

# 修士学位論文

ボソン・フェルミオン混合系の  
平均場近似による基底状態相図の研究

指導教授 堀田 貴嗣 教授

平成 28年 2月 18日 提出

首都大学東京大学院

理工学研究科 物理学専攻

学修番号 14879331

氏名 松尾 正裕

## 学位論文要旨 (修士 (理学))

論文著者名 松尾 正裕

論文題名：ボソン・フェルミオン混合系の平均場近似による  
基底状態相図の研究

近年、原子気体の冷却技術が著しく発展し、冷却原子気体や光格子に関する研究が注目を集めている。冷却された原子気体を磁気トラップし、そこにレーザー光によるポテンシャルを導入することで光格子が実現されるが、光格子の実験では、レーザー光によって原子気体の粒子間相互作用を調節することができるため、冷却原子系の制御が可能になる。また、冷却原子気体ではナノケルビンという極低温が実現されるため、量子現象を観測することができる。このように、光格子において量子現象を制御しながら取り扱うことができるようになったことから、理論的な手法による量子モデルの研究に対して、“実験的な量子シミュレータ”として光格子は脚光を浴びている。また、量子現象を利用することではじめて実現される「正確さ」や「高速性」を積極的に活用した光格子時計や量子コンピュータなど、工学的な応用技術の面からも、大きな期待が寄せられている。

本研究では、このような背景を踏まえつつ、冷却原子系の基礎物性の理解を目指して、ボソンとスピンレスフェルミオンの混合系を解析した。特に、ボソンに関するモット絶縁体・超流動 (MI-SF) 転移やフェルミオンに関するバンドギャップの形成に対するボソン・フェルミオン間相互作用の影響を調べた。

本研究で用いるボソン・フェルミオン混合系のモデルは次のとおりである。

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \mathcal{H}_B + \mathcal{H}_F + \mathcal{H}_{BF} \\ \mathcal{H}_B &= -t_B \sum_{\langle i,j \rangle} (b_i^\dagger b_j + b_j^\dagger b_i) + \frac{U_B}{2} \sum_i n_{Bi}(n_{Bi} - 1) - \mu_B \sum_i n_{Bi} \\ \mathcal{H}_F &= -t_F \sum_{\langle i,j \rangle} (c_i^\dagger c_j + c_j^\dagger c_i) - \mu_F \sum_i n_{Fi} \\ \mathcal{H}_{BF} &= U_{BF} \sum_i n_{Bi} n_{Fi}\end{aligned}$$

ここで、 $b_i$  と  $c_i$  はボソンとフェルミオンの消滅演算子、 $n_{Bi} = b_i^\dagger b_i$ 、 $n_{Fi} = c_i^\dagger c_i$ 、 $t_B$  と  $t_F$  はボソンとフェルミオンの跳び移り積分、 $\langle i, j \rangle$  は隣接サイトのペア、 $U_B$  と  $U_{BF}$  はボソン・ボソン間およびボソン・フェルミオン間相互作用、 $\mu_B$  と  $\mu_F$  はボソンおよびフェルミオンの化学ポテンシャルである。

本研究では、このハミルトニアンを平均場近似によって解析した。サイトを A と B の副格子に分け、ボソンとフェルミオンのそれぞれに対して平均場を導入し、自己無撞着に決定した。なお、フェルミオン数はサイトあたり 0.5 個に固定した。結果は以下の通りである。

図 1 は、フェルミオン系のバンドギャップの大きさと A, B 各サイトにおけるボソン数  $n_a, n_b$  を  $U_{BF}$  の関数としてプロットしたものである。 $U_{BF}$  が小さいときは  $n_a = n_b$  であり、フェルミオン系は金属的であるが、 $U_{BF}$  が大きくなると  $n_a \neq n_b$  となり、フェルミオン系はバンド絶縁体となる。また、図 2 はボソンのみの、図 3 は  $U_{BF}=5$  のときのボソンについての MI-SF 相図を表しているが、 $U_{BF}$  の効果により、全体的に MI 相の突起が大きく張り出してくることがわかる。なお、図 3 では化学ポテンシャルは  $U_{BF}$  によってシフトしている。これらのことから、 $U_{BF}$  によってボソンとフェルミオンが互いに避け合うことで A サイトと B サイトのボソンおよびフェルミオン数に偏りが生じ、ボソンとフェルミオンが共に動きにくくなると考えられる。

ここでは A, B 副格子に分けた 1 次元系の結果を紹介したが、さらに長周期の構造を考えたり、高次元に拡張したりすることにより、相分離などの新たな量子状態が発現することについても議論する予定である。

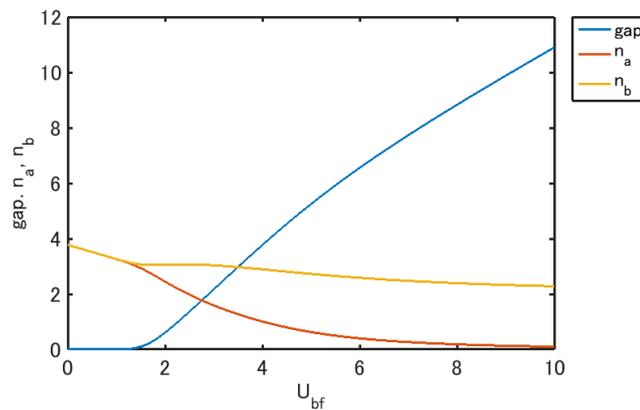


図 1 : フェルミオン系のバンドギャップとボソン数の  $U_{BF}$  依存性

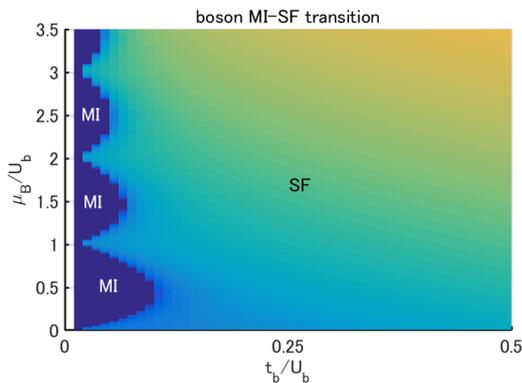


図 2 : ボソン系の MI-SF 相図

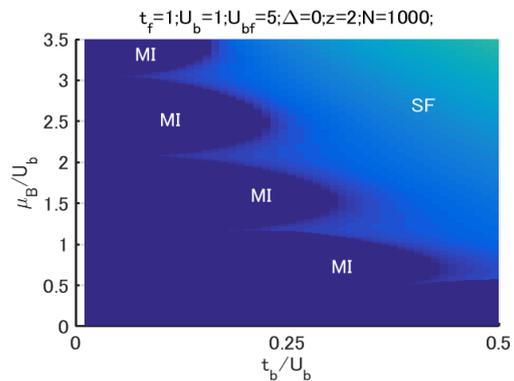


図 3 :  $U_{BF}=5$  のときの MI-SF 相図

ボソン・フェルミオン混合系の平均場近似による  
基底状態相図の研究

2016年2月17日

首都大学東京大学院理工学研究科物理学専攻

松尾 正裕

## 目次

1	研究背景	3
1.1	冷却技術と光格子 . . . . .	3
2	ボソン系の理論研究 (レビュー)	6
2.1	ボソン系の MI-SF 相図 . . . . .	6
3	ボソン・フェルミオン混合系	9
3.1	ボソン・フェルミオン混合系の厳密対角化法による解析 . . . . .	9
3.2	ボソンとスピンレスフェルミオンの混合系 . . . . .	13
3.3	平均場の導入 . . . . .	14
3.4	計算方法 . . . . .	16
3.5	ボソンの MI-SF 相図: $U_{bf}$ が小さな場合 . . . . .	17
3.6	ボソンの MI-SF 相図: $U_{bf}$ が大きな場合 . . . . .	20
3.7	フェルミオンの金属絶縁体転移 . . . . .	22
3.8	フェルミオンの金属絶縁体転移 (2次元の場合) . . . . .	25
4	まとめと展望	26
5	謝辞	27
	参考文献	28

# 1 研究背景

## 1.1 冷却技術と光格子

最近、原子気体の冷却技術が著しく進歩したことで、冷却原子気体や光格子に関する研究が注目を集めている。[1]~[9] 極低温での原子気体 (冷却原子気体) を磁気トラップし、そこへ図 1 のように原子気体にレーザー光を対抗的に照射して干渉させることで周期ポテンシャルを与えると、原子気体がポテンシャルの一番低い場所に周期的に配列する。あたかも原子が格子状に配列しているように見えるので、光格子と呼ばれる。[1],[2]

光格子の実験では、レーザー光の強度を変化させることで冷却原子気体の粒子間相互作用を調節することができるため、冷却原子系の制御が可能になる。また、冷却原子気体ではナノケルビンという極低温が実現されるため、量子現象を観測することができる。このように、光格子において量子現象を制御しながら取り扱うことができるようになった。この実験技術を用いることで、光格子の中で量子モデルを再現し、量子現象を直接的に扱い制御する“実験的な量子シミュレータ”として光格子は脚光を浴びている。[1],[2]

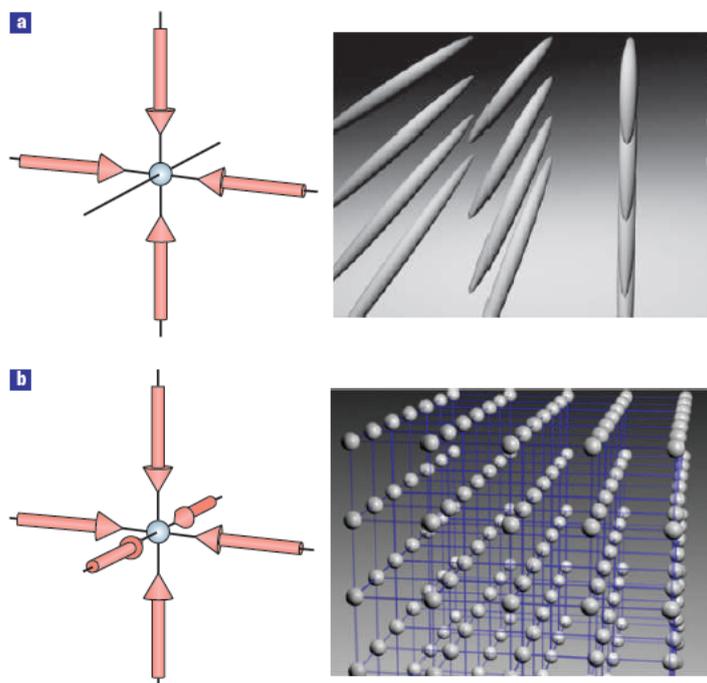


図 1 光格子のレーザー照射をした時の模式図。 [1] a は 2 次元、b は 3 次元の光格子を表したものである。

また、量子現象を利用することではじめて実現される「正確さ」や、量子現象特有の「不確かさ」を利用してアルゴリズムを構築することで「計算の高速性」を積極的に活用した光格子時計や量子コンピュータなど、工学的な応用技術の面からも、大きな期待が寄せられている。例えば光格子時計では、2015年に東京大学の香取教授らにより、宇宙年齢138億年で1秒も狂わないほどの高精度化に成功した。[10] これは現在実用化されているセシウム時計よりもさらに1000倍程度精度が高く、「1秒の定義」の見直しが求められているだけでなく、相対論的な時間の遅れなどを正確に測ることができるため、新たな計測ツールとしての活用、また、物理定数の高精度化などにも寄与することができるので、今後の応用に期待されている。

このように、光格子を用いて量子効果を扱う技術の向上により、今までは考えられなかったような高速性や高精度な技術の実現が可能になるということで、光格子は現在、大変注目されている。

さて、光格子は上述の通り、現在研究が盛んに行われているが、ここで冷却技術の歴史について、特にボース・アインシュタイン凝縮について少し振り返ってみたい。[4] ボース・アインシュタイン凝縮は古くから理論研究がされていて、1925年にアインシュタインによりボース理想気体の理論が構築され、その中でボース・アインシュタイン凝縮について理論的に予言されている。極低温における物理現象に関する実験は20世紀初頭から行われていて、1908年にカマリング・オンネスがヘリウムの液化に成功、1911年には水銀の超伝導を発見した。なお、カマリング・オンネスは1913年にヘリウムの液化によりノーベル物理学賞を受賞した。その後、カピッツァが液体ヘリウム $^4\text{He}$ における超流動を発見したのが1938年である。 $^4\text{He}$ はボソンであり、 $^3\text{He}$ はフェルミオンであるため、 $^4\text{He}$ は超流動にならないと考えられていたが、1972年に、リー、オシエロフ、リチャードソンが、液体ヘリウム $^3\text{He}$ における超流動を発見した。リー、オシエロフ、リチャードソンが $^3\text{He}$ の超流動発見のためノーベル物理学賞を受賞したのは1996年のことである。レーザー冷却の実験が注目されるようになったのは1980年代からであるが、レーザー光を用いて原子を冷却および捕捉する手法の開発によりチュー、コーエン=タヌージ、フィリップスが1997年にノーベル物理学賞を受賞した。また、実験的にレーザー冷却によってボース理想気体におけるボース・アインシュタイン凝縮が観測されたのが1995年であり、2001年に、この実験的観測によりコーネル、ケターレ、ワイマンがノーベル物理学賞を受賞している。さらに、冷却原子気体でのフェルミオン超流動が観測されたのが2004年であり [5]~[9]、光格子中でのボソン・フェルミオン混合系の実験は2011年に行われている。[11]

量子力学や量子現象に関する研究は20世紀初頭から行われていたにもかかわらず、冷

却原子気体によるボース・アインシュタイン凝縮が実験的に観測されたのが1995年ということは、極低温における量子力学の実験がいかに難しいかを物語っている。レーザー冷却や磁気トラップなどの実験手法が開発されてきたことにより、今までは考えられてこなかった量子現象について、理論、実験の両方から研究することができるようになり、そのような背景もあるため、基礎研究、応用研究ともこの冷却原子気体の研究はおおいに注目を集めている。

このような背景から、本研究では、冷却原子系におけるボソン・フェルミオン混合系の振る舞いについて、ボソン系やフェルミオン系の単独の系とはどのように振る舞いが異なるのか、ということについて研究した。2章では先行研究としてボソン系におけるモット絶縁体-超流動転移について解説し、3章では実際に計算したボソン・フェルミオン混合系についての定義、計算手法やその結果について述べ、そして最後に、4章でこの論文をまとめ、今後の展望について議論する。

## 2 ボソン系の理論研究（レビュー）

この章では、ボソン系の理論における先行研究について述べる。1980年代ではフェルミオンの金属絶縁体転移について盛んに研究がおこなわれていたが、フィッシャーらによりボソン系の超流動絶縁体転移について研究された。[12] フィッシャーらによると、周期ポテンシャル（格子）中にあるゼロ温度のボソン系は、超流動状態とモット絶縁体状態の2つの状態になる。ランダムポテンシャル中ではさらにボースグラス状態もあるが、本研究ではこのようなポテンシャルは考えないので議論しない。

今回は、ルらにより研究された、ゼロ温度における2次元ハニカム格子中での超流動絶縁体転移について紹介する。

### 2.1 ボソン系の MI-SF 相図

ルらの研究では、次のように研究されている。[13] まず、図2のような、2次元ハニカム格子を A, B の2つの副格子に分け、ボース・ハバードモデルのハミルトニアン  $\mathcal{H}$  を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & -t \sum_{\langle i,j \rangle} (a_i^+ b_j + b_j^+ a_i) + \frac{U_A}{2} \sum_{i \in A} n_{Ai} (n_{Ai} - 1) \\ & + \frac{U_B}{2} \sum_{j \in B} n_{Bj} (n_{Bj} - 1) - \mu \left( \sum_{i \in A} n_{Ai} + \sum_{j \in B} n_{Bj} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $a_i, a_i^+, b_i, b_i^+$  はそれぞれ A 副格子、B 副格子におけるボソンの生成消滅演算子、 $n_{Ai} = a_i^+ a_i, n_{Bj} = b_j^+ b_j$  は数演算子、 $t$  はボソンの隣り合う別の副格子に対する跳び移り積分、 $U_A, U_B$  はそれぞれ A 副格子、B 副格子におけるオンサイト相互作用、 $\mu$  は化学ポテンシャルである。次に、平均場を  $\phi_a = \langle a_i^+ \rangle = \langle a_i \rangle$ 、 $\phi_b = \langle b_i^+ \rangle = \langle b_i \rangle$  と定義する。 $\phi_a, \phi_b$  は実数に制限する。この平均場はオーダーパラメータになっており、 $\phi_a \neq 0, \phi_b \neq 0$  となる状態が超流動状態であると定義される。ホッピングの項に平均場近似を用いると

$$a_i^+ b_j = \phi_a b_j + a_i^+ \phi_b - \phi_a \phi_b \quad (2)$$

$$b_j^+ a_i = \phi_b a_i + b_j^+ \phi_a - \phi_a \phi_b \quad (3)$$

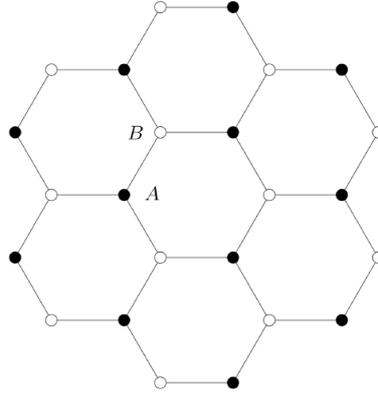


図2 2次元ハニカム格子。黒丸がA副格子、白丸がB副格子を表す。[13]

とかける。これらを用いると、ハミルトニアンを  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A + \mathcal{H}_B$  のように副格子ごとに分割することができ、

$$\mathcal{H}_A = -zt \sum_{i \in A} \phi_b(a_i + a_i^+) + \frac{U_A}{2} \sum_{i \in A} n_{Ai}(n_{Ai} - 1) - \mu \sum_{i \in A} n_{Ai} \quad (4)$$

$$\mathcal{H}_B = -zt \sum_{j \in B} \phi_a(b_j + b_j^+) + \frac{U_B}{2} \sum_{j \in B} n_{Bj}(n_{Bj} - 1) - \mu \sum_{j \in B} n_{Bj} \quad (5)$$

とかける。ここで、 $z$  は配位数である。今回は2次元ハニカム格子を化が得ているので、 $z = 3$  である。以上により、A副格子、B副格子とも独立に考えることができるようになった。さらに、1サイトハミルトニアンを導入して

$$h_A = -zt\phi_b(a + a^+) + \frac{U_A}{2}n_A(n_A - 1) - \mu n_A \quad (6)$$

$$h_B = -zt\phi_a(b + b^+) + \frac{U_B}{2}n_B(n_B - 1) - \mu n_B \quad (7)$$

と書くことにする。ここで、1サイトなのでサイト表示の  $i, j$  は無視した。この(6), (7)の2式から  $\phi_a$  と  $\phi_b$  を自己無撞着に計算する。

図3と図4に  $U_A = U_B$ ,  $U_B = 1.2U_A$  のときの2つの場合における計算結果の相図を示す。MIはモット絶縁体状態で  $\phi_a = \phi_b = 0, n_a = n_b$ 、SFは超流動状態で  $\phi_a = \phi_b \neq 0, n_a = n_b = n$ 、MSは変調された超流動状態で  $\phi_a \neq \phi_b \neq 0, n_a \neq n_b$ 、DWは密度波状態で  $\phi_a = \phi_b = 0, n_a \neq n_b$  の相を表す。図3で一番下にある  $n = 1$  でのMI相の最先端部は  $t/U_A = 0.057$  まで伸びている。ヤクシュらの研究[14]によると、2次元正方格子の場合は、この値が0.043になっていることから、ハニカム格子では転移しにくいことが示されている。これは、配位数  $z$  の効果によるものである。また、図4において一番下にある  $n = 1$  でのMI相の突起は  $t/U_A = 0.062$  まで伸びている。

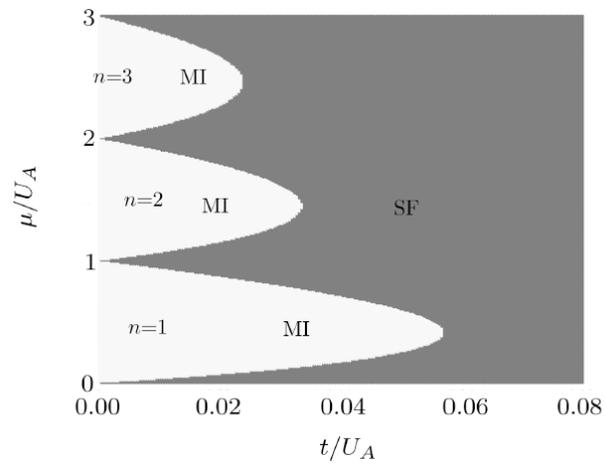


図3  $U_A = U_B$  のときの相図 [13]。一番下にある  $n = 1$  での MI 相の最先端部は  $t/U_A = 0.057$  まで伸びている。

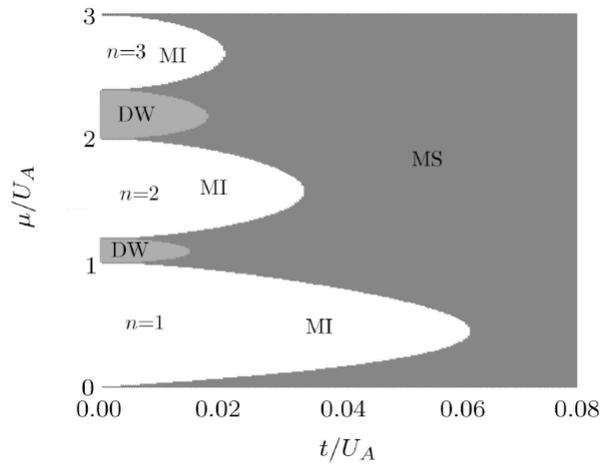


図4  $U_B = 1.2U_A$  のときの相図 [13]。一番下にある  $n_a = n_b = 1$  での MI 相の突起は  $t/U_A = 0.062$  まで伸びている。また、図3の時とは違い、DW 相が MI 相の間に出現している。

### 3 ボソン・フェルミオン混合系

ここでは、ボソン・フェルミオン混合系の解析について述べる。初めに、スピンのあるフェルミオンとボソンの混合系を厳密対角化法を用いて解析した結果について述べる。厳密対角化法における計算では、系の基底状態について求めたが、超流動や超伝導については考慮していない。ただし、相分離の兆候が見られたので、それについて紹介する。

次節以降ではスピンレスフェルミオンとボソンの混合系を平均場近似により解析したことについて述べる。先行研究にならい、平均場近似を導入し、ボソン系と比較することで、ボソン・フェルミオン間相互作用の影響について考察する。

#### 3.1 ボソン・フェルミオン混合系の厳密対角化法による解析

ボソン・フェルミオン混合系（スピンありのフェルミオン）におけるハバードモデルの厳密対角化の計算結果について紹介する。ただし、前章で扱ったボソンの超流動についてはこの節で扱う厳密対角化の範囲では議論できないことに注意しておく。ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & t_f \sum_{\langle i,j \rangle} (c_{i\sigma}^+ c_{j\sigma} + \text{h.c.}) + t_b \sum_{\langle i,j \rangle} (b_i^+ b_j + \text{h.c.}) + U_f \sum_i n_{fi\uparrow} n_{fi\downarrow} \\ & + \frac{U_b}{2} \sum_i n_{bi} (n_{bi} - 1) + U_{bf} \sum_i n_{fi} n_{bi} \end{aligned} \quad (8)$$

で与えられる。ここで、 $t_f, t_b$  はそれぞれフェルミオン、ボソンのホッピング、 $c_{i\sigma}, c_{i\sigma}^+, b_i, b_i^+$  はそれぞれフェルミオン、ボソンの生成消滅演算子、 $\sigma$  はスピン、 $n_{fi} = n_{fi\uparrow} + n_{fi\downarrow}, n_{fi\sigma} = c_{i\sigma}^+ c_{i\sigma}$  はフェルミオンの数演算子、 $n_i^b = b_i^+ b_i$  はボソンの数演算子、 $U_f, U_b, U_{bf}$  はそれぞれフェルミオン間、ボソン間、ボソン・フェルミオン間のオンサイト相互作用である。フェルミオンはハーフフィリング、ボソンは任意の数（ただし粒子数は固定）として、1次元鎖の2サイト、4サイトの場合においてそれぞれハミルトニアンを厳密対角化法を用いて解析した。厳密対角化法によって得られた基底状態は以下の通りである。

図5は、2サイトでボソン2個の場合である。S, T というのは、フェルミオンの状態を示していて、Sはフェルミオンが各サイトに1つずつある状態、Tはフェルミオンが1つのサイトに2つ存在する状態を表す。 $U_{bf}$  が強い引力の場合はボソン、フェルミオンが全て同じサイトにいる状態、 $U_{bf}$  があまり大きくない引力や斥力の場合は1つずつ各サイトにいる状態、 $U_{bf}$  が強い斥力の場合はボソン、フェルミオンごとに分離、のいずれかの状

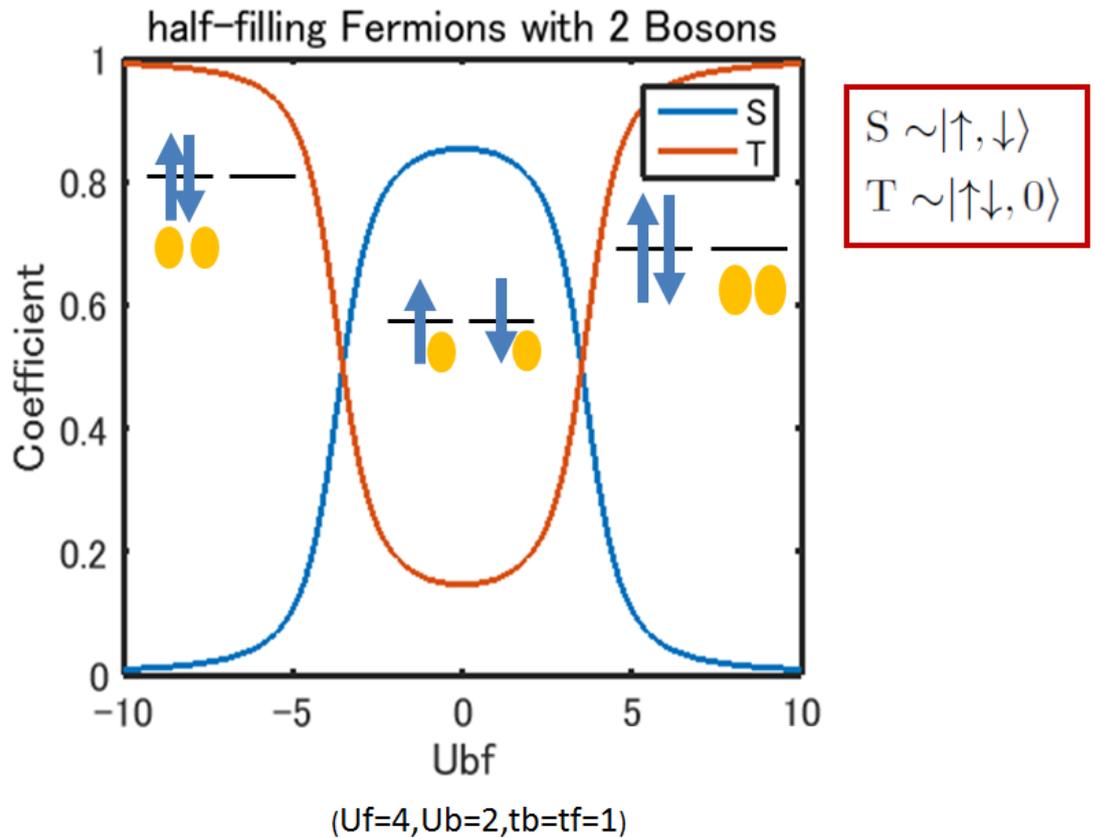


図5 2サイトの場合の厳密対角化法による波動関数の基底状態を描いた図。フェルミオンの基底をSとTで分類した。Sは各サイトに一つずつ入っている状態、Tは1つのサイトに2つのフェルミオンがまとまっている状態を表している。 $U_{bf} = 3$  ぐらいのところでは、SとTの状態が半分ずつ混ざっていて、フェルミオンの状態が自由フェルミオン状態と同じ基底状態を取っていることがわかる。

態が実現する。これらの状態は概ね  $U_{bf} \simeq \pm(U_f + U_b)/2$  を境に分かれることから、 $U_{bf}$  の効果は  $U_b$  や  $U_f$  の大きさと比べて大きいときに、ボソン・フェルミオン系はボソン系やフェルミオン系では実現しないような振る舞いをすると考えられる。

図6は、4サイトでボソン4個の場合を示している。フェルミオンについて、様々な状態があるが、便宜上、B,M,Sと3つのくりに分類し、さらに配置からBとMでは2つに分ける。Bはフェルミオンが2つ存在するサイトが2つと空のサイトが2つの場合。Mはフェルミオン2つのサイトが1つとフェルミオン1つのサイトが2つ、空のサイトが1つの場合。Sはフェルミオンが各サイトに1つずつの場合。配置については、例が図の中に示されている通りである。2サイトと比べて様々な状態が実現するが、基本

的には、2 サイトと定性的な振る舞いは同じである。すなわち、 $U_{bf} \simeq \pm(U_f + U_b)/2$  を境にボソンやフェルミオンの状況が大きく変化する。特に、基底状態とフェルミ球 ( $U_f = U_b = U_{bf} = 0$  としたときの波動関数) との内積を取った場合、図 7 のようになり、 $U_{bf} \simeq \pm(U_f + U_b)/2$  を境に急激に状態が変化していることがわかる。また、 $U_{bf}$  が十分大きい場合には、ボソン、フェルミオンは相分離する傾向にあることがわかった。ボソン・フェルミオン混合系に関する他の論文や解説記事 [2],[11] によると、ボソン、フェルミオンの状態が相分離することからも、この傾向には妥当性があると考えられる。

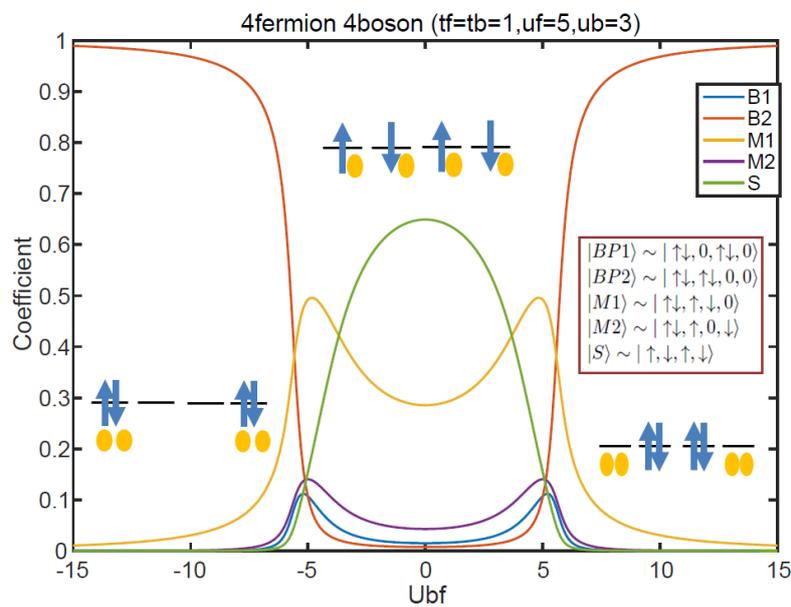


図 6 4 サイトの場合の基底状態の波動関数。2 サイトの場合と同様に、フェルミオンの配置の状態を 5 種類に分類した。 $U_{bf}=4$  付近で状態が入れ替わっていることがわかる。 $U_{bf}$  が大きい場合には、フェルミオンとボソンは交互に配置せず、隣り合うサイトにまとめて配置されている。これにより、相分離の傾向があると考えられる。

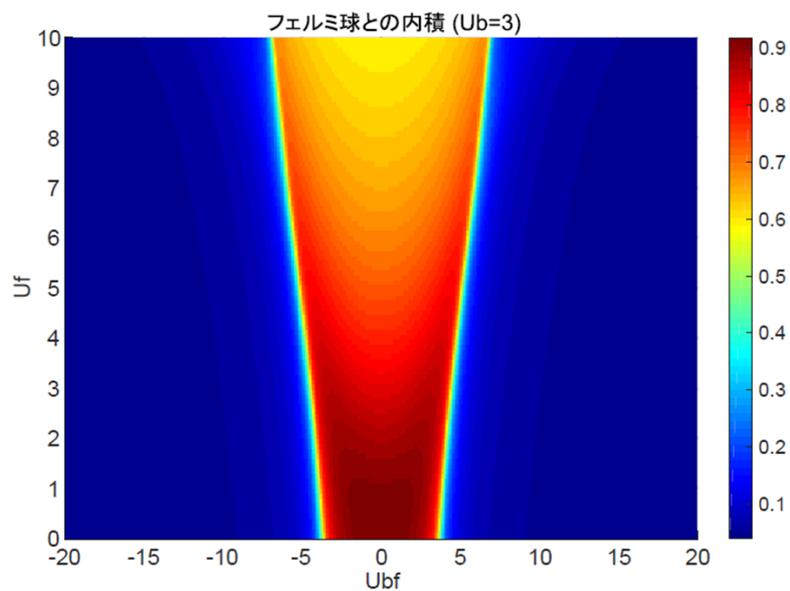


図 7 フェルミ球との内積 (4 サイト)。ボソンが入っているため、フェルミ球は  $U_b = U_f = U_{bf} = 0$  として定義しているため、自由フェルミオンと自由ボソンの直積である。赤い部分が内積の値が 1 に近く、金属に近い状態で、青い部分が内積が 0 に近く、絶縁体状態である。 $U_{bf}$  の効果により、比較的急激に状態が転移していることがわかる。

### 3.2 ボソンとスピンレスフェルミオンの混合系

これ以降の章では、スピンレスフェルミオンとボソンの混合系に対するハバードモデルを導入し、平均場近似によって一体問題に帰着させ、自己無撞着に計算するための定式化について述べる。なお、フェルミオン間の相互作用を考慮する必要がなくなるため、スピンレスフェルミオンを用いた。また、1次元鎖で副格子に2分割して考えることにする。

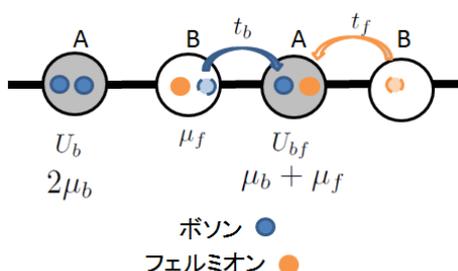


図8 モデルの概念図。1次元鎖を2分割し、順番にAサイト、Bサイトとして副格子とみなす。

ボソン・フェルミオン混合系のハミルトニアン  $\mathcal{H}$  を次のように定義する。

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_b + \mathcal{H}_f + \mathcal{H}_{bf} \quad (9)$$

$$\mathcal{H}_b = -t_b \sum_{\langle i,j \rangle} (b_i^+ b_j + b_j^+ b_i) + \frac{U_b}{2} \sum_i n_{bi}(n_{bi} - 1) - \mu_b \sum_i n_{bi} \quad (10)$$

$$\mathcal{H}_f = -t_f \sum_{\langle i,j \rangle} (c_i^+ c_j + c_j^+ c_i) - \mu_f \sum_i n_{fi} \quad (11)$$

$$\mathcal{H}_{bf} = U_{bf} \sum_i n_{bi} n_{fi} \quad (12)$$

ここで、 $b_i, b_j^+, c_i, c_j^+$  はボソン、フェルミオンの生成消滅演算子、 $n_{bi} = b_i^+ b_i, n_{fi} = c_i^+ c_i$  はボソン、フェルミオンの数演算子、 $t_b, t_f$  はボソン、フェルミオンの跳び移り積分、 $U_b, U_{bf}$  はボソン-ボソン間、ボソン-フェルミオン間相互作用、 $\mu_b, \mu_f$  はボソン、フェルミオンの化学ポテンシャルである。 $\langle i, j \rangle$  は最近接サイトのペアを表す。

次節で平均場を導入するため、先行研究 [13] にならい、系を2分割してA副格子とB副格子に分ける。A副格子とB副格子を1つの単位胞とみなして各サイトの番号をつけるものとする。

$$\mathcal{H}_b = -t_b \sum_{\langle i,j \rangle} (a_i^+ b_j + b_j^+ a_i) + \frac{U_b}{2} \sum_i \{n_{Ai}(n_{Ai}-1) + n_{Bi}(n_{Bi}-1)\} - \mu_b \sum_i (n_{Ai} + n_{Bi}) \quad (13)$$

$$\mathcal{H}_f = -t_f \sum_{\langle i,j \rangle} (c_i^+ d_j + d_i^+ c_j) - \mu_f \sum_i (n_{Ci} + n_{Di}) \quad (14)$$

$$\mathcal{H}_{bf} = U_{bf} \sum_i (n_{Ai} n_{Ci} + n_{Bi} n_{Di}) \quad (15)$$

$a_i, a_i^+, b_i, b_i^+$  はそれぞれボソンの A 副格子、B 副格子における生成消滅演算子、 $c_i, c_i^+, d_i, d_i^+$  はそれぞれフェルミオンの A 副格子、B 副格子における生成消滅演算子、 $n_{Ai}, n_{Bi}, n_{Ci}, n_{Di}$  はそれぞれの生成消滅演算子の積による数演算子である。

### 3.3 平均場の導入

前節で導入した副格子に分けたハミルトニアンに平均場近似を導入する。初めに、ボソンに関する平均場  $\langle a_i \rangle, \langle a_i^+ \rangle, \langle b_i \rangle, \langle b_i^+ \rangle$  を導入し、ホッピングの項について次のように平均場近似を行う。

$$a_i b_i^+ \simeq \langle a_i \rangle b_i^+ + a_i \langle b_i^+ \rangle - \langle a_i \rangle \langle b_i^+ \rangle \quad (16)$$

$$b_i a_i^+ \simeq \langle b_i \rangle a_i^+ + b_i \langle a_i^+ \rangle - \langle b_i \rangle \langle a_i^+ \rangle \quad (17)$$

ここで、平均場を  $\phi_a = \langle a_i \rangle = \langle a_i^+ \rangle, \phi_b = \langle b_i \rangle = \langle b_i^+ \rangle$  としてまとめると、

$$a_i b_i^+ \simeq \phi_a b_i^+ + a_i \phi_b - \phi_a \phi_b \quad (18)$$

$$b_i a_i^+ \simeq \phi_b a_i^+ + b_i \phi_a - \phi_b \phi_a \quad (19)$$

となる。これらを用いて  $\mathcal{H}_b$  を書き直すと、

$$\mathcal{H}_b = \mathcal{H}_A + \mathcal{H}_B \quad (20)$$

$$\mathcal{H}_A = -t_b \sum_i \phi_b (a_i + a_i^+) + \frac{U_b}{2} \sum_i n_{Ai} (n_{Ai} - 1) - \mu_b \sum_i n_{Ai} \quad (21)$$

$$\mathcal{H}_B = -t_b \sum_i \phi_a (b_i + b_i^+) + \frac{U_b}{2} \sum_i n_{Bi} (n_{Bi} - 1) - \mu_b \sum_i n_{Bi} \quad (22)$$

となる。ボソンのホッピングに関して平均場を導入することで、このように副格子ごとに分解することができた。サイトの和はハミルトニアンの計算には影響しないためある1つ

のサイトについてのハミルトニアン

$$h_A = -zt_b\phi_b(a_i + a_i^+) + \frac{U_b}{2}n_{Ai}(n_{Ai} - 1) - \mu_b n_{Ai} \quad (23)$$

$$h_B = -zt_b\phi_a(b_i + b_i^+) + \frac{U_b}{2}n_{Bi}(n_{Bi} - 1) - \mu_b n_{Bi} \quad (24)$$

と書くことにする。ここで、 $z$  は最近接サイトの数を表す配位数である。

次に、 $\mathcal{H}_{bf}$  について平均場近似を考える。粒子数に関する平均場、 $\langle n_{Ai} \rangle, \langle n_{Bi} \rangle, \langle n_{Ci} \rangle, \langle n_{Di} \rangle$  を導入して、

$$n_{Ai}n_{Ci} \simeq \langle n_{Ai} \rangle n_{Ci} + \langle n_{Ci} \rangle n_{Ai} - \langle n_{Ai} \rangle \langle n_{Ci} \rangle \quad (25)$$

$$n_{Bi}n_{Di} \simeq \langle n_{Bi} \rangle n_{Di} + \langle n_{Di} \rangle n_{Bi} - \langle n_{Bi} \rangle \langle n_{Di} \rangle \quad (26)$$

のようにかけるので、これを用いると  $\mathcal{H}_{bf}$  は

$$\mathcal{H}_{bf} = U_{bf} \sum_i (\langle n_{Ai} \rangle n_{Ci} + \langle n_{Ci} \rangle n_{Ai} + \langle n_{Bi} \rangle n_{Di} + \langle n_{Di} \rangle n_{Bi}) \quad (27)$$

となる。それぞれ  $n_{Ai}, n_{Bi}, n_{Ci}, n_{Di}$  に依存する量として記述できるので、 $\mathcal{H}_{bf}$  における  $U_{bf}$  の効果を  $\mathcal{H}_b, \mathcal{H}_f$  における  $\mu_b, \mu_f$  の効果として組み込むことができる。つまり、

$$\mu_A = \mu_b - U_{bf} \langle n_{Ci} \rangle \quad (28)$$

$$\mu_B = \mu_b - U_{bf} \langle n_{Di} \rangle \quad (29)$$

$$\mu_C = \mu_f - U_{bf} \langle n_{Ai} \rangle \quad (30)$$

$$\mu_D = \mu_f - U_{bf} \langle n_{Bi} \rangle \quad (31)$$

のように化学ポテンシャルを書き換えることができる。以上、 $\mathcal{H}_b, \mathcal{H}_{bf}$  に関して導入した平均場をまとめると、ハミルトニアンは以下の  $\mathcal{H}^{\text{MF}}$  のように書き改めることができる。

$$\mathcal{H}^{\text{MF}} = \mathcal{H}_b^{\text{MF}} + \mathcal{H}_f^{\text{MF}} \quad (32)$$

$$\mathcal{H}_b^{\text{MF}} = \sum_i (h_A + h_B) \quad (33)$$

$$h_A = -zt_b\phi_b(a_i + a_i^+) + \frac{U_b}{2}n_{Ai}(n_{Ai} - 1) - \mu_A n_{Ai} \quad (34)$$

$$h_B = -zt_b\phi_a(b_i + b_i^+) + \frac{U_b}{2}n_{Bi}(n_{Bi} - 1) - \mu_B n_{Bi} \quad (35)$$

$$\mathcal{H}_f^{\text{MF}} = -t_f \sum_{\langle i,j \rangle} (c_i^+ d_j + d_j^+ c_i) - \sum_i (\mu_C n_{Ci} + \mu_D n_{Di}) \quad (36)$$

フェルミオンの平均場ハミルトニアン  $\mathcal{H}_f^{\text{MF}}$  に関して、バンドについて考えるため、フーリエ変換しなければならない。その時に、ホッピングの考え方については、単位胞を1つとして数え、単位胞内のホッピングと隣の単位胞へのホッピングの2つを考慮した。以上によりボソン・フェルミオン混合系におけるハバードモデルは、平均場近似による自己無撞着に解析ができるようになった。

### 3.4 計算方法

自己無撞着な計算の方法についての説明をする。計算の上での注意点を以下に挙げる。

まず、初めに「自己無撞着に決定する量」について、適当な値を与える。ただし、初めから  $\phi_a = 0$ ,  $\phi_b = 0$  にしてしまうとボソンのホッピングの項がなくなってしまい、超流動の解が得られなくなってしまうため、有限の正の値を入れる。今回の研究では、 $\phi_a = \phi_b = 1$  とした。

フェルミオンについては、初期状態が A, B の2つのサイトで粒子数平均が同じ場合と異なる場合とでは、終状態が変わる可能性があるため、 $n_C = n_D = 0.5$  の場合と  $n_C = 1, n_D = 0$  の場合との2の場合を計算した上で、エネルギーの低い方を基底状態として採用した。

また、フェルミオンの化学ポテンシャルを調整するため、 $\mu_C$  と  $\mu_D$  の平均をエネルギーシフトとみなせるので引いた。これは、

$$\bar{\mu} = \frac{\mu_C + \mu_D}{2} \quad (37)$$

$$\delta_\mu = \frac{\mu_C - \mu_D}{2} \quad (38)$$

とおくと、

$$\mu_C = \bar{\mu} + \delta_\mu \quad (39)$$

$$\mu_D = \bar{\mu} - \delta_\mu \quad (40)$$

とかけるので、ハミルトニアンを計算する段階で  $\bar{\mu}$  を落とすことでハーフフィリングになるようにしている。

また、今は1次元で考えるので、

$$\mu_C - \mu_D \neq 0 \quad (41)$$

となるとき、つまり、

$$U_{bf}(\langle n_B \rangle - \langle n_A \rangle) \neq 0 \quad (42)$$

となるときにフェルミオンには周期ポテンシャルがかかるので、パイエルス不安定性によりギャップが生じることがわかる。

さて、今回のモデルでは、自己無撞着に計算すべき量が4つあるが、具体的には次のような手順で計算した。なお、粒子数平均は対角化後の基底を用いて量子力学の定義通り計算する。

1.  $\phi_a, \phi_b, \langle n_C \rangle, \langle n_D \rangle$  に適当な値を代入
2.  $h_A$  を対角化
3.  $\phi_a, \langle n_A \rangle$  を求める (次の手順以降で用いる。以下同様)
4.  $h_B$  を対角化
5.  $\phi_b, \langle n_B \rangle$  を求める
6.  $\mathcal{H}_f^{\text{MF}}$  を対角化
7.  $\langle n_C \rangle, \langle n_D \rangle$  を求める
8. 終了判定 (求めた値が、前回の計算結果と同じなら終了する)
9. 一連の計算で求めた値を手順 1. に代入し、これまでの手順を繰り返す

この手順を他のパラメータ ( $U_{bf}, t_b, \mu_b$  など) を変えることで計算し、 $n_C = n_D = 0.5$  の場合と  $n_C = 1, n_D = 0$  の場合との2つの場合を計算した上で、エネルギーの低い方を採用する、ということを繰り返す。

### 3.5 ボソンの MI-SF 相図 : $U_{bf}$ が小さな場合

以降3節の中で、ボソンの相図とフェルミオンのバンドギャップについての計算結果をまとめる。以下に示す計算結果は1次元格子の結果である。

この節と次節では先行研究で議論されていたようなボソンのモット絶縁体-超流動の相図を用いてボソンの運動のしやすさについて議論する。比較のために1次元の場合のボソンのみの相図を図9に示してある。1つ目のMI突起は  $t_b/U_b = 0.09$  まで伸びている。

$U_{bf}$  が小さな場合として、 $U_{bf} = 1$  の場合のボソン・フェルミオン系の計算結果 (ボソンにおける MI-SF 相図) を図10、図11に示す。まず、 $\phi_a$  をプロットした図10に着目する。図中にある MI, DW, MS はそれぞれ先行研究にならってつけている相の状態、MI相の突起中に書いてある  $n$  は  $n = n_A = n_B$  という意味である。DW相においては、 $n_A \neq n_B$  のため、図が煩雑になることを考慮して書いていない。図9に見られたようなMI相の突起は全体的に上方へシフトしている。これは  $U_{bf}$  の効果により化学ポテンシャルがシフトしたためである。さらに、図9にはなかった突起が出現している。この新たに

出現した MI 相の突起は、図 11 を見ると、黄色の部分に一致している。これは、 $n_A \neq n_B$  となっている部分で、先行研究では  $U_B = 1.2U_A$  の場合に存在した DW(density wave) 相とされている部分である。これは、A サイトと B サイトが等価でない時に現れる相である。この結果により A 副格子、B 副格子とも同じ初期条件の下で計算を行い、自己無撞着に計算した結果、2 つの副格子が異なった状態にある、という結果が得られたことになる。つまり、 $U_{bf}$  の影響により、フェルミオンをボソンが避けることにより 2 つのサイト間におけるボソン数の偏りを生んでいることがわかる。これは、先行研究において  $U_B = 1.2U_A$  のように、A サイトと B サイトにおける相互作用を変えたこととは違い、 $U_{bf}$  の効果により、自発的に併進対称性が破れている。

計算結果から、1 つ目 ( $n = 1$ ) の MI 突起は  $t_b/U_b = 0.09$  まで伸びている。この場合はボソンのみの系と変わらず、突起は張り出して来ているわけではないので、 $U_{bf}$  の効果によってボソンのホッピング制限がかかることは見られていない。ただし、精度を上げて計算すると 0.001 の桁では異なっている可能性もあるので、検証しなければならない。

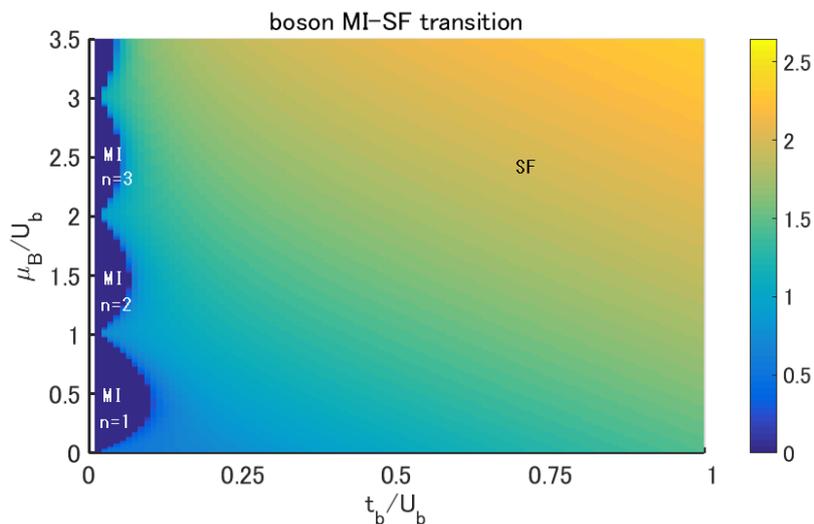


図 9 ボソン系におけるモット絶縁体-超流動相図。1次元で考えているため、 $z=2$  となり、MI 突起は 0.09 まで伸びている。先ほどの 2次元ハニカム格子に比べて MI 相の領域がより広いことがわかる。

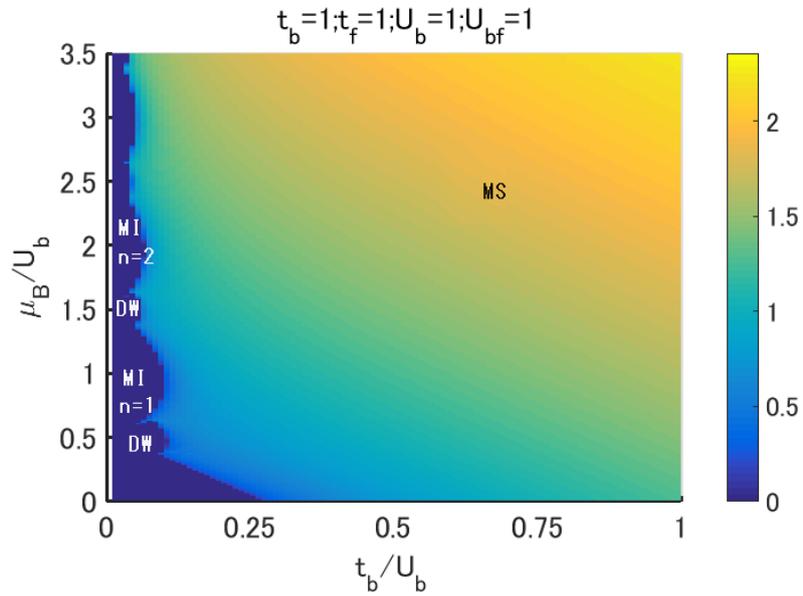


図 10  $U_{bf} = 1$  のときの MI-SF 相図 ( $\phi_a$  をプロット)。先行研究での  $U_B = 1.2U_A$  の場合と同様に、MI 相と MI 相の突起の間に DW 相が出現している。MI 相の一つが図 9 に比べて上に位置しているのは、 $U_{bf}$  により化学ポテンシャルのエネルギーシフトが起きているからである。

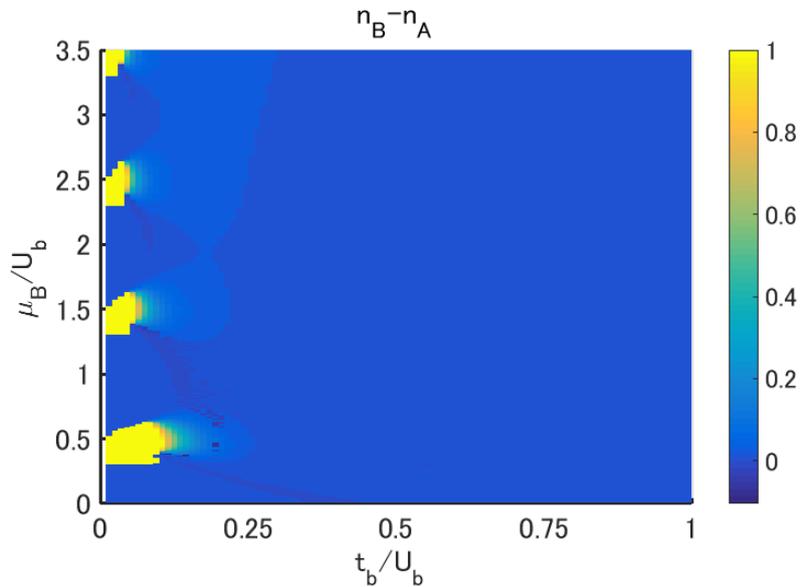


図 11  $U_{bf} = 1$  のときの MI-SF 相図 ( $n_B - n_A$  をプロット)。黄色の部分が DW 相になっている。また、MS 相（超流動状態）の場所は、大部分がほとんど 0 なので、SF 相に限りなく近いと考えられる。

### 3.6 ボソンの MI-SF 相図 : $U_{bf}$ が大きな場合

次に、 $U_{bf}$  が大きい場合の結果について議論する。図 12、図 13 は  $U_{bf} = 5$  の場合の MI-SF 相図である。前節と同様に、 $U_{bf}$  の影響により化学ポテンシャルがシフトしているので、図 9 と比べてモット絶縁体相 (DW 相) の突起が上方にシフトしている。また、 $t_b/U_b = 0.1$  までかかっている大きな突起はこのシフトの影響で見えている  $n = 0$  の相である。したがって、今回は無視する。

図 12 を見ると、図 9 のボソンのみの結果と比べてモット絶縁体状態の突起は全体的に大きく伸びていることが見て取れる。1 つ目の突起 (今回は DW 突起) は、 $t_b/U_b = 0.43$  まで伸びている。これにより、 $U_{bf}$  が大きいとき、ボソンが動きにくくなっていることがわかる。

次に、図 13 を見ると、 $n = 0$  のモット絶縁体状態の領域を除き、 $n_a = n_b$  となっている部分は存在しない。つまり、 $U_{bf}$  の効果により、全領域において A,B2 つの副格子におけるボソンの粒子数に偏りがあることがわかる。また、フェルミオンについては、ボソンとは逆の配置、つまり、ボソンの多いサイトにはフェルミオンは少なく (ほぼ 0 個)、ボソンの少ないサイトにはフェルミオンは多く (ほぼ 1 個) 存在する。

したがって、 $U_{bf}$  が大きいときには、 $U_{bf}$  の効果によって、ボソンとフェルミオンは避け合い 2 つのサイトの間には各粒子数の偏りが生じており、各々の粒子は動きにくくなっていることがわかる。 $U_{bf}$  が小さいときにも、自発的に併進対称性が破れていることは見られたが、 $U_{bf}$  が十分大きい場合、単位胞が 2 サイトの場合では、ボソンの存在するサイトとフェルミオンの存在するサイトが交互に配置しているような状況になる。ただし、ボソンが超流動状態にあるときは、フェルミオンのサイトにもボソンが流れ込んでくる。

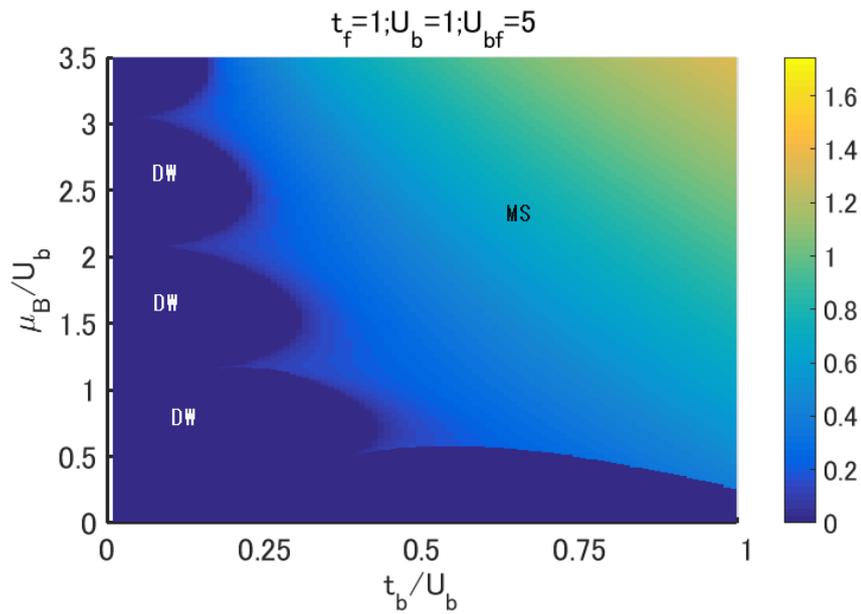


図 12  $U_{bf} = 5$  のときの MI-SF 相図 ( $\phi_a$  をプロット)。MI 相の突起は存在せず、絶縁体状態の領域は全て DW 相である。また、超流動状態の領域も MS 相になっている。

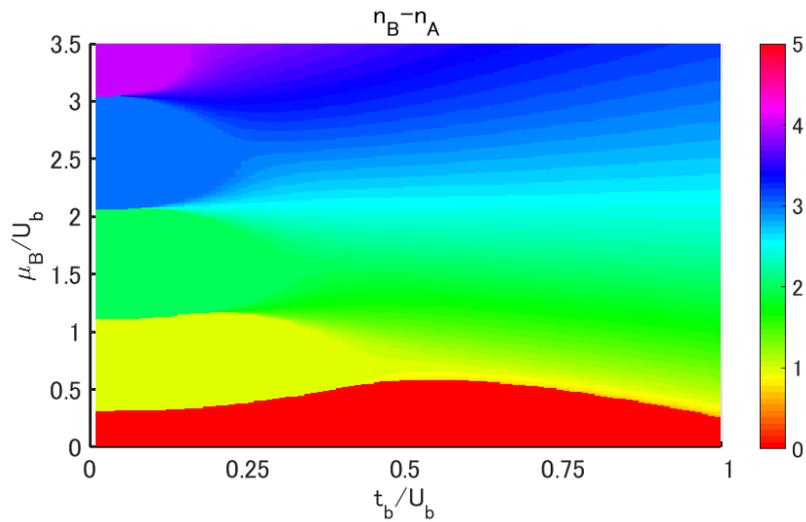


図 13  $U_{bf} = 5$  のときの MI-SF 相図 ( $n_B - n_A$  をプロット)。絶縁体状態の領域、超流動状態の領域、それぞれにおいて、 $n_A, n_B$  の値が異なっていることがわかる。赤い部分は化学ポテンシャルのエネルギーシフトによるもので、ボソンが存在していない状態 ( $n_A = n_B = 0$ )。

### 3.7 フェルミオンの金属絶縁体転移

次に、フェルミオンにおけるバンドギャップについての計算結果を述べる。 $U_{bf}$  を変えたときのフェルミオンのバンドは図 14 のようになっている。実際は、 $U_{bf} > 0$  でギャップは開くが、 $U_{bf} = 2$  程度から目視で確認できるようなバンドが開くため、このようにプロットした。

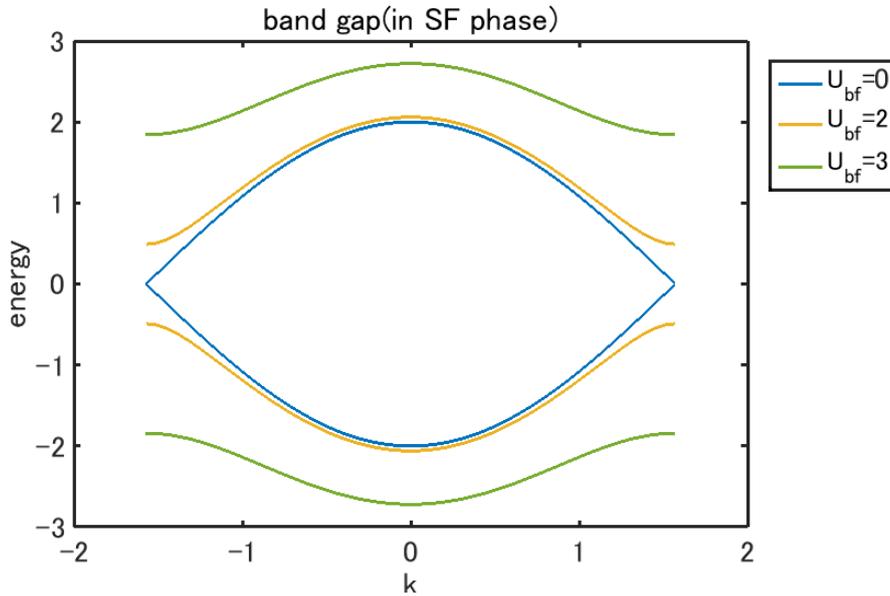


図 14  $U_{bf}$  を変えたときのフェルミオンのバンド

次にボソンがそれぞれモット絶縁体、超流動のときのフェルミオンにおける金属絶縁体転移について、バンドギャップの大きさを  $U_{bf}$  の関数として描いたのグラフを図 15、図 16 に示す。フェルミオンは  $\langle n_C \rangle = \langle n_D \rangle = 0.5$  のハーフフィリング条件下で計算している。

図 15 はボソンがモット絶縁体の状況である。 $t_b = 0, t_f = 1, U_b = 1$  のもとで計算した。ボソン数  $n_A, n_B$  に着目すると、初めは  $n_A = n_B$  であり、この時にはギャップは開いていない。 $n_A = 1$  となるときに、いきなりギャップが開き、絶縁体に転移する。 $n_A = 1, n_B = 2$  の範囲では、 $U_{bf}$  に比例してギャップが開くことが分かる。さらに  $U_{bf}$  が大きくなると、 $n_A = 0$  となり、この点ではギャップの値が飛んでいる。それ以降は、 $n_A, n_B$  とも変化せず、 $U_{bf}$  に比例してギャップが開くことがわかる。 $n_B - n_A$  に比例してギャップが開くのは、フェルミオンの化学ポテンシャルが  $U_{bf} \times (n_B - n_A)$  という形

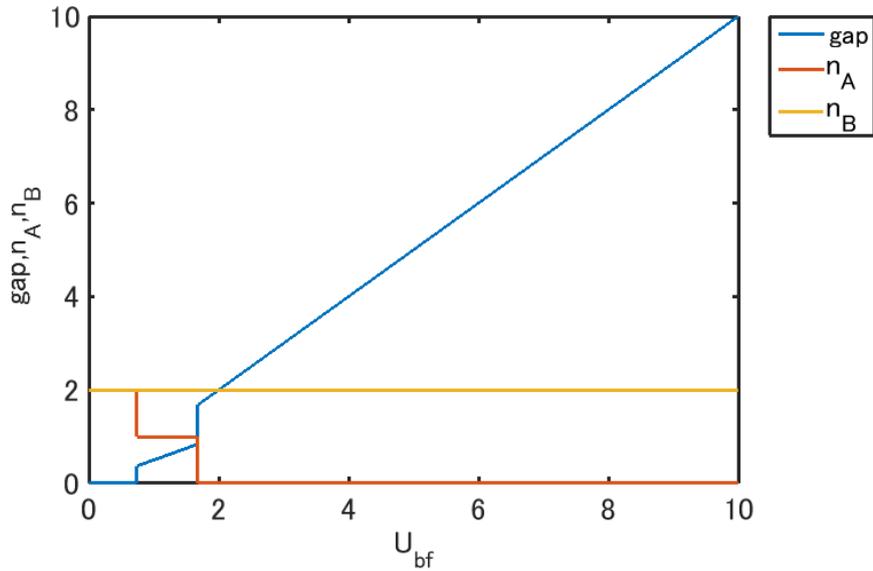


図 15 ポソンがモット絶縁体状態のときのフェルミオンのバンドギャップ。 $n_A = 1$  となった点 (MI から DW に転移した点) からバンドギャップが形成されることがわかる。

で  $U_{bf}$  の効果を含んでいることを反映している。

図 16 では、ボソンは超流動状態にある。 $t_b = 1, t_f = 1, U_b = 1$  のもとで計算した。

ギャップの立ち上がりを見ると、BCS のギャップ関数と似たグラフの立ち上がり方をしている。これは、一次元で計算しているため、パイエルス不安定性によるものと考えられる。 $U_{bf} \neq 0$  のときは無限小のギャップが開いているため、ギャップの値は 0 ではない。 $U_{bf}$  が次第に大きくなると、 $n_A < n_B$  となるあたりからフェルミオンのバンドギャップが大きく開く。図 15 と異なる点は、ボソンの数が超流動状態のために連続的に変化しているので、 $U_{bf}$  が存在するとギャップが必ず存在することである。そこで、 $\text{band gap}/(n_B - n_A)$  と  $U_{bf}$  のグラフを書いてみると、図 17 のようになり、やはりボソン数の差とギャップの大きさに相関があることが理解できる。このことは、絶縁体状態におけるときと同様に、フェルミオンの化学ポテンシャルが  $U_{bf} \times (n_B - n_A)$  という形で  $U_{bf}$  の効果を含んでいることを反映しているからである。

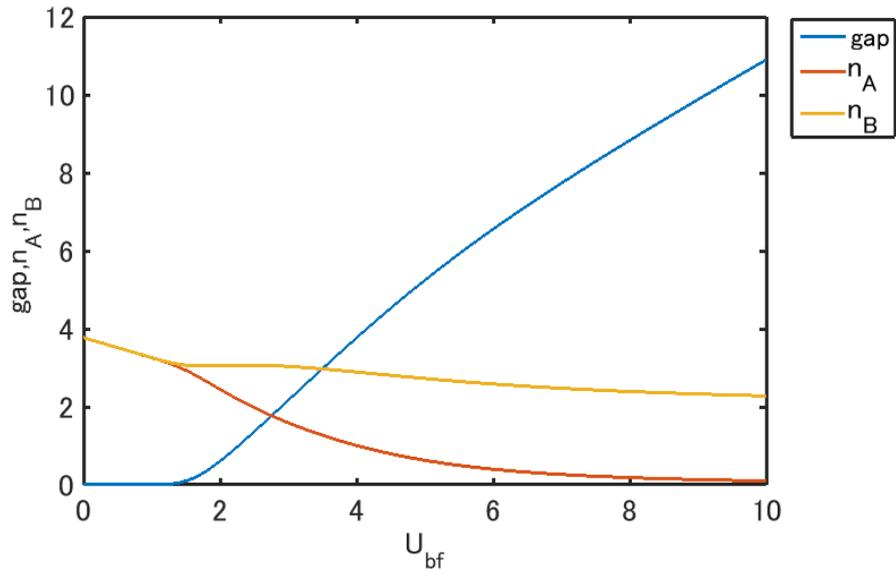


図 16 ボソンが超流動状態のときのフェルミオンのバンドギャップ。 $U_{bf}$  が存在した瞬間から、 $n_A \neq n_B$  となるためポテンシャルが存在し、エネルギーギャップが開く。

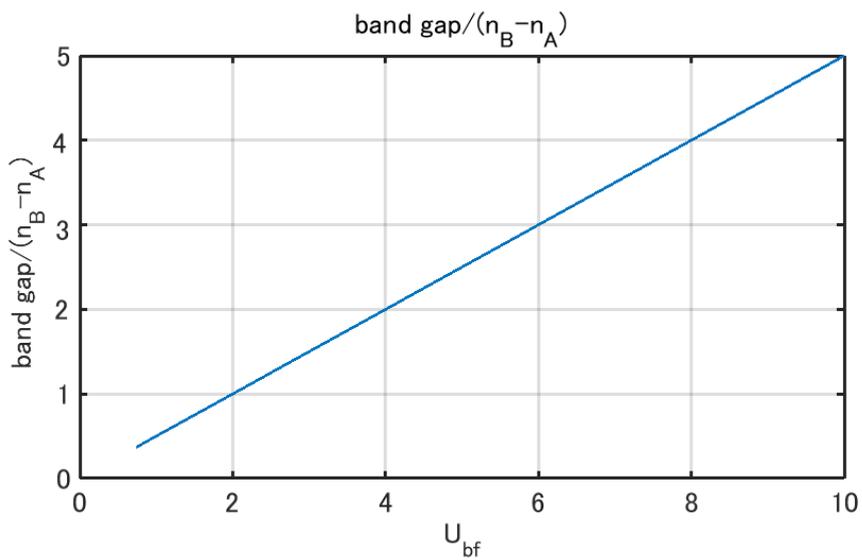


図 17 図 16 における  $\text{band gap}/(n_B - n_A)$  と  $U_{bf}$  をプロットしたもの。直線的になっており、傾きも図 15 と同じになっていることから、ボソンが絶縁体状態、超流動状態にかかわらず、フェルミオンの絶縁体転移は基本的に同じ理由で生じていることがわかる。

### 3.8 フェルミオンの金属絶縁体転移（2次元の場合）

2次元系に拡張し、ボソンが超流動状態の場合において、同じようにフェルミオンのバンドギャップの形成を調べたが、「平均場近似における相転移」のようなものは見られず、定性的には1次元におけるバンドギャップの形成（図16）と同じような結果が得られた。単位胞を $2 \times 2$ の4サイトとしたり、ネスティングを崩したにもかかわらず、このような結果が得られたことは、「1次元」ということ以外の別のことが関与していることが考えられる。スピンレスフェルミオンでハーフフィリングで考えているため、パウリ原理によりフェルミオンの動きが強く制限されることによりこのようなことが起こっている可能性があるため、今後、フィリングを変えて計算してみるといった課題が挙げられる。

## 4 まとめと展望

本研究では、ハミルトニアンを平均場近似で A サイト、B サイトのボソン、フェルミオンの 3 つのサイトハミルトニアンに分解し、自己無撞着に解析した。それにより、フェルミオンのギャップの形成やボソンの MI-SF 相図を調べることで、 $U_{bf}$  の効果を調べた。

結果は、 $U_{bf}$  の効果により、

1. ボソン、フェルミオンは互いに避け合うことでサイトごとに粒子数が偏ること
2. ボソン数の偏りにより、フェルミオンのバンドギャップが開く

この 2 つの効果が結論として示された。

この平均場ハミルトニアンから議論できたのは、 $U_{bf}$  の効果により、自発的に併進対称性が破れることについてである。ボソンから見れば、フェルミオンを避けるために、偏りが生じることで、DW 相や MS 相といった、 $n_A \neq n_B$  という状態が発現した。フェルミオンから見ると、ボソンの  $n_A \neq n_B$  という状況が、 $U_{bf}(n_B - n_A)$  というポテンシャルになり、それによりエネルギーギャップが形成された。

以上が、今回の研究でわかったことのまとめである。今後の展望としては、(1) モデルの周期や次元の拡張、(2) 揺らぎを取り入れるなどのより高度な計算を用いた解析、(3) スピンのあるフェルミオンを導入することなどが挙げられる。(1) では、次元の拡張やフィリングを変えることにより、新たな相の出現や、光格子の中でのボソンやフェルミオンが実際に取りうる量子状態についての議論、(2) では、MI-SF 転移の転移点についてのより精度の高い議論、(3) では、フェルミオン間相互作用も考慮して動的平均場近似などの手法で計算し、超伝導や超固体相といった本研究では扱わなかった状態についての議論、などといったことが期待される。

今回の平均場近似を用いた研究では、2 サイトの併進対称性がやぶれることまでの議論であったが、特に、より高度な手法を用いることで、厳密対角化法の結果から示唆される相分離を含め、様々な相についての議論ができることが期待できる。

さらに、2 次元正方格子における、バンドギャップの形成については、3.8 章で触れたとおりである。特に、4 サイトでの系を議論する場合には、2 サイトに比べて多くの状態が発現するため、基底状態を議論するためには様々な初期条件から初めて、基底エネルギーについて議論しなければならない。また、大きな系（単位胞）にすると、自己無撞着に決定する変数も増えてくる。そのため、厳密対角化以外の計算手法も導入すると良いと思われる。

## 5 謝辞

本研究を行うにあたり、多くの方々のお世話になりました。指導教官の堀田貴嗣教授には、学部での研究室配属から3年間、研究するにあたり、多くのご指導を賜りました。深く感謝申し上げます。また、強相関電子論研究室の服部一匡准教授には、ゼミにおける鋭い指摘など、様々なご指導を賜りました。深く感謝申し上げます。また、首都大学東京理工学研究科物理学専攻強相関電子論研究室の皆様には、研究以外でも様々な場面でお世話になりました。

最後に、お世話になりました全ての皆様に、感謝と御礼申し上げます。

## 参考文献

- [1] Immanuel Bloch, *Nature Physics* **1** (2005) 23.
- [2] 山下真, 稲葉謙介. “光格子中の冷却原子気体を用いた量子シミュレーション.” *NTT 技術ジャーナル* (2012) Vol.24 No.6 pp27-30
- [3] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. H. Matthews, C. E. Wieman, E. A. Cornell, *Science* **269** (1995) 198
- [4] W. Ketterle, *Rev. Mod. Phys.* **74** (2002) 1131.
- [5] C.A. Regal, M. Greiner and D. S. Jin, *Phys. Rev. Lett.* **92** (2004) 040403.
- [6] M. Bartenstein, A. Altmeyer, S. Riedl, S. Jochim, C. Chin, J. Hecker Denschlag, and R. Grimm, *Phys. Rev. Lett.* **92** (2004) 120401.
- [7] M. W. Zwierlein, C. A. Stan, C. H. Schunck, S. M. F. Raupach, A. J. Kerman, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **92** (2004) 120403.
- [8] J. Kinast, S. L. Hemmer, M. E. Gehm, A. Turlapov, and J. E. Thomas, *Phys. Rev. Lett.* **92** (2004) 150402.
- [9] T. Bourdel, L. Khaykovich, J. Cubizolles, J. Zhang, F. Chevy, M. Teichmann, L. Tarruell, S. J. J. M. F. Kokkelmans, and C. Salomon, *Phys. Rev. Lett.* **93** (2004) 050401.
- [10] Ichiro Ushijima, Masao Takamoto, Manoj Das, Takuya Ohkubo and Hidetoshi Katori, *Nature Photonics* **9** (2015) 185.
- [11] S. Sugawa, K. Inaba, S. Taie, R. Yamazaki, M. Yamashita, and Y. Takahashi, *Nature Physics* **7** (2011) 642.
- [12] M P. Fisher , P B. Weichman, G. Grinstein and D S. Fisher, *Phys. Rev. B* **40** (1989) 546.
- [13] L. Quing-Quing, H. Jing-Ming, *commun. Theor. phys.* **53** (2010) 861.
- [14] D. Jaksch, C. Bruder, J.I. Cirac, C.W. Gardiner and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett* **81** (1998) 3108.