2}(\hat{m}+m_s)(-2b_0-b_D+b_F)-\frac{2}{f_K^2}(-d_1+d_2+2d_4)(p_1p_3)\Bigg]\bar{u}(\boldsymbol{p_4},s_4)u(\boldsymbol{p_2},s_2)\end{aligned} \tag{5.32}$$

となる。これは

$$\mathcal{M}^{(1+2)}=\bar{u}(\boldsymbol{p_4},s_4)\left[A_n+B_n\ \not{p}_1\right]u(\boldsymbol{p_2},s_2) \tag{5.33}$$

とまとめられる。この時、

$$\begin{aligned}A_n=&-\frac{(D-F)^2}{2f_K^2}\frac{1}{m_\Sigma^2-(p_2-p_3)^2}(m_\Sigma+m_n)(2(p_1p_4)-m_K^2)\\&-\frac{2B_0}{f_K^2}(\hat{m}+m_s)(-2b_0-b_D+b_F)-\frac{2}{f_K^2}(-d_1+d_2+2d_4)(p_1p_3)\end{aligned} \tag{5.34}$$

$$B_n=-\frac{(D-F)^2}{2f_K^2}\frac{1}{m_\Sigma^2-(p_2-p_3)^2}(-2m_\Sigma m_n+2(p_2p_3)-2m_n^2-m_K^2)+\frac{1}{2f_K^2} \tag{5.35}$$

と定義した。

5.3 $K^+p\to K^+p$

SU(3) メソン-バリオンのカイラル摂動論において、Born 項に現れる 1 粒子状態は $Q=0,S=-1$ の量子数を持つ Λ と Σ^0 のみである。よって、考える行列の成分は

$$B=\begin{pmatrix}\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}}+\frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & 0 & p\\ 0 & \frac{-\Sigma^0}{\sqrt{2}}+\frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & 0\\ 0 & 0 & -2\frac{\Lambda}{\sqrt{6}}\end{pmatrix} \tag{5.36}$$

$$\phi=\begin{pmatrix}0&0&K^+\\0&0&0\\K^-&0&0\end{pmatrix} \tag{5.37}$$

である (図 5.3)。これを用いて有効ラグランジアンを計算する。$K^+p \to K^+p$ 散乱は $K^+n \to K^+n$ 散乱の場合と全く同様な方法で計算できる。

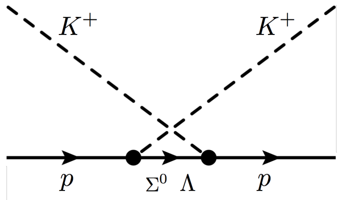


図 5.3: $K^+p \to K^+p$ の Born 項 (交差項)

5.3.1　LO

式 (4.97) を計算すると LO は

$$\mathcal{L}^{(1)} = \frac{i}{2f_K^2}\left(\bar{p}K^+ \not\partial K^- p - \bar{p}K^- \not\partial K^+ p\right) + \frac{D-F}{2f_K}\left(\bar{\Sigma}^0 \not\partial K^- \gamma_5 p + \bar{p} \not\partial K^+ \gamma_5 \Sigma^0\right) - \frac{D+3F}{2\sqrt{3}f_K}\left(\bar{\Lambda} \not\partial K^- \gamma_5 p + \bar{p} \not\partial K^+ \gamma_5 \Lambda\right) \tag{5.38}$$

となる。M-matrix は

$$\mathcal{M}_{WT}^{(1)} = \frac{1}{2f_K^2}\bar{u}(\boldsymbol{p_4}, s_4)(\not p_1 + \not p_3)u(\boldsymbol{p_2}, s_2) \tag{5.39}$$

$$\mathcal{M}_{Born}^{(1)} = -\left(\frac{D-F}{2f_K}\right)^2 \bar{u}(\boldsymbol{p_4}, s_4) \not p_1 \gamma_5 S^{\Sigma}(p_2 - p_3) \not p_3 \gamma_5 u(\boldsymbol{p_2}, s_2) - \left(\frac{3F+D}{2\sqrt{3}f_K}\right)^2 \bar{u}(\boldsymbol{p_4}, s_4) \not p_1 \gamma_5 S^{\Lambda}(p_2 - p_3) \not p_3 \gamma_5 u(\boldsymbol{p_2}, s_2) \tag{5.40}$$

となる。5.2 節と同じような計算を行うと

$$\mathcal{M}_{WT}^{(1)} = \frac{1}{f_K^2}\bar{u}(\boldsymbol{p_4}, s_4) \not p_1 u(\boldsymbol{p_2}, s_2) \tag{5.41}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{Born}^{(1)} = &\left[-\left(\frac{D-F}{2f_K}\right)^2 \frac{1}{m_\Sigma^2 - (p_2 - p_3)^2}(-2m_\Sigma m_p + 2(p_2 p_3) - 2m_p^2 - m_K^2)\right. \\ &\left. - \left(\frac{3F+D}{2\sqrt{3}f_K}\right)^2 \frac{1}{m_\Lambda^2 - (p_2 - p_3)^2}(-2m_\Lambda m_p + 2(p_2 p_3) - 2m_p^2 - m_K^2)\right]\bar{u}(\boldsymbol{p_4}, s_4) \not p_1 u(\boldsymbol{p_2}, s_2) \\ &+ \left[-\left(\frac{D-F}{2f_K}\right)^2 \frac{1}{m_\Sigma^2 - (p_2 - p_3)^2}(m_\Sigma + m_p)(2(p_1 p_4) - m_K^2)\right. \\ &\left. - \left(\frac{3F+D}{2\sqrt{3}f_K}\right)^2 \frac{1}{m_\Lambda^2 - (p_2 - p_3)^2}(m_\Lambda + m_p)(2(p_1 p_4) - m_K^2)\right]\bar{u}(\boldsymbol{p_4}, s_4) u(\boldsymbol{p_2}, s_2)\end{aligned} \tag{5.42}$$

となる。

全体では

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}^{(1)} &= \mathcal{M}^{(1)}_{WT} + \mathcal{M}^{(1)}_{Born} \\
&= \Bigg[- \left(\frac{D-F}{2f_K}\right)^2 \frac{1}{m_\Sigma^2 - (p_2-p_3)^2}(-2m_\Sigma m_p + 2(p_2p_3) - 2m_p^2 - m_K^2) \\
&\quad - \left(\frac{3F+D}{2\sqrt{3}f_K}\right)^2 \frac{1}{m_\Lambda^2 - (p_2-p_3)^2}(-2m_\Lambda m_p + 2(p_2p_3) - 2m_p^2 - m_K^2) + \frac{1}{f_K^2}\Bigg] \bar{u}(\boldsymbol{p_4}, s_4)\ \not{p}_1 u(\boldsymbol{p_2}, s_2) \\
&\quad + \Bigg[- \left(\frac{D-F}{2f_K}\right)^2 \frac{1}{m_\Sigma^2 - (p_2-p_3)^2}(m_\Sigma + m_p)(2(p_1p_4) - m_K^2) \\
&\quad - \left(\frac{3F+D}{2\sqrt{3}f_K}\right)^2 \frac{1}{m_\Lambda^2 - (p_2-p_3)^2}(m_\Lambda + m_p)(2(p_1p_4) - m_K^2)\Bigg] \bar{u}(\boldsymbol{p_4}, s_4) u(\boldsymbol{p_2}, s_2)
\end{aligned} \tag{5.43}
$$

となる。

5.3.2 NLO

式 (4.99) を計算するとラグランジアンは

$$
\mathcal{L}^{(2)} = -\frac{4B_0}{f_K^2}(\hat{m} + m_s)(b_0 + b_D)\bar{p}pK^+K^- + \frac{2}{f_K^2}(2d_2 + d_3 + 2d_4)\bar{p}p\partial_\mu K^+\partial^\mu K^- \tag{5.44}
$$

となる。M-matrix は

$$
\mathcal{M}^{(2)} = \left[\frac{4B_0}{f_K^2}(\hat{m} + m_s)(b_0 + b_D) - \frac{2}{f_K^2}(2d_2 + d_3 + 2d_4)(p_1p_3)\right] \bar{u}(\boldsymbol{p_4}, s_4) u(\boldsymbol{p_2}, s_2) \tag{5.45}
$$

となる。

5.3.3 LO+NLO

以上の結果をまとめると

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}^{(1+2)} &= \Bigg[- \left(\frac{D-F}{2f_K}\right)^2 \frac{1}{m_\Sigma^2 - (p_2-p_3)^2}(-2m_\Sigma m_p + 2(p_2p_3) - 2m_p^2 - m_K^2) \\
&\quad - \left(\frac{3F+D}{2\sqrt{3}f_K}\right)^2 \frac{1}{m_\Lambda^2 - (p_2-p_3)^2}(-2m_\Lambda m_p + 2(p_2p_3) - 2m_p^2 - m_K^2) + \frac{1}{f_K^2}\Bigg] \bar{u}(\boldsymbol{p_4}, s_4)\ \not{p}_1 u(\boldsymbol{p_2}, s_2) \\
&\quad + \Bigg[- \left(\frac{D-F}{2f_K}\right)^2 \frac{1}{m_\Sigma^2 - (p_2-p_3)^2}(m_\Sigma + m_p)(2(p_1p_4) - m_K^2) \\
&\quad - \left(\frac{3F+D}{2\sqrt{3}f_K}\right)^2 \frac{1}{m_\Lambda^2 - (p_2-p_3)^2}(m_\Lambda + m_p)(2(p_1p_4) - m_K^2) \\
&\quad + \frac{4B_0}{f_K^2}(\hat{m} + m_s)(b_0 + b_D) - \frac{2}{f_K^2}(2d_2 + d_3 + 2d_4)(p_1p_3)\Bigg] \bar{u}(\boldsymbol{p_4}, s_4) u(\boldsymbol{p_2}, s_2)
\end{aligned} \tag{5.46}
$$

となる。これは

$$
\mathcal{M}^{(1+2)} = \bar{u}(\boldsymbol{p_4}, s_4)\left[A_p + B_p\ \not{p}_1\right] u(\boldsymbol{p_2}, s_2) \tag{5.47}
$$

とまとめられる。この時、

$$
\begin{aligned}
A_p =& -\left(\frac{D-F}{2f_K}\right)^2 \frac{1}{m_\Sigma^2-(p_2-p_3)^2}(m_\Sigma+m_p)(2(p_1p_4)-m_K^2) \\
&-\left(\frac{3F+D}{2\sqrt{3}f_K}\right)^2 \frac{1}{m_\Lambda^2-(p_2-p_3)^2}(m_\Lambda+m_p)(2(p_1p_4)-m_K^2) \\
&+\frac{4B_0}{f_K^2}(\hat{m}+m_s)(b_0+b_D)-\frac{2}{f_K^2}(2d_2+d_3+2d_4)(p_1p_3) \qquad (5.48)\\
B_p =& -\left(\frac{D-F}{2f_K}\right)^2 \frac{1}{m_\Sigma^2-(p_2-p_3)^2}(-2m_\Sigma m_p+2(p_2p_3)-2m_p^2-m_K^2) \\
&-\left(\frac{3F+D}{2\sqrt{3}f_K}\right)^2 \frac{1}{m_\Lambda^2-(p_2-p_3)^2}(-2m_\Lambda m_p+2(p_2p_3)-2m_p^2-m_K^2)+\frac{1}{f_K^2} \qquad (5.49)
\end{aligned}
$$

と定義した。

5.4 マンデルスタム変数での書き換え

この節ではこれまでに求めた M-matrix をマンデルスタム変数で書き換える。$K^+n \to K^+n$ 散乱と $K^+p \to K^+p$ 散乱の M-matrix は共通の構造を持っており共通の部分は中間状態に現れる粒子の種類が異なるだけである。そこで中間状態にあらわれる粒子の質量を一般に m_x とおいて計算してから個々の場合に適用する。散乱振幅にあらわれる $A_n(A_p)$ や $B_n(B_p)$ も一般的に $A,\ B$ と書く事にする。また、ここからの計算では簡単のために現れるハドロンの質量に対してアイソスピン平均をとることにする。ここで質量の表記は変えないがアイソスピン平均をとった質量と読み替えることにする。

- A

$$
\begin{aligned}
m_x^2-(p_2-p_3)^2 &= m_x^2-u \\
&= m_x^2-2(m_K^2+m_N^2)+s-2|\boldsymbol{p_{CM}}|^2+2|\boldsymbol{p_{CM}}|^2 cos\theta \\
&= m_x^2-2(m_K^2+m_N^2)+s-R(s)+R(s)\tau \qquad (5.50)
\end{aligned}
$$

ここで

$$
R(s)=2|\boldsymbol{p_{CM}}|^2,\ \ cos\theta=\tau \qquad (5.51)
$$

とおいた。

$$
\begin{aligned}
V(s) &= m_\Sigma^2-2(m_K^2+m_N^2)+s-R(s) \qquad (5.52)\\
T(s) &= m_\Lambda^2-2(m_K^2+m_N^2)+s-R(s) \qquad (5.53)
\end{aligned}
$$

とおくと

$$
\begin{aligned}
m_\Sigma^2-u &= V(s)+R(s)\tau \qquad (5.54)\\
m_\Lambda^2-u &= T(s)+R(s)\tau \qquad (5.55)
\end{aligned}
$$

となる。

$$
\begin{aligned}
2(p_1p_4)-m_K^2 &= -m_N^2-2m_K^2+s-2|\boldsymbol{p_{CM}}|^2(1-cos\theta) \\
&= s-R(s)-2m_K^2-m_N^2+R(s)\tau \\
&= J(s)+R(s)\tau \qquad (5.56)
\end{aligned}
$$

ここで

$$J(s) = s - R(s) - 2m_K^2 - m_N^2 \tag{5.57}$$
$$R(s) = 2|\boldsymbol{p_{CM}}|^2 \tag{5.58}$$
$$cos\theta = \tau \tag{5.59}$$

とおいた。

$$C = \left(\frac{D-F}{2f_K}\right)^2, \quad E = \left(\frac{3F+D}{2\sqrt{3}f_K}\right)^2, \quad C_2 = \frac{(D-F)^2}{2f_K^2} \tag{5.60}$$

とおくと

$$\begin{aligned} A_n =& \underbrace{-C_2(m_\Sigma + m_p)\frac{J(s)+R(s)\tau}{V(s)-R(s)\tau}}_{Born\ 項} \\ & \underbrace{-\frac{2B_0}{f^2}(m+m_s)(-2b_0-b_D+b_F) - \frac{2}{f^2}(-d_1+d_2+2d_4)(m_K^2+\frac{R}{2}-\frac{R}{2}\tau)}_{NLO} \end{aligned} \tag{5.61}$$

$$\begin{aligned} A_p =& \underbrace{-C(m_\Sigma + m_N)\frac{J(s)+R(s)t}{V(s)+R(s)t} - E(m_\Lambda + m_N)\frac{J(s)+R(s)t}{T(s)+R(s)t}}_{Born\ 項} \\ & + \underbrace{\frac{4B_0}{f_K^2}(\hat{m}+m_s)(b_0+b_d) - \frac{2}{f_K^2}(2d_2+d_3+2d_4)(p_1p_3)}_{NLO} \end{aligned} \tag{5.62}$$

- B

$$\begin{aligned} & -2m_x m_N + 2(p_2p_3) - 2m_x^2 - m_K^2 \\ & = [-2m_x m_N - 3m_N^2 - 2m_K^2 + s - R(s)] + R(s)cos\theta \end{aligned} \tag{5.63}$$

のとき

$$W(s) = -2m_\Sigma m_N - 3m_N^2 - 2m_K^2 + s - R(s) \tag{5.64}$$
$$X(s) = -2m_\Lambda m_N - 3m_N^2 - 2m_K^2 + s - R(s) \tag{5.65}$$

とおくと

$$-2m_\Sigma m_N + 2(p_2p_3) - 2m_N^2 - m_K^2 = W(s) + R(s)cos\theta \tag{5.66}$$
$$-2m_\Lambda m_N + 2(p_2p_3) - 2m_N^2 - m_K^2 = X(s) + R(s)cos\theta \tag{5.67}$$

となる。

$$B_n = \underbrace{-C_2\frac{W(s)+R(s)\tau}{V(s)+R(s)\tau}}_{Born\ 項} + \underbrace{\frac{1}{2f_K^2}}_{WT\ 項} \tag{5.68}$$

$$B_p = \underbrace{-C\frac{W(s)+R(s)\tau}{V(s)+R(s)\tau} - E\frac{X(s)+R(s)\tau}{T(s)+R(s)\tau}}_{Born\ 項} + \underbrace{\frac{1}{f_K^2}}_{WT\ 項} \tag{5.69}$$

マンデルスタム変数を用いると M-matrix の A, B の部分は s と τ の関数で書ける。

5.5 部分波分解

スピン 1/2 とスピン 0 散乱を考えたとき全系のスピンは 1/2 であるのでスピンが上向きと下向きの 2 成分ある。この時、散乱振幅はパウリ行列 $\boldsymbol{\sigma}$ を用いて

$$f = F(\theta) - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} G(\theta) \tag{5.70}$$

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{p}^{'} \times \boldsymbol{p}}{\mid \boldsymbol{p}^{'} \times \boldsymbol{p} \mid} \tag{5.71}$$

とあらわす事ができる [13]。スピン行列にあらわれる 2 つの振幅,$F(\theta), G(\theta)$ を部分波分解したとき、それぞれ

$$F(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}[(l+1)f_l^{+} + lf_l^{-})]P_l(cos\theta) \tag{5.72}$$

$$G(\theta) = \sum_{l=1}^{\infty}[f_l^{+} - f_l^{-}]\underbrace{\frac{dP_l(cos\theta)}{d(cos\theta)}sin\theta}_{P_l^1} \tag{5.73}$$

$$f_l^{+} = \frac{e^{i\delta_l^{+}}sin\delta_l^{+}}{k} \tag{5.74}$$

$$f_l^{-} = \frac{e^{i\delta_l^{-}}sin\delta_l^{-}}{k} \tag{5.75}$$

とあらわされる。k は重心系の運動量である。

部分波分解はルジャンドル多項式の直交性

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)P_{l'}(x)dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{l,l'} \tag{5.76}$$

$$\int_{-1}^{1} P_l^1(x)P_{l'}^1(x)dx = \frac{2}{2l+1}l(l+1)\delta_{l,l'} \tag{5.77}$$

を用いれば良い。式 (5.77) は

$$\int_{-1}^{1} P_l^m(x)P_{l'}^m(x)dx = \frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)}\delta_{l,l'} \tag{5.78}$$

$$P_l^m = (1-x^2)^{\frac{|m|}{2}}(\frac{d}{dx})^{|m|}P_l(x) \tag{5.79}$$

において $m=1$ とおくことで求められる。上の式を $F(\theta), G(\theta)$ に対して用いると

$$f_0^{+} = F^{l=0} \tag{5.80}$$

$$f_1^{+} = \frac{1}{3}(F^{l=1} + G^{l=1}) \tag{5.81}$$

$$f_1^{-} = \frac{1}{3}(F^{l=1} - 2G^{l=1}) \tag{5.82}$$

$$f_2^{+} = \frac{1}{5}(F^{l=2} + 2G^{l=2}) \tag{5.83}$$

$$f_2^{-} = \frac{1}{5}(F^{l=2} - 3G^{l=2}) \tag{5.84}$$

などと部分波に分解できる。スピン 1/2 の時、軌道角運動量 $\boldsymbol{L}$ とスピン $\boldsymbol{S}$ が結合する場合、全角運動量の量子数 j は $j = l \pm \frac{1}{2}$ であらわせる。f の上の添字の $\pm$ は $j = l \pm \frac{1}{2}$ の $\pm$ に対応している。ここで

L_{I2J} という表記を用いる。$l = 0, 1, 2, 3, ...$ で表される波をおのおの s 波,p 波,d 波,f 波... と呼び、これを L であらわす。また I をアイソスピン、J をスピンとする。すると $f_l^{\pm}$ は, 例えば $I = 1$ の時

$$S_{11} : f_0^+,\ \ P_{13} : f_+^1,\ \ P_{11} : f_1^-$$

などの対応がつく。このような分解を行いたいので、これまでに求めた M-matrix をスピン行列の形で書き換える。そのために

$$u(\boldsymbol{p}, s) = \sqrt{E_p + m_p}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E_p+m_p} \end{pmatrix}\chi^{(s)} \tag{5.85}$$

を

$$\mathcal{M}^{(1+2)} = \bar{u}(\boldsymbol{p_4}, s_4)\,[A + B\ \not{p}_1]\,u(\boldsymbol{p_2}, s_2) \tag{5.86}$$

に代入して計算する。

$$\sigma^i\sigma^j = \delta^{ij} + i\epsilon^{ijk}\sigma_k \tag{5.87}$$

を用いると

$$\bar{u}(\boldsymbol{p_4}, s_4)u(\boldsymbol{p_2}, s_2) = 1 - \frac{\boldsymbol{p_4}\cdot\boldsymbol{p_2} + i(\boldsymbol{p_4}\times\boldsymbol{p_2})\cdot\boldsymbol{\sigma}}{E_p + m_p} \tag{5.88}$$

$$\bar{u}(\boldsymbol{p_4}, s_4)\gamma^0 u(\boldsymbol{p_2}, s_2) = 1 + \frac{\boldsymbol{p_4}\cdot\boldsymbol{p_2} + i(\boldsymbol{p_4}\times\boldsymbol{p_2})\cdot\boldsymbol{\sigma}}{E_p + m_p} \tag{5.89}$$

$$\bar{u}(\boldsymbol{p_4}, s_4)\gamma^i u(\boldsymbol{p_2}, s_2) = p_2^i + p_4^i + i(\boldsymbol{p_2}\times\boldsymbol{\sigma})^i - i(\boldsymbol{p_4}\times\boldsymbol{\sigma})^i \tag{5.90}$$

が得られる。次に CM 系

$$\boldsymbol{p_1} = -\boldsymbol{p_2} \tag{5.91}$$

$$\boldsymbol{p_3} = -\boldsymbol{p_4} \tag{5.92}$$

を用いる。そしてまとめると

$$\begin{aligned}\mathcal{M} =&(E_N + m_N)\left[AE_K + A\frac{|\boldsymbol{p_{CM}}|^2}{E_N + m_N} + B\right] + \frac{|\boldsymbol{p_{CM}}|^2}{E_N + m_N}\left[AE_K + (E_N + m_N)A - B\right]\tau \\ &-i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{p_3}}\times\hat{\boldsymbol{p_1}})\left[-\frac{|\boldsymbol{p_{CM}}|^2}{E_N + m_N}\Big((E_N + m_N)A + AE_K - B\Big)\sqrt{1-\tau^2}\right]\end{aligned} \tag{5.93}$$

$$\begin{aligned}F(\theta) &= (E_N + m_N)\left[AE_K + A\frac{|\boldsymbol{p_{CM}}|^2}{E_N + m_N} + B\right] \\ &\quad + \frac{|\boldsymbol{p_{CM}}|^2}{E_N + m_N}\left[AE_K + (E_N + m_N)A - B\right]\tau\end{aligned} \tag{5.94}$$

$$G(\theta) = -\frac{|\boldsymbol{p_{CM}}|^2 sin\theta}{E_N + m_N}((E_N + m_N)A + AE_K - B) \tag{5.95}$$

と書き下せる。

5.5.1　s 波 $(l=0)$

X は $P_l(\tau)$ で展開されている時、ルジャンドル関数の直交性から l 波成分は

$$X^l = \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1} d\tau X P_l(\tau) \tag{5.96}$$

のようにあらわせる。これより

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{W+R\tau}{V+R\tau}d\tau = -\frac{V-W}{2R}\ln\left(\frac{R+V}{-R+V}\right)+1 \tag{5.97}$$

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[\frac{W+R\tau}{V+R\tau}\right]\tau d\tau = \frac{V(V-W)}{2R^2}\ln\left(\frac{R+V}{-R+V}\right)+\frac{W-V}{R} \tag{5.98}$$

となるのでこれを用いて A, B を部分波に分解する。

- $K^+n \to K^+n$

$$\begin{aligned} A_n^{l=0} &= \frac{C_2(m_\Sigma+m_N)}{2R}(V-J)\ln\left(\frac{R+V}{-R+V}\right) - C_2(m_\Sigma+m_N) \\ &\quad + \frac{2B_0}{f_K^2}(\hat{m}+m_s)(2b_0+b_D-b_F) + \frac{2}{f^2}(d_1-d_2-2d_4)\left(m_K^2+\frac{R}{2}\right) \end{aligned} \tag{5.99}$$

$$B_n^{l=0} = \frac{1}{2f_K^2} + \frac{C_2(V-W)}{2R}\ln\left(\frac{R+V}{-R+V}\right) - C_2 \tag{5.100}$$

$$\begin{aligned} (A_n\tau)^{l=0} &= -C_2(m_\Sigma+m_N)\left[\frac{V(V-J)}{2R^2}\ln\left(\frac{R+V}{-R+V}\right)+\frac{J-V}{R}\right] \\ &\quad + \frac{R}{3f_K^2}(-d_1+d_2+2d_4) \end{aligned} \tag{5.101}$$

$$(B_n\tau)^{l=0} = -C_2\left[\frac{V(V-W)}{2R^2}\ln\left(\frac{R+V}{-R+V}\right)+\frac{W-V}{R}\right] \tag{5.102}$$

- $K^+p \to K^+p$

$$\begin{aligned} A_p^{l=0} &= \frac{C(V-J)(m_\Sigma+m_N)}{2R}\ln\left(\frac{R+V}{-R+V}\right) + \frac{E(T-J)(m_\Lambda+m_N)}{2R}\ln\left(\frac{R+T}{-R+T}\right) \\ &\quad -C(m_\Sigma+m_N) - E(m_\Lambda+m_N) + \frac{4B_0}{f_K^2}(\hat{m}+m_s)(b_0+b_D) \\ &\quad +\frac{2}{f_K^2}(2d_2+d_3+2d_4)\left(m_K^2+\frac{R}{2}\right) \end{aligned} \tag{5.103}$$

$$B_p^{l=0} = \frac{C(V-W)}{2R}\ln\left(\frac{R+V}{-R+V}\right) + \frac{E(T-X)}{2R}\ln\left(\frac{R+T}{-R+T}\right) - C - E + \frac{1}{f_K^2} \tag{5.104}$$

$$\begin{aligned} (A_p\tau)^{l=0} &= -C(m_\Sigma+m_N)\left[\frac{V(V-J)}{2R^2}\ln\left(\frac{R+V}{-R+V}\right)+\frac{J-V}{R}\right] \\ &\quad -E(m_\Lambda+m_N)\left[\frac{T(T-J)}{2R^2}\ln\left(\frac{R+T}{-R+T}\right)+\frac{J-T}{R}\right] \\ &\quad +\frac{R}{3f_K^2}(2d_2+d_3+2d_4) \end{aligned} \tag{5.105}$$

$$\begin{aligned} (B_p\tau)^{l=0} &= -C\left[\frac{V(V-W)}{2R^2}\ln\left(\frac{R+V}{-R+V}\right)-\frac{W-V}{R}\right] \\ &\quad -E\left[\frac{T(T-X)}{2R^2}\ln\left(\frac{R+T}{-R+T}\right)-\frac{X-T}{R}\right] \end{aligned} \tag{5.106}$$

5.5.2　p 波 ($l = 1$)

$l = 1$ のとき部分波は $G(\theta)$ からの寄与も含まれる。$G(\theta)$ 部分は $P_l^{m=1}$ で展開されているから新たにその部分の直交性も用いて部分波に分解する。O が $P_l^{m=1}(\tau)$ で展開されている時、ルジャンドル関数の直交性から l 波成分は

$$O^l = \frac{2l+1}{2l(l+1)} \int_{-1}^{1} d\tau O P_l^{m=1}(\tau) \tag{5.107}$$

のようにあらわせる。$l = 1$ の時、$P_{l=1}^{m=1} = \sqrt{1-x^2}$ であるから

$$\frac{3}{4}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-\tau^2}\frac{W+R\tau}{V+R\tau}d\tau = \frac{3}{4}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi V(W-V)}{R^2}\left(1-\sqrt{1-\frac{R^2}{V^2}}\right)\right] \tag{5.108}$$

などを用いて計算すれば良い。

- $K^+n \to K^+n$

$$\begin{aligned} A_n^{l=1} &= -\frac{3C_2(m_\Sigma + m_N)}{2R^2}\left[V(V-J)\ln\left(\frac{R+V}{-R+V}\right) + 2R(J-V)\right] \\ &\quad + \frac{R}{f_K^2}(-d_1 + d_2 + 2d_4) \end{aligned} \tag{5.109}$$

$$B_n^{l=1} = -\frac{3C_2}{2R^2}\left[V(V-W)\ln\left(\frac{R+V}{-R+V}\right) + 2R(W-V)\right] \tag{5.110}$$

$$\begin{aligned} (A_n\tau)^{l=1} &= \frac{3C_2(m_\Sigma + m_N)}{2R^3}\left[V^2(V-J)\ln\left(\frac{R+V}{-R+V}\right) + 2RV(J-V) - \frac{2}{3}R^3\right] \\ &\quad - \frac{2B_0}{f_K^2}(\hat{m} + m_s)(-2b_0 - b_d + b_f) \\ &\quad - \frac{2}{f_K^2}(-d_1 + d_2 + 2d_4)\left(m_K^2 + \frac{R}{2}\right) \end{aligned} \tag{5.111}$$

$$\begin{aligned} (B_n\tau)^{l=1} &= \frac{3C_2}{2R^3}\left[V^2(V-W)\ln\left(\frac{R+V}{-R+V}\right) + 2RV(W-V) - \frac{2}{3}R^3\right] \\ &\quad + \frac{1}{2f_K^2} \end{aligned} \tag{5.112}$$

$$\begin{aligned} \left(A_n\sqrt{1-\tau^2}\right)^{l=1} &= -\frac{3C_2\pi(m_\Sigma + m_N)}{4}\left[\frac{1}{2} + \frac{(J-V)V}{R^2}\left(1-\sqrt{1-\frac{R^2}{V^2}}\right)\right] \\ &\quad - \frac{3\pi B_0}{4f_K^2}(\hat{m} + m_s)(-2b_0 - b_d + b_f) \\ &\quad - \frac{3\pi}{4f_K^2}(-d_1 + d_2 + 2d_4)\left(m_K^2 + \frac{R}{2}\right) \end{aligned} \tag{5.113}$$

$$\left(B_n\sqrt{1-\tau^2}\right)^{l=1} = -\frac{3C_2\pi}{4}\left[\frac{1}{2} + \frac{(W-V)V}{R^2}\left(1-\sqrt{1-\frac{R^2}{V^2}}\right)\right] + \frac{3\pi}{16f_K^2} \tag{5.114}$$

- $K^+p \to K^+p$

$$
\begin{aligned}
A_p^{l=1} &= -\frac{3C(m_\Sigma + m_N)}{2R^2}\left[V(V-J)\ln\left(\frac{R+V}{-R+V}\right) + 2R(J-V)\right] \\
&\quad -\frac{3E(m_\Lambda + m_N)}{2R^2}\left[T(T-J)\ln\left(\frac{R+T}{-R+T}\right) + 2R(J-T)\right] \\
&\quad +\frac{R}{f_K^2}(2d_2 + d_3 + 2d_4) \qquad (5.115)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B_p^{l=1} &= -\frac{3C}{2R^2}\left[V(V-W)\ln\left(\frac{R+V}{-R+V}\right) + 2R(W-V)\right] \\
&\quad -\frac{3E}{2R^2}\left[T(T-X)\ln\left(\frac{R+T}{-R+T}\right) + 2R(X-T)\right] \qquad (5.116)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(A_p\tau)^{l=1} &= \frac{3C(m_\Sigma + m_N)}{2R^3}\left[V^2(V-J)\ln\left(\frac{R+V}{-R+V}\right) + 2RV(J-V) - \frac{2}{3}R^3\right] \\
&\quad +\frac{3E(m_\Lambda + m_N)}{2R^3}\left[T^2(T-J)\ln\left(\frac{R+T}{-R+T}\right) + 2RT(J-T) - \frac{2}{3}R^3\right] \\
&\quad +\frac{4B_0}{f_K^2}(\hat{m} + m_s)(b_0 + b_d) - \frac{2}{f_K^2}(2d_2 + d_3 + 2d_4)\left(m_K^2 + \frac{R}{2}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(B_p\tau)^{l=1} &= \frac{3C}{2R^3}\left[V^2(V-W)\ln\left(\frac{R+V}{-R+V}\right) + 2RV(W-V) - \frac{2}{3}R^3\right] \\
&\quad +\frac{3E}{2R^3}\left[T^2(T-X)\ln\left(\frac{R+T}{-R+T}\right) + 2RT(X-T) - \frac{2}{3}R^3\right] \\
&\quad +\frac{1}{f_K^2} \qquad (5.117)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(A_p\sqrt{1-\tau^2}\right)^{l=1} &= -\frac{3C\pi(m_\Sigma + m_N)}{4}\left[\frac{1}{2} + \frac{(J-V)V}{R^2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{R^2}{V^2}}\right)\right] \\
&\quad -\frac{3E\pi(m_\Lambda + m_N)}{4}\left[\frac{1}{2} + \frac{(J-T)T}{R^2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{R^2}{T^2}}\right)\right] \\
&\quad +\frac{6\pi B_0}{4f_K^2}(\hat{m} + m_s)(b_0 + b_d) - \frac{3\pi}{4f_K^2}(2d_2 + d_3 + 2d_4)\left(m_K^2 + \frac{R}{2}\right) \qquad (5.118)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(B_p\sqrt{1-\tau^2}\right)^{l=1} &= -\frac{3C\pi}{4}\left[\frac{1}{2} + \frac{(W-V)V}{R^2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{R^2}{V^2}}\right)\right] \\
&\quad -\frac{3E\pi}{4}\left[\frac{1}{2} + \frac{(X-T)T}{R^2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{R^2}{T^2}}\right)\right] + \frac{3\pi}{8f_K^2} \qquad (5.119)
\end{aligned}
$$

第 6 章

結果

この章では第 5 章で求めた M-matrix を用いて様々な量を計算する。まず、NLO に含まれる低エネルギー定数を全散乱断面積のデータを用いて χ^2 法で決める。そして最適値として採用された低エネルギー定数を用いて散乱長、位相差、微分散乱断面積を計算する。最後に K^+-原子核の相互作用を与える自己エネルギーの計算から媒質効果の一部は波動関数のくりこみにより説明できる事を示す。

ここからは、質量に関してアイソスピン平均をとり、以下の値を用いる。

$$
\begin{aligned}
&m_N = 938.9187125 \ \text{MeV}\\
&m_\Sigma = 1193.154 \ \text{MeV}\\
&m_\Lambda = 1115.683 \ \text{MeV}\\
&m_K = 495.6455 \ \text{MeV}\\
&f_K = 110.0 \ \text{MeV}\\
&\hbar c = 197.3269718 \ \text{MeV} \cdot \text{fm}\\
&D = 0.80\\
&F = 0.46
\end{aligned}
$$

6.1 パラメーターのフィット

第 5 章で計算した M-matrix の NLO には、低エネルギー定数が含まれており、これらは対称性から決める事はできない。したがって、実験から決める必要がある。この節ではアイソスピン $I=1$ とアイソスピン $I=0$ の散乱断面積のデータを用いて χ^2 法から低エネルギー定数を決定する。χ^2 法は

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i - f(x_i)}{\sigma_i} \right)^2 \tag{6.1}$$

を最小にするようなパラメーターを決める方法である。y_i は実験データ、$f(x_i)$ は不定パラメーターを含む理論によって計算された関数、σ_i はデータの誤差、n はデータ数をあらわす。誤差で規格化しているのは大きい誤差よりも小さい誤差の方に大きな重みをつけるためである。

$I=1$、 $I=0$ の場合のパラメーターをそれぞれ

$$b^{I=1} \equiv b_0 + b_d \tag{6.2}$$

$$d^{I=1} \equiv 2d_2 + d_3 + 2d_4 \tag{6.3}$$

$$b^{I=0} \equiv b_0 - b_f \tag{6.4}$$
$$d^{I=0} \equiv 2d_1 - 2d_4 + d_3 \tag{6.5}$$

とする。$I = 1$ の時、$n = 35$、$I = 0$ の時、$n = 25$ である。表 6.3、表 6.4 のデータを用いて χ^2 法でフィットすると $I = 1$、$I = 0$ でそれぞれ 2 つの極小が得られる (表 6.1、表 6.2)。

表 6.1: $I = 1$ の低エネルギー定数 [MeV^{-1}]

	$b^{I=1}$	$d^{I=1}$	$\chi^2/d.o.f$
(a)	-5.25×10^{-4}	-5.0×10^{-5}	9.0
(b)	1.32×10^{-4}	7.87×10^{-4}	9.3

表 6.2: $I = 0$ の低エネルギー定数 [MeV^{-1}]

	$b^{I=0}$	$d^{I=0}$	$\chi^2/d.o.f$
(c)	5.61×10^{-5}	4.46×10^{-4}	8.9
(d)	5.86×10^{-5}	-7.43×10^{-4}	9.3

これらを用いて全散乱断面積を計算する (図 6.1、図 6.2)。

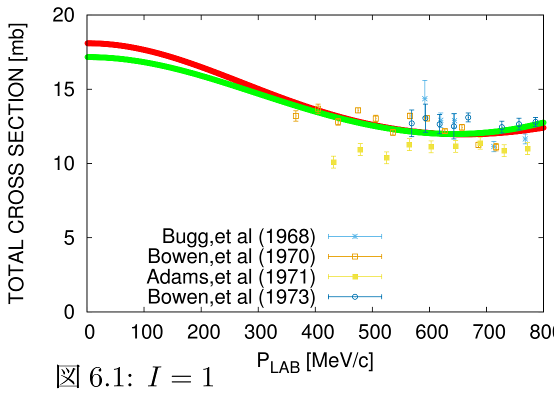


図 6.1: $I = 1$
赤、緑はそれぞれの (a),(b) のパラメーターを用いたグラフである。[4, 7, 8, 9]

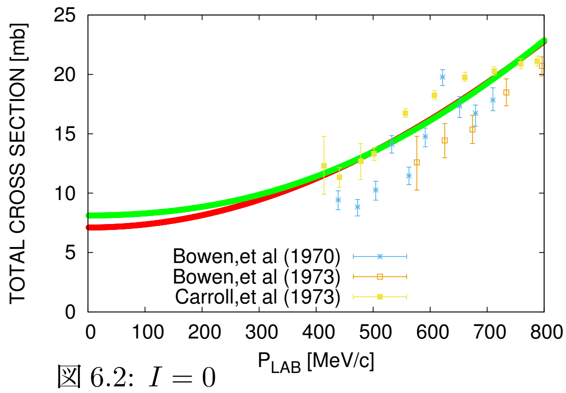


図 6.2: $I = 0$
赤、緑はそれぞれの (c),(d) のパラメーターを用いたグラフである。[7, 9, 10]

全散乱断面積では低エネルギーを除いてどちらの最適値を用いてもほぼ同じグラフである。ここでは全散乱断面積のデータを用いたフィットで M-matrix の絶対値が合うようにパラメーターを決めた。次に $K^+n \to K^+n$ 微分散乱断面積を計算しデータの角度依存性を最も良く再現する値を採用する。微分散乱断面積は重心系で弾性散乱の場合

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f|^2 = \frac{1}{64\pi^2 s}|\mathcal{M}|^2 \tag{6.6}$$

で与えられる。

いま $K^+p \to K^+p\ (I=1)$ と $I=0$ について最適値の候補が与えられている。$K^+n \to K^+n$ の散乱振幅は

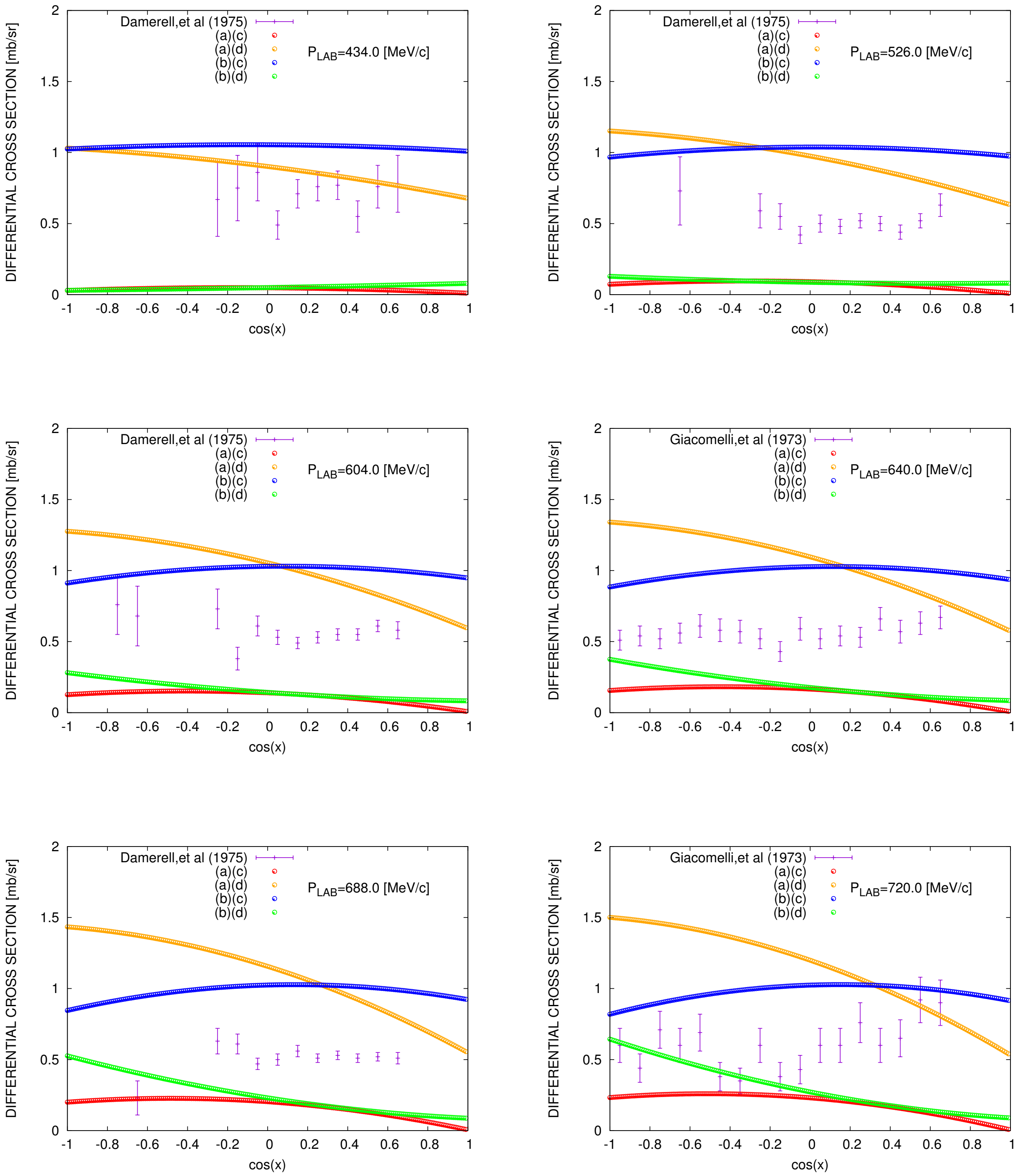
$$f(K^+n \to K^+n) = \frac{1}{2}(f^{I=1} + f^{I=0}) \tag{6.7}$$

より計算する事ができる。このとき $I=1$、$I=0$ のパラメーターを用いて

$$b_n = -b^{I=1} - b^{I=0} \tag{6.8}$$

$$d_n = \frac{d^{I=1} - d^{I=0}}{2} \tag{6.9}$$

とおく。そして (a)(c),(a)(d),(b)(c),(b)(d) のそれぞれの組について微分散乱断面積を計算する (図 6.3)。



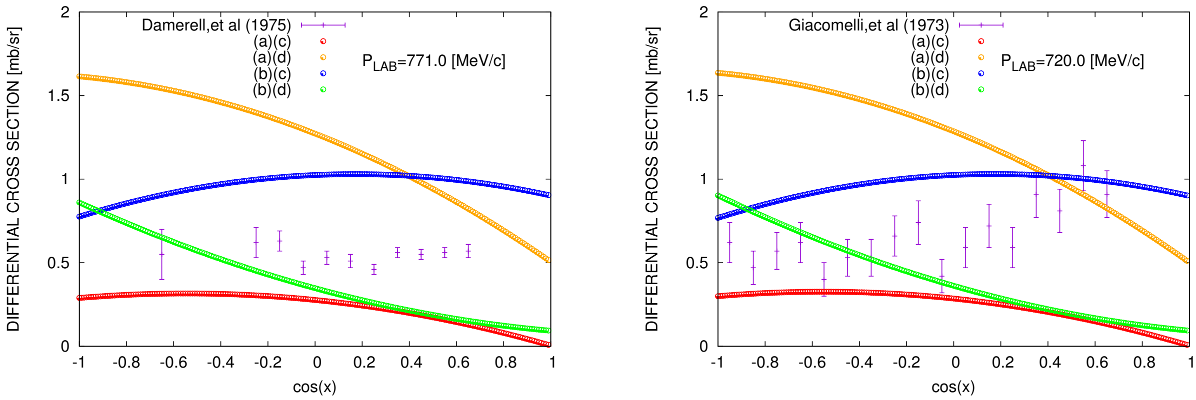


図 6.3: パラメーターを変えたときの $K{+}n \to K^+n$ 微分散乱断面積
データは [11, 12] による

さきにも述べたように、M-matrix の絶対値は全散乱断面積のデータによって合わされているので、微分散乱断面積から適切なパラメーターを選ぶ際に、絶対値はそれほど重要ではない。重要なのは図 6.3 において角度依存性を最もよく再現するパラメーターの組を採用することである。図 6.3 は P_{LAB}=434 MeV/c を除けば全て与えられたデータの範囲内の P_{LAB} である。角度依存性を最も良く再現しているのは (b)(c) の組 (青線) である。データ点は P_{LAB}=640 MeV/c まではほどんど角度依存性をもたないが P_{LAB}=688 MeV/c から角度依存性は下に凸の傾向を示し始める。他方で青線は P_{LAB} が大きくなるにしたがって角度依存性は上に凸の傾向を示す。したがって $K^+n \to K^+n$ 微分散乱断面積の計算は少なくとも 434.0 MeV/c $\le P_{LAB} \le$ 640.0 MeV/c の範囲で有効だといえる。

表 6.3: $I = 1$ の全散乱断面積の実験データ [4, 7, 8, 9]

p_{LAB} [MeV]	σ [mb]	リファレンス
592	14.36 ± 1.24	Bugg, et al. (1968)
620	12.91 ± 0.49	
644	12.88 ± 0.48	
713	11.14 ± 0.35	
768	11.65 ± 0.33	
366.0	13.20 ± 0.35	Bowen,et al. (1970)
405.0	13.69 ± 0.31	
440.0	12.81 ± 0.23	
475.0	13.58 ± 0.17	
506.0	13.02 ± 0.23	
536.0	12.09 ± 0.20	
566.0	13.20 ± 0.19	
596.0	13.04 ± 0.19	
627.0	12.18 ± 0.14	
657.0	12.43 ± 0.20	
686.0	11.25 ± 0.18	
717.0	11.10 ± 0.25	
432	10.09 ± 0.4	Adams,et al. (1971)
479	10.94 ± +0.4	
525	10.38 ± 0.4	
565	11.27 ± 0.4	
603	11.12 ± 0.4	
646	11.15 ± 0.4	
689	11.36 ± 0.4	
731	10.86 ± 0.4	
772	11.0 ± 0.4	
569	12.7 ± 0.9	Bowen,et al. (1973)
593	13.05 ± 0.95	
618	12.65 ± 0.65	
643	12.50 ± 0.85	
668	13.1 ± 0.3	
698	12.6 ± 0.75	
727	12.45 ± 0.40	
757	12.65 ± 0.40	
786	12.8 ± 0.3	

表 6.4: $I = 0$ の全散乱断面積の実験データ [7, 9, 10]

p_{LAB} [MeV]	σ [mb]	リファレンス
438.6	9.4 ± 0.75	Bowen,et al. (1970)
472.7	8.8 ± 0.68	
504.7	10.3 ± 0.80	
532.7	14.1 ± 0.74	
562.8	11.5 ± 0.73	
591.5	14.8 ± 0.79	
621.7	19.8 ± 0.67	
651.6	17.3 ± 0.88	
679.5	16.7 ± 0.90	
710.1	17.8 ± 0.97	
576.6	12.6 ± 2.26	Bowen,et al. (1973)
625.6	14.4 ± 1.44	
674.3	15.4 ± 1.19	
733.6	18.5 ± 1.14	
796.1	20.7 ± 0.80	
413.6	12.3 ± 2.44	Carroll,et al. (1973)
440.9	11.3 ± 0.84	
478.3	12.7 ± 1.51	
501.7	13.3 ± 0.55	
557.0	16.7 ± 0.36	
607.9	18.3 ± 0.37	
661.1	19.8 ± 0.38	
712.2	20.3 ± 0.37	
759.2	20.9 ± 0.42	
788.3	21.1 ± 0.43	

6.2 散乱長

散乱長 a は式 (5.80) の s 波散乱振幅 f_0^+ から

$$a = \lim_{p_{CM}\to 0} f_0^+ \tag{6.10}$$

と定義される [13]。本論文では散乱振幅 f と M-matrix の関係は

$$f = -\frac{1}{8\pi\sqrt{s}}\mathcal{M} \tag{6.11}$$

であると約束する。散乱長 a は式 (6.10) と式 (6.11) より

$$a = -\frac{1}{8\pi(m_N + m_K)}\mathcal{M}(\sqrt{s} = m_N + m_K) \tag{6.12}$$

と書ける。

Born 近似において、振幅とポテンシャルの相対符号を負にとる事にする。この時、相互作用は

$$\begin{aligned} a > 0 &: \ \text{引力} \\ a < 0 &: \ \text{斥力} \end{aligned} \tag{6.13}$$

と決まる。式 (6.11) より

$$\begin{aligned} \mathcal{M} < 0 &: \text{引力} \\ \mathcal{M} > 0 &: \text{斥力} \end{aligned} \tag{6.14}$$

が成り立つ。

式 (6.12) より $I = 0$、$I = 1$ の s 波散乱長は表 6.5 と計算される。

表 6.5: $I = 0$、$I = 1$ の s 波散乱長 [fm]

	WT	Born	NLO	LO + NLO	文献値	
S_{11}	-0.42	-0.057	0.11	-0.37	-0.309 ± 0.02	Cameron et al. [14]
S_{01}	0.0	0.042	-0.24	-0.20	0.04 ± 0.04	Stenger et al. [15]

S_{11} については計算は符号も含めてデータと良く合っているが、S_{01} は符号も絶対値も既存のデータとは合っていない。計算では、しきい値 (threshold) における値は全散乱断面積のフィットに用いたデータの範囲外にあるので外挿によって決められている。従って、低エネルギー領域のデータがない事や、データがある範囲においてデータのばらつきが大きいことから値のずれが生じている可能性がある。

6.3 位相差

散乱振幅は部分波振幅 f_l を用いると弾性散乱の場合

$$f = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)f_l P_l(cos\theta) \tag{6.15}$$

$$f_l = \frac{e^{i\delta_l}\sin\delta_l}{k} \tag{6.16}$$

とあらわせる。このとき散乱断面積は部分波散乱断面積 σ_l を用いて

$$\sigma = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l \tag{6.17}$$

$$\sigma_l = \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)\sin^2\delta_l \tag{6.18}$$

と書き下せる [16]。いま tree-level を考えているので散乱振幅は実である。そこで式 (6.16) の二乗が式 (6.18) と結びついている事を用いて位相部分 $e^{i\delta_l}$ を落として考えることにする。すなわち

$$f_l = \frac{\sin\delta_l}{k} \tag{6.19}$$

として考えると位相差 δ_l は

$$\delta_l = \arcsin(kf_l) \tag{6.20}$$

で与えられる。

位相差は M-matrix を用いて

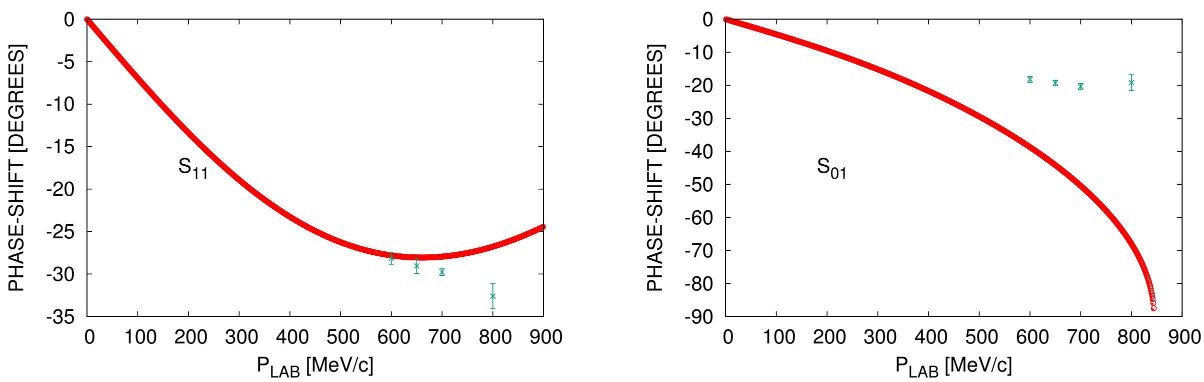
$$\delta_l = \arcsin\left(-k\frac{1}{8\pi\sqrt{s}}\mathcal{M}_l\right) \tag{6.21}$$

とあらわせる。式 (6.14) より、相互作用は

$$\begin{aligned} \delta_l > 0 &: \ \text{引力} \\ \delta_l < 0 &: \ \text{斥力} \end{aligned} \tag{6.22}$$

と決まる。

式 (6.21) を式 (5.80),(5.81),(5.82) に適用すれば $S_{11}, P_{11}, P_{13}, S_{01}, P_{01}, P_{03}$ についての位相差を計算できる (図 6.4)。



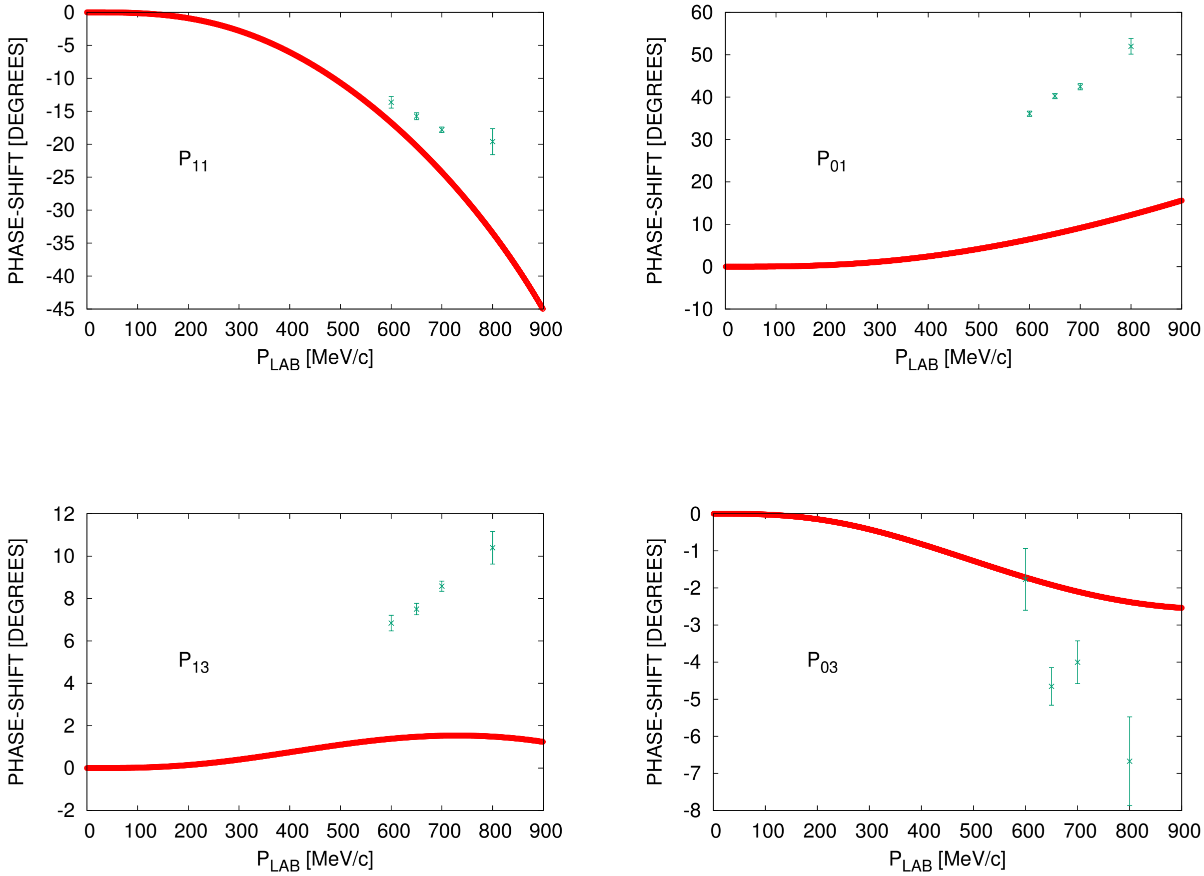
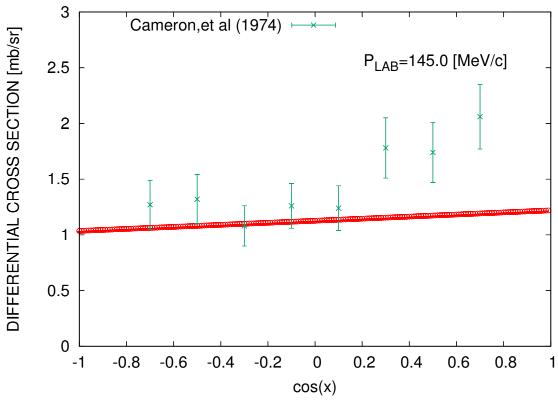


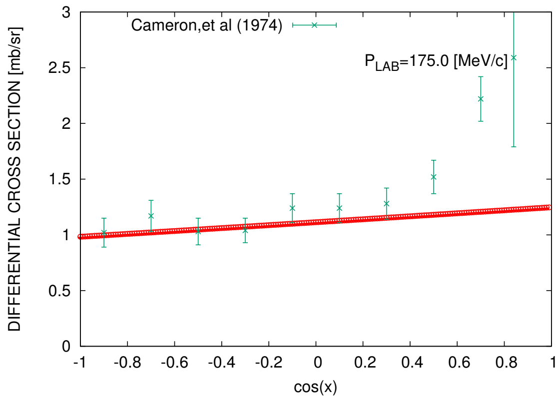
図 6.4: $I=1$, $I=0$ の s 波, p 波位相差である。データ点は [17] による。

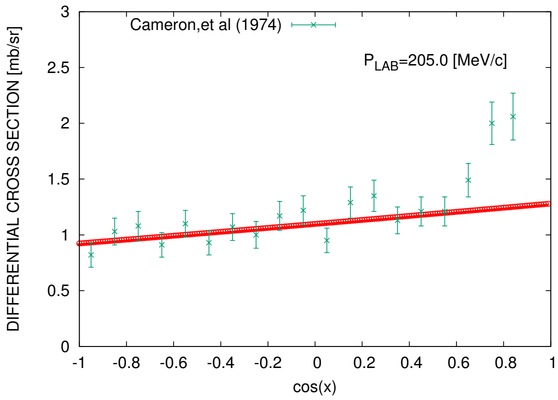
$I=1$ については数度のずれの範囲内で計算は合っているが $I=0$ の場合、計算のデータからのずれは大きい。しかしながら、位相差の文献値が $P_{LAB}=600$ MeV/c からしかないので、それより低いエネルギーで合うかどうかはわからない。高エネルギーにおいては $P_{LAB}=1500$ MeV/c までの位相差が計算されている [17]。従って、現状では計算の妥当性を示すためには、より高いエネルギー領域で比較するしかない。しかし、カイラル摂動論はエネルギーでのベキ展開になっているから P_{LAB} に依存して振幅は単調に増大する。そのため、高エネルギーにおける、ある時点で S 行列はユニタリティーを満たさなくなるので高エネルギーでは位相差が適切に記述できていない可能性がある。高エネルギー領域で厳密にユニタリティーを満たすようにするための unitalization[18] という手法がある。この手法を用いれば、より適切に高エネルギー領域の位相差 (散乱振幅) を記述できる可能性がある。

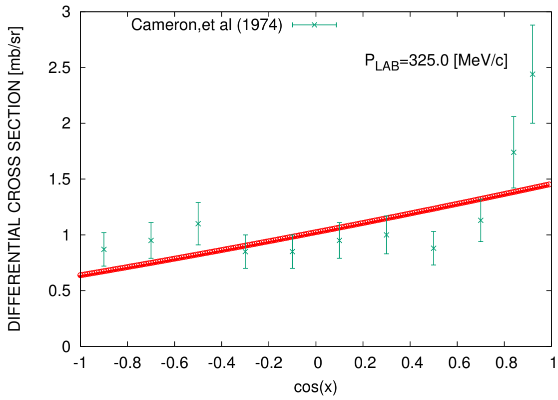
6.4　微分断面積

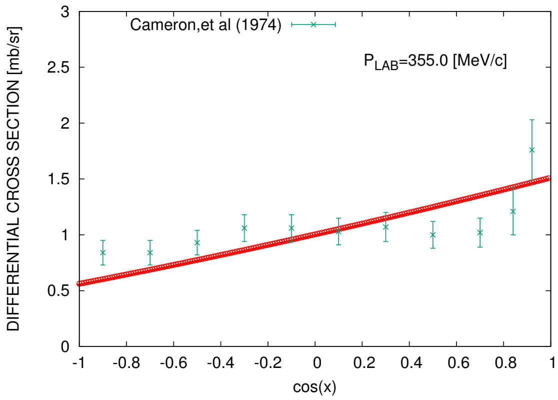
式 (6.6) を用いて $I=1$ 微分散乱断面積を求めた (図 6.5)。145 MeV/c $\leq P_{LAB} \leq$ 385 MeV/c の範囲で角度依存性は良く合っている。しかし P_{LAB}=500MeV/c からは角度依存性は一致しなくなる。低エネルギーにおいてデータが $x=0$ で大きな値を持つのはクーロン力によるものである。これを再現するためにクーロン力も考慮に入れる必要があり、今後の課題である。

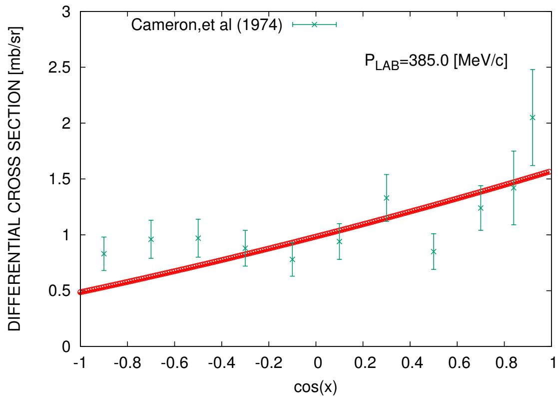

DIFFERENTIAL CROSS SECTION [mb/sr]
cos(x)
Cameron,et al (1974)
P_LAB=145.0 [MeV/c]
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

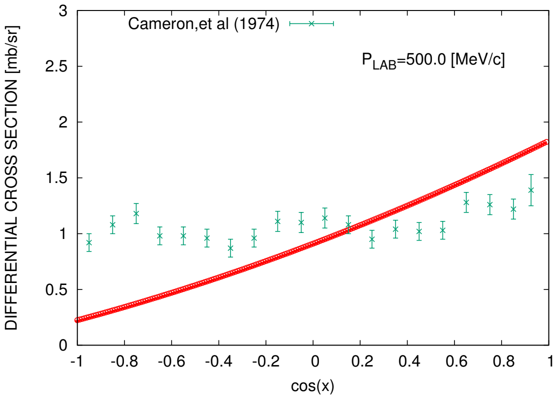

DIFFERENTIAL CROSS SECTION [mb/sr]
cos(x)
Cameron,et al (1974)
P_LAB=175.0 [MeV/c]
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


DIFFERENTIAL CROSS SECTION [mb/sr]
cos(x)
Cameron,et al (1974)
P_LAB=205.0 [MeV/c]
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


DIFFERENTIAL CROSS SECTION [mb/sr]
cos(x)
Cameron,et al (1974)
P_LAB=325.0 [MeV/c]
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


DIFFERENTIAL CROSS SECTION [mb/sr]
cos(x)
Cameron,et al (1974)
P_LAB=355.0 [MeV/c]
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


DIFFERENTIAL CROSS SECTION [mb/sr]
cos(x)
Cameron,et al (1974)
P_LAB=385.0 [MeV/c]
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1



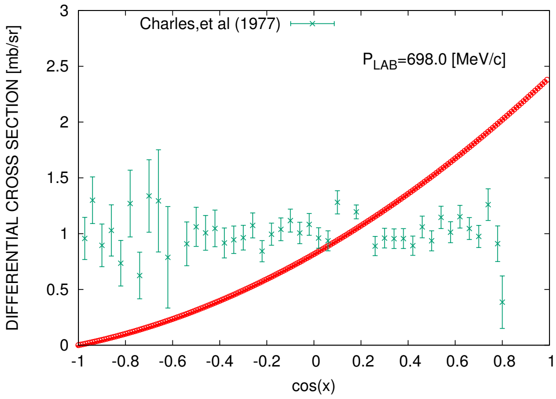


図 6.5: $I = 1$ の微分断面積である。データは [19, 20] による。

6.5　核媒質中における K^+ 自己エネルギー

カイラル摂動論を用いて散乱振幅を構成し、χ^2 フィットにより NLO に含まれる低エネルギー定数を決定した。このように構成した散乱振幅は、低エネルギーにおいて、ある程度実験を良く再現する。この散乱振幅を用いて K^+ の核媒質中における自己エネルギーを計算する。自己エネルギーは K^+ と核媒質の相互作用を与える量である。

原子核密度 ρ の原子核中における K^+ と核媒質の相互作用はクライン-ゴルドン方程式より得られる分散関係から

$$\left[E^2 - \vec{p}^2 - m_K^2 - \Sigma(E, \vec{p}, \rho)\right] \phi = 0 \tag{6.23}$$

であらわすことができる。$\Sigma(E, \vec{p}, \rho)$ は K^+ の自己エネルギーである。また $E, m_K, \vec{p}$ はそれぞれ K^+ のエネルギー、静止質量、３元運動量である。

予測される線形密度近似において自己エネルギーは

$$\Sigma_{\rm free} = \frac{1}{2m_N}\mathcal{M}(K^+N)_{\rm free}\rho \tag{6.24}$$

$$\mathcal{M}(K^+N)_{\rm free} = -8\pi\sqrt{s}b_{\rm free} \tag{6.25}$$

と表す事ができる。m_N、ρ、$\sqrt{s}$ はそれぞれ、核子の質量、原子核の密度、全エネルギーを表す。真空中の K^+N 散乱振幅は、しきい値で散乱長になる量 $b_{\rm free}$ でパラメトライズされる。一方で K^+-原子核散乱のデータに対するフィットから計算される自己エネルギー（実験に対応）は

$$\Sigma_{\rm fit} = \frac{1}{2m_N}\mathcal{M}(K^+N)_{\rm fit}\rho \tag{6.26}$$

$$\mathcal{M}(K^+N)_{\rm fit} = -8\pi\sqrt{s}b_{\rm fit} \tag{6.27}$$

と表す事ができる。この場合の K^+N 散乱振幅は、しきい値で散乱長になる $b_{\rm fit}$ でパラメトライズされる。$b_{\rm fit}$ は K^+-原子核散乱のデータを用いたフィットから決まる量である。E.Friedman と A.Gal の議論 [2] によると $Re\, b_{\rm fit}$ は $Re\, b_{\rm free}$ に比べてエネルギーに依存して 14% から 50% 大きく、また $Im\, b_{\rm fit}$ は $Im\, b_{\rm free}$ に比べてエネルギーに依存して 12% から 25% 大きくなる事がわかっている (表 6.6)。この事は K^+-原子核散乱に媒質効果が現れている事を示唆している。

表 6.6: K^+ の自己エネルギー [2]

P_{LAB} [MeV/c]	Σ	Reb_0 [fm]	Imb_0 [fm]
488	$\Sigma_{\rm fit}$	-0.203(26)	0.172(7)
	$\Sigma_{\rm free}$	-0.178	0.153
531	$\Sigma_{\rm fit}$	-0.196(39)	0.202(9)
	$\Sigma_{\rm free}$	-0.172	0.170
656	$\Sigma_{\rm fit}$	-0.220(50)	0.262(12)
	$\Sigma_{\rm free}$	-0.165	0.213
714	$\Sigma_{\rm fit}$	-0.242(53)	0.285(15)
	$\Sigma_{\rm free}$	-0.161	0.228

真空中と媒質中で自己エネルギーが異なることの原因の一部は波動関数のくりこみ (再規格化) によるものであることを説明する。式 (6.23) より伝搬関数は

$$\Pi(p) = \frac{i}{E^2 - \vec{p}^2 - m_K^2 - \Sigma(E, \vec{p}, \rho) + i\epsilon} \tag{6.28}$$

のように書ける。K^+ が核媒質に対して静止している場合である $\vec{p} = 0$ を考える。質量はプロパゲーターのポールにおいて与えられるので核媒質中の有効質量は

$$m_K^{*2}(\rho) \equiv m_K^2 + \Sigma(E = m_K^*, \vec{p} = 0, \rho) \tag{6.29}$$

で与えられる [21]。必要な部分は分散関係の on-shell 部分であるので自己エネルギーを $E^2 = m_K^{*2}$ のまわりで展開する。

$$\Sigma(E, \vec{p}, \rho) = \Sigma(E = m_K^*, \vec{p} = 0, \rho) + (E^2 - m_K^{*2}) \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial E^2}\right)_{E^2 = m_K^{*2}, \vec{p} = 0} + \cdots \tag{6.30}$$

プロパゲーターの分母は

$$\begin{aligned} E^2 - m_K^2 - \Sigma(E, \vec{p}, \rho) &\simeq E^2 - m_K^2 - \left[\Sigma(E = m_K^*, \vec{p} = 0, \rho) + (E^2 - m_K^{*2}) \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial E^2}\right)_{E^2 = m_K^{*2}, \vec{p} = 0}\right] \\ &= E^2 - m_K^{*2} - (E^2 - m_K^{*2}) \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial E^2}\right)_{E^2 = m_K^{*2}, \vec{p} = 0} \\ &= (E^2 - m_K^{*2}) \left[1 - \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial E^2}\right)_{E^2 = m_K^{*2}, \vec{p} = 0}\right] \end{aligned} \tag{6.31}$$

となる。式 (6.28) は

$$\Pi(p) = \frac{iZ}{E^2 - m_K^{*2} + i\epsilon} \tag{6.32}$$

$$Z = \left[1 - \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial E^2}\right)_{E^2 = m_K^{*2}, \vec{p} = 0}\right]^{-1} \tag{6.33}$$

で与えられる。このように核媒質中でハドロンは以下のような変更を受ける。

- 質量の変化
- 自己エネルギーにエネルギー依存性があるときは波動関数の規格化の変化

波動関数の規格化の変化の事を波動関数のくりこみと呼ぶ。波動関数の規格化が変わる事により物理量をはかる単位が変わってしまうので、その結果として物理量が変化するのである。

媒質中の自己エネルギーを $E^2 = m_K^2$ のまわりで展開すると

$$\begin{aligned} \Sigma(E, \vec{p}, \rho) &= \Sigma(E = m_K, \vec{p} = 0, \rho) + (E^2 - m_K^2) \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial E^2}\right)_{E^2 = m_K^2, \vec{p} = 0} \cdots \\ &\simeq \Sigma(E = m_K, \vec{p} = 0, \rho) \left[1 + \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial E^2}\right)_{E^2 = m_K^2, \vec{p} = 0}\right] \\ &\simeq Z\Sigma(E = m_K, \vec{p} = 0, \rho) \end{aligned} \tag{6.34}$$

のようにかける。ここで、第 2 式で高次の項を無視した。また、第 3 式で

$$Z = \left[1 - \left(\frac{\partial\Sigma}{\partial E^2}\right)_{E^2=m_K^2,\vec{p}=0}\right]^{-1} \simeq 1 + \left(\frac{\partial\Sigma}{\partial E^2}\right)_{E^2=m_K^2,\vec{p}=0} \tag{6.35}$$

という近似を行った。

これより Z の 1 からのずれを計算する事により波動関数くりこみの効果を計算できる。これは、線形密度近似を超えて ρ^2 の効果を計算する事に対応する。カイラル摂動論は 4 元運動量での展開であるのでエネルギーに依存する。従って、媒質の高次の効果の 1 つである、波動関数くりこみが大きいと予想して計算を行う。

対称核物質 $N = Z$ を考えた時,

$$\mathcal{M}(K^+p) = \mathcal{M}(I=1) \tag{6.36}$$

$$\mathcal{M}(K^+n) = \frac{1}{2}\left[\mathcal{M}(I=1) + \mathcal{M}(I=0)\right] \tag{6.37}$$

より K^+N 散乱の M-matrix は

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(K^+N) &= \frac{1}{2}\left[\mathcal{M}(K^+p) + \mathcal{M}(K^+n)\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[3\mathcal{M}(I=1) + \mathcal{M}(I=0)\right]\end{aligned} \tag{6.38}$$

で与えられる。また原子核の密度 ρ は

$$\rho_p = \rho_n = \frac{\rho}{2} \tag{6.39}$$

で与えられる。よって自己エネルギーは

$$\begin{aligned}\Sigma &= \frac{1}{2m_N}\left[\mathcal{M}(K^+p)\rho_p + \mathcal{M}(K^+n)\rho_n\right] \\ &= \frac{1}{4m_N}\left[\mathcal{M}(K^+p) + \mathcal{M}(K^+n)\right]\rho \\ &= \frac{1}{8m_N}\left[3\mathcal{M}(I=1) + \mathcal{M}(I=0)\right]\rho\end{aligned} \tag{6.40}$$

と書き下せる。ここでは前方散乱のみを考える。この散乱振幅を用いて波動関数くりこみを計算した (表 6.7)。

表 6.7: 波動関数のくりこみ

P_{LAB} [MeV/c]	Z (WT)	Z (Born)	Z (NLO)	Z (LO+NLO)
488.0	$1 + 0.058\frac{\rho}{\rho_0}$	$1 - 0.029\frac{\rho}{\rho_0}$	$1 + 0.001\frac{\rho}{\rho_0}$	$1 + 0.030\frac{\rho}{\rho_0}$
531.0	$1 + 0.056\frac{\rho}{\rho_0}$	$1 - 0.028\frac{\rho}{\rho_0}$	$1 + 0.001\frac{\rho}{\rho_0}$	$1 + 0.029\frac{\rho}{\rho_0}$
656.0	$1 + 0.049\frac{\rho}{\rho_0}$	$1 - 0.023\frac{\rho}{\rho_0}$	$1 + 0.001\frac{\rho}{\rho_0}$	$1 + 0.027\frac{\rho}{\rho_0}$
714.0	$1 + 0.047\frac{\rho}{\rho_0}$	$1 - 0.022\frac{\rho}{\rho_0}$	$1 + 0.002\frac{\rho}{\rho_0}$	$1 + 0.027\frac{\rho}{\rho_0}$

波動関数のくりこみにより自己エネルギーが 3% 程度正の方向に増加した。しかし、表 6.6 にあるような 15% $\sim$ 50% の増加を再現する事はできなかった。

計算では Born 項が負の方向に大きく効いている事がわかる。全散乱断面積を WT 項、Born 項、NLO 項に分けてプロットする (図 6.6、図 6.7)。Born 項の全散乱断面積 (散乱振幅の大きさ) が小さい事がわかる。そのため、χ^2 フィットによる constraint にかかっていない可能性がある。

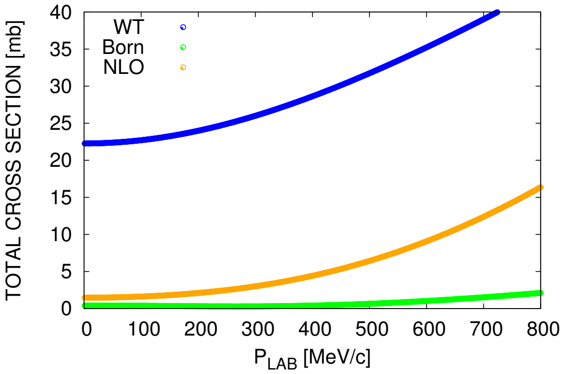


図 6.6: $I = 1$ の全散乱断面積

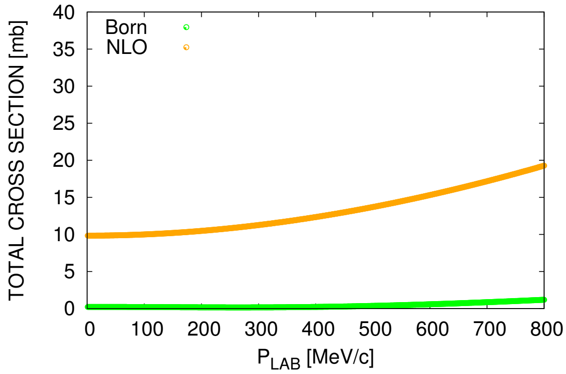


図 6.7: $I = 0$ の全散乱断面積

また、散乱振幅を構成する際に on-shell 条件 $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$ を用いた。on-shell 条件を用いたので E と $|\vec{p}|$ は独立ではない。つまり E と $|\vec{p}|$ が独立な時と微分の向きが違うのである。本来は E についての微分であるが E を変化させると $|\vec{p}|$ も変化してしまう。よって正しい微分の向きで計算するためには off-shell で散乱振幅を構成する必要がある。

以上の原因により予想よりも波動関数くりこみの効果が小さい事や P_{LAB} 依存性が再現できなかったと予想される。しかし、自己エネルギーが増加する原因の一部は波動関数のくりこみによるものである事を示す事ができた。

第 7 章

まとめ

カイラル摂動論の NLO までの計算で $K^+N \to K^+N$ 散乱振幅を構成した。そして、全散乱断面積のデータを用いた χ^2 フィットから NLO に含まれる低エネルギー定数を決めた。その際、$I=1, I=0$ それぞに 2 つの最適値が存在するので $K^+n \to K^+n$ 微分散乱断面積から角度依存性を最も良く再現する最適値の組を採用した。この採用した値を用いると $I=1$ の微分散乱断面積も低エネルギーで良く再現される。

このようにして、χ^2 法より採用された低エネルギー定数を用いて散乱長、位相差を計算した。また、K^+ 自己エネルギーの計算より媒質効果の一部は波動関数のくりこみに起因する事を示した。

散乱長は χ^2 フィットに用いたデータの存在する領域からの外挿で決められているので、フィットに用いたデータのばらつきが大きい場合や、低エネルギーにおけるデータの不足がある場合、文献値を再現しない事が明らかになった。

位相差は低エネルギーでの文献値が存在しない事から、より高いエネルギー領域での振る舞いを比べる必要がある。しかし、カイラル摂動論はエネルギーでの摂動展開であるから高エネルギー領域については有効ではない。よって高エネルギー領域で適切な記述をするために unitalization を行う必要があると考えられる。この時、unitalization により新たな不定パラメーターが現れるので再び χ^2 フィットを行う必要がある。

波動関数のくりこみにより K^+ 自己エネルギーは媒質中で 3% 程度、正の方向に増加する事を示した。しかし、データに基づく解析では媒質中で 15 % ～ 50 % 程度、自己エネルギーが増える事を示しているので、計算では、その一部しか示す事ができなかった。原因としては on-shell 条件を用いて散乱振幅を構成した事と Born 項の大きさが非常に小さいため χ^2 フィットの constraint にかかっていないためであると考えられる。

今後の展望として、本論文では媒質の高次の効果の 1 つである波動関数くりこみを計算したので、その他の媒質効果についても考慮したい。また、核媒質中におけるハドロンの振る舞いの変化をクォーク凝縮と結びつけ、カイラル対称性の部分的回復の帰結としてハドロンの振る舞いが変化する事を示したい。

謝辞

本論文を執筆するにあたり多くの時間を割いて指導して頂き、楽しい物理の時間を与えて下さった慈道大介准教授に感謝します。同期の芝田健仁君、柳田秀明君、清水慎一郎君との交流は研究の合間の何よりもの息抜きになりました。最後に私を様々な面で支えて下さった家族に感謝します。

参考文献

[1] K.Suzuki et al.,Phys.Rev.Lett. 92 (2004) 072302

[2] E. Friedman,A. Gal, Phys.Rept.452:89-153,2007

[3] W.Weise, Nuovo Cim. A102 (1989) 265-279

[4] D.Bugg et al.,Phys.Rev.,168,1466(1968)

[5] S.Scherer and M R.Schindler, A Primer for Chiral Perturbation Theory (Springer)

[6] A. Pich, arXiv:hep-ph/9806303.

[7] T.Bowen et al.,Phys.Rev.2D(1970) 2599.

[8] C.J. Adams et al.,Phys.Rev. D4 (1971) 2637-2641

[9] T.Bowen et al.,Phys.Rev.7D(1973) 22.

[10] A.S Carroll et al.,Phys.Lett. B45 (1973) 531-534

[11] C.J.S Damerell et al.,Nucl.Phys. B94 (1975) 374

[12] G.Giacomelli et al.,Nucl.Phys. B56 (1973) 346-355

[13] J.M. Eisenberg and D. Koltun, Theory of Meson Interactions with Nuclei (Wiley, New York, 1980) Chapter 2.

[14] W. Cameron et al,, NucI. Phys. B78 (1974) 93.

[15] V.J. Stenger et al., Phys. Rev. 134B (1964) 1111.

[16] N.Zettili, Quantum Mechanics:concepts and applications 2nd ed. (Wiley, New York,2009) Chapter 11.

[17] K.Hashimoto, Phys.Rev. C29 (1984) 1377-1395

[18] T.Hyodo and D.Jido,Prog.Part.Nucl.Phys.67:55-98,2012

[19] W.Cameron et al.,Nucl.Phys. B78 (1974) 93

[20] B.J. Charles et al.,Nucl.Phys. B131 (1977) 7-53

[21] W. Weise, Nucl. Phys. A 690 (2001) 98.