修士論文

強いカオス系における波動関数の干渉と古典作用間の相関

吉田 賢典

首都大学東京大学院 理工学研究科 物理学専攻

2014 年度

目 次

本研究の背景と目的

古典粒子の運動は位置 q と運動量 p からなる位相空間上の軌道として記述される．強いカオス系では古典力学に従う粒子の運動は非常に乱雑になり，位相空間上の古典軌道の分布を時間発展すると，拡散方程式によく従うことが知られている [1]．このことは，例えば運動量の平均二乗変位が時間に比例して増大することから知ることができる．一方で，対応する古典系が強いカオス系であるような量子系において，位相空間表示された確率分布関数を時間発展すると，時間発展初期には古典分布と同様の拡散を示すが，ある時間スケールから p 方向の拡散が停止する．停止した状態を p 空間で見ると，特徴的な空間スケールを持って位相空間表示された確率分布関数が局在することがわかる．このような，量子力学で見られる古典的拡散の抑制現象のことを動的局在という．動的局在は，典型的には周期的に撃力が加わるポテンシャルを持つ系（以下，周期撃力系と呼ぶ）などにおいて見られる [2]．特に，周期撃力系においては，その固有値方程式が，不規則系の Anderson 模型と形式的に同一のものを満たすことから，動的局在と固体物理学の Anderson 局在とを関連づけることによって理解がなされている [3]．

一方で，本研究では，動的局在を半古典論を用いて理解することを試みる．動的局在が，古典カオスの存在下で起こることは既に広く知られるが，古典カオスのいかなる特性が動的局在をもたらしているかについては，極めて興味深い問題であるにも関わらず，未だ明らかにされていない．半古典論はその問題解明ための最も有力かつ唯一の手段であると考えられている．経路積分表示の伝播関数に鞍点近似を施すことによって，半古典伝播関数は

$$G^{(\mathrm{sc})}(p_t, p_{t'}) = \sum_l A^{(l)}(p_t, p_{t'}) e^{\frac{i}{\hbar} S^{(l)}(p_t, p_{t'})} \tag{0.0.1}$$

と与えられる．ここで，$S^{(l)}$ は古典軌道 l の作用を表し，$A^{(l)}$ は古典軌道周りのゆらぎを反映した振幅因子である．半古典伝播関数は始状態と終状態に対する然るべき条件を満たす複数の軌道の和をとることによって得られる．特に，半古典表示された波動関数 $\psi^{(\mathrm{sc})}(p, t)$ の初期状態を $\delta(p - p_0)$ にとると，古典論との対応がつけやすく，この場合の確率分布関数 $|\psi^{(\mathrm{sc})}(p, t)|^2$ は

$$|\psi^{(\mathrm{sc})}(p, t)|^2 = |G^{(\mathrm{sc})}(p_t, p_0)|^2 = \sum_{l, l'} A^{(l)} A^{(l')*} e^{\frac{i}{\hbar}(S^{(l)} - S^{(l')})} \tag{0.0.2}$$

のように半古典伝播関数を用いて表される [4]．式 0.0.2 を対角項と非対角項に分離して考えると，対角項は古典分布に対応するため，強いカオス系では時間発展とともに拡散する．半古典確率分布関数が動的局在を再現するためには，非対角項が古典分布の裾を抑制するような破壊的干渉と，$p_t = p_0$ 付近で振幅を一定に保つような建設的干渉を併せ持つ必要がある．このことは，作用の差が完全にランダムではなく，特殊な相関を持つことを意味する [5]．この作用の相関を古典系の何らかの不変構造と関連づけることができれば，動的局在の起源についての理解がより深まることが期待される．

強いカオス系において，半古典伝播関数に寄与する古典軌道間の作用の相関と，系が持つ不変構造との関係は Tomsovic らの先行研究において議論されている [6]．Tomsovic らは，古典軌道間の作用の相関を，位相空間上の安定多様体と不安定多様体が囲む領域の面積と対応づけることで，背景の古典構造から波動関数の再帰現象の説明を試みているが，今のところ，アイディアの提唱に留まっている現状にある．

一方，区分線形な周期撃力系から構成される写像系を用いて，動的局在を半古典論で再現しようとする試みがなされた [4, 7]．文献 [4, 7] で用いられているモデルでは，上記の予想に整合する，古典軌道の作用間の相関が実際に確認され，さらに，この系が良い記号力学をもつことを利用して，作用の持つ相関の起源が議論されている．

ここで見出された作用の相関の起源と，Tomsovic らのアイディアとの関係を考えることは，作用の相関の起源を，位相空間の不変構造の性質と関連づけるために極めて重要である．しかし，文献 [4, 7] で用いられたモデルは，そのモデルの特殊性から，安定多様体と不安定多様体とが囲む領域を定義することができず，Tomsovic らの考える古典作用の相関との直接の関係を議論することができない．

本研究では作用間の相関と系の古典構造との関係を知るために，上記の困難のない，Tomsovic らのアイディアを適用できるように変更したモデルで動的局在と再帰現象について調べた．結果として，動的局在については，文献 [4, 7] で用いられているモデルに見られたような作用の相関が本研究で調べたモデルにおいても現れることを確認し，本研究で得られた作用の相関は位相空間上の 4 周期軌道をその起源に持つことを突き止めた．4 周期軌道は，本研究，ならびに文献 [4, 7] で調べられたいずれの系においても，不動点（1 周期軌道）を除く最小周期の周期軌道であり，かつ，それらは位相空間上にタイル状の構造を作ることから，それらが共通して作用の相関に関わっていることが強く示唆される．再帰現象については，本研究で用いたモデルでの再現を試みたが，再現できているのかできていないのかの判断を与えることができなかった．

本論文は以下のような章構成となっている．第 1 章では，動的局在についての議論および得られた結論について述べる．具体的には周期撃力系から構成される写像などの準備と動的局在の説明を行い，動的局在の半古典論に必要な古典軌道の作用の相関について本研究で得られた結果を紹介する．第 2 章では，Tomsovic らが発見した強いカオス系における波動関数の再帰現象についての議論および得られた結論について述べる．具体的には強いカオス系における波動関数の再帰現象について説明し，本研究で得られた結果を紹介する．第 3 章では，第 1 章と第 2 章の結果をまとめ，考察を行う．

第1章　波動関数の動的局在

1.1　周期撃力系

波動関数の動的局在は周期撃力系の量子論の研究の中で発見された [2]．周期撃力系は Hamilton 系に現れるカオスの研究に広く用いられている．本研究でも周期撃力系を用いて解析を行う．

正準変数の組を q, p とし，時間を t とする．1 次元系の周期 τ の周期撃力系の Hamiltonian は

$$H(q,p,t) = T(p) + kV(q) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - m\tau) \tag{1.1.1}$$

で与えられる．ここで，$T(p) = \frac{p^2}{2}$ は運動エネルギー，$V(q)$ はポテンシャルエネルギーであり，実定数 k はポテンシャルの強度を与えるパラメータであり，$\delta(\cdot)$ はデルタ関数である．Hamiltonian が時間 t に依存するため，Liouville の定理でいう保存量の個数が十分ではなく運動にはカオスが現れる．

1 周期の時間発展を与える写像は Hamilton 方程式を時刻 $(n-1)\tau$ から $n\tau$ まで時間積分することにより，

$$\begin{cases} q_n &= q_{n-1} + \tau \frac{dT}{dp}(p_{n-1}) \\ p_n &= p_{n-1} - k \frac{dV}{dq}(q_n) \end{cases} \tag{1.1.2}$$

で与えられる (付録 A)．以後，添字 n を時間と呼び，時間発展は写像（1.1.2）で与える．

標準写像

文献 [2] で動的局在が発見された際に解析に用いられたモデルである標準写像について紹介する．

周期撃力系の Hamiltonian において，ポテンシャルを

$$V(q) = \cos(q) \tag{1.1.3}$$

とした写像

$$\begin{cases} q_n &= q_{n-1} + \tau \frac{dT}{dp}(p_{n-1}) \\ p_n &= p_{n-1} + k \sin(q_n) \end{cases} \tag{1.1.4}$$

を標準写像（Chirikov-Taylor モデル）という [8]．図 1.1.1 に標準写像の位相空間の様子を示した．

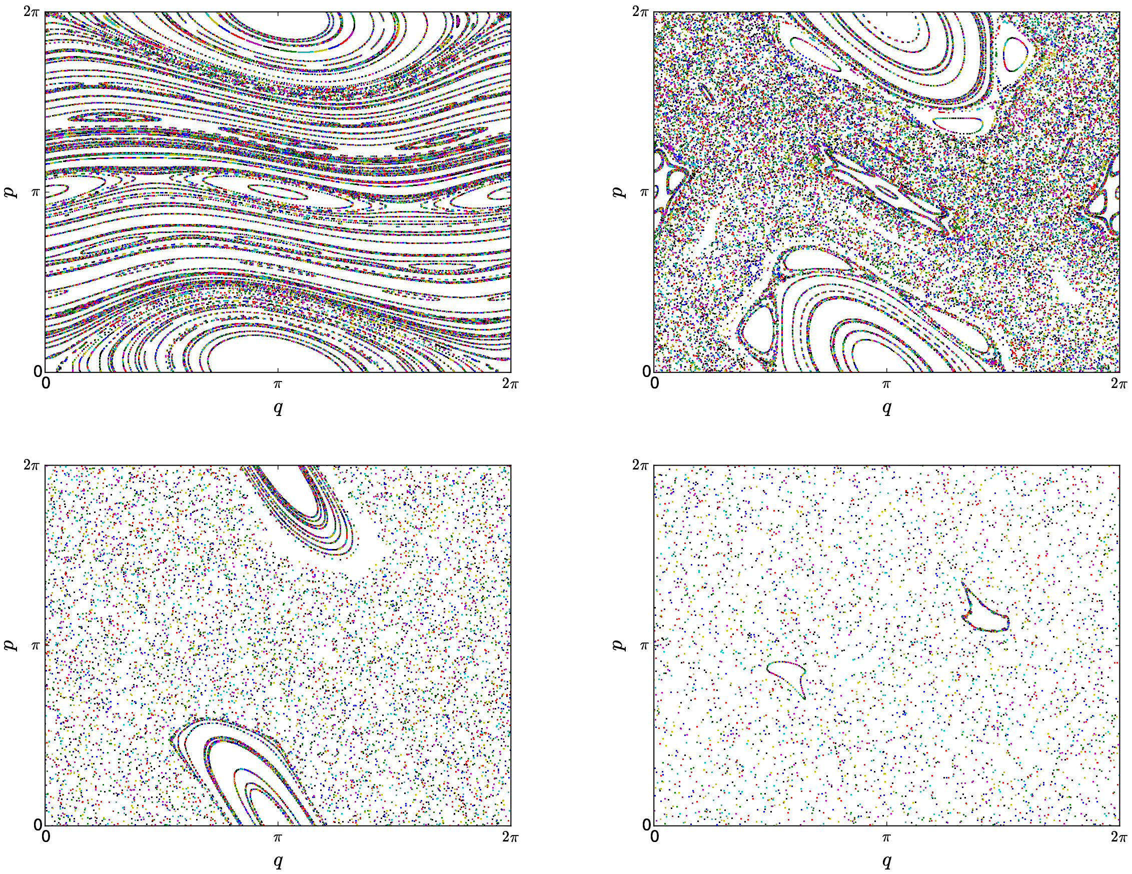


図 1.1.1: 標準写像の位相空間の様子．$\tau = 1, k = 0.5, 1.5, 3.0, 5.5$.

標準写像の位相空間は一般に幾何的な構造領域と構造のない領域に分かれ、それぞれは周期的運動をする安定領域とカオス的運動をするカオス領域に対応する。パラメータ k を大きくすると、安定領域の位相空間に占める割合は小さくなってゆき、運動はカオス領域に支配されるようになる。特に安定領域がなく，カオス領域だけが存在している場合を強いカオス系と呼ぶ．標準写像は適当なパラメータ k では混合系になり，$k = 5$ 程度でほとんど強いカオス系になる [9].

古典運動量空間における拡散

標準写像を用いて，古典系における軌道の分布の拡散について確認する．軌道の初期条件を (q_0, p_0) とし，$\sigma_n(p)$ を

$$\sigma_n(p) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \delta(p - p_n(q_0, p_0))dq_0 \tag{1.1.5}$$

と定義する．ここで，ポテンシャルの強度 k は十分大きくとり（$k \geq 5$），位相空間上にカオス領域が十分発達している状況を考える．

図 1.1.2 左は $p_0 = 0$ から始めた $\sigma_n(p)$ の時間発展のスナップショットである．通常の拡散方程式によく従って拡散し [10]，初期分布を $\delta(p)$ にとったため $\sigma_n(p)$ は Gauss 分布になる．図 1.1.2 右に適当な時刻の $\sigma_n(p)$ と Gauss 分布でのフィッティングを示した．

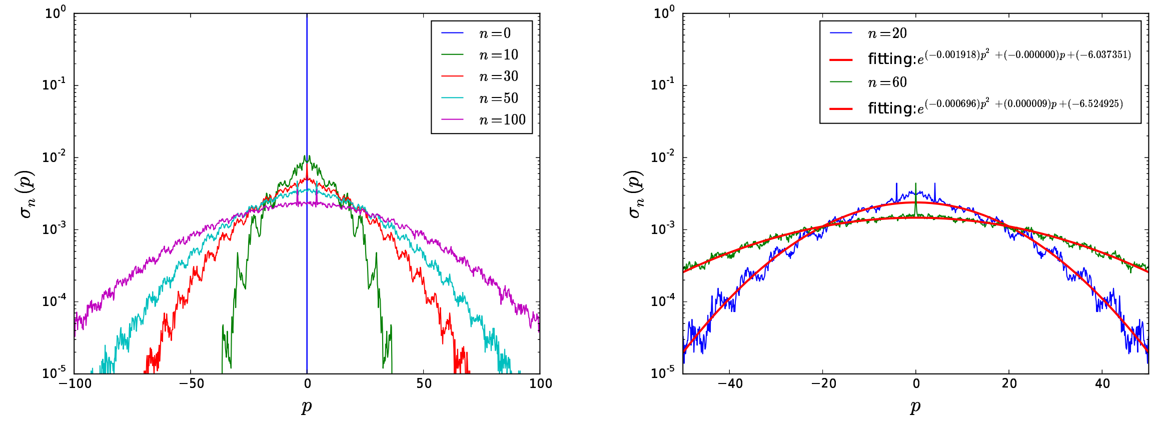


図 1.1.2: $\sigma_n(p)$ の運動量空間における時間発展のスナップショット（左）．適当な時刻での $\sigma_n(p)$ を Gauss 分布でフィッティングしたもの（右）．

標準写像の定義から，n 回写像したときの運動量 p_n と初期運動量 p_0 との差は

$$p_n - p_0 = k \sum_{m=0}^{n} \sin(q_m) \tag{1.1.6}$$

となる．

$$< (p_n - p_0)^2 >= k^2 \left\langle \sum_{m}^{n} \sum_{m'}^{n} \sin(q_m)\sin(q_{m'}) \right\rangle \tag{1.1.7}$$

である．今，k が十分大きく各軌道について q_m は相関がなく完全にランダムであると仮定すると，平均操作を各 $\sin(q_m)\sin(q_{m'})$ に対して独立に行うことができ

$$< \sin(q_m)\sin(q_{m'}) >= \delta_{mm'} < \sin^2(q_m) >= \frac{1}{2}\delta_{mm'} \tag{1.1.8}$$

となる．よって，

$$< (p_n - p_0)^2 >= \frac{1}{2}k^2 n = Dn \tag{1.1.9}$$

である [8]．ここで D は拡散係数である．図 1.1.3 はポテンシャルの強度 $k = 5.0$ の場合の運動量の平均二乗変位の時間変化の様子である．時間 n に対して線形に拡散していることが見て取れる．図 1.1.4 は拡散係数 D の k 依存性のグラフである．全体的な増加の傾向は $D = \frac{k^2}{2}$ に従うが，振動が起きているのは，k が大きくても q_n が完全にランダムではなく相関があることが理由である．相関がある場合には式（1.1.8）が成立しない．このときは Bessel 関数 $J_2(k)$ を用いて

$$D \sim \frac{k^2}{2}(1 - J_2(k)) \tag{1.1.10}$$

であることが示されているため [10]，この振動は Bessel 関数由来のものである．

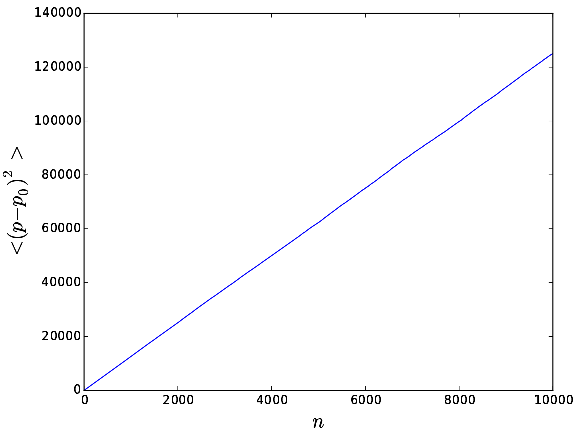


図 1.1.3: 標準写像における運動量の平均二乗変位の時間変化．$k = 5.0$.

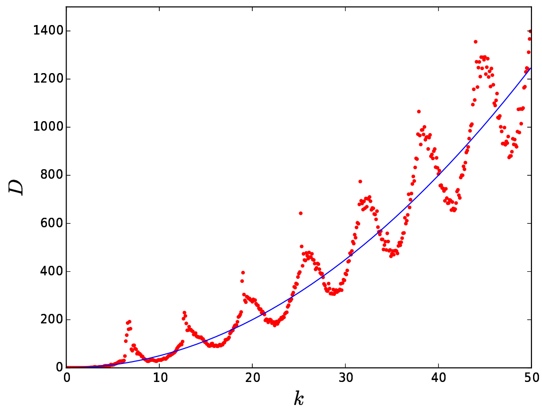


図 1.1.4: 拡散係数 D の k 依存性．青線は $D=\frac{k^2}{2}$．

1.2 波動関数の動的局在

この節では量子論における標準写像を用いて波動関数の動的局在を説明する．

量子論における周期撃力系の Hamiltonian は

$$\hat{H}(t)=T(\hat{p})+kV(\hat{q})\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(t-m\tau) \tag{1.2.1}$$

と書かれる．ここで $\hat{p}$，$\hat{q}$ は交換関係

$$[\hat{p},\hat{q}]=-i\hbar \tag{1.2.2}$$

を満たす．

周期撃力系における時間発展演算子を導こう [11]．まず Hamiltonian が時間に対して周期的であるため，時刻 s から t までの時間発展を表す時間発展演算子 $\hat{U}(t,s)$ に対して

$$\hat{U}(t+\tau,s+\tau)=\hat{U}(t,s) \tag{1.2.3}$$

が成り立つ．この $\hat{U}$ を用いて定義される演算子

$$\hat{F}_s=\hat{U}(s+\tau,s) \tag{1.2.4}$$

を Floquet 演算子と呼ぶ．$\hat{F}_s$ のスペクトルの性質は初期時刻 s によらない．なぜなら $\hat{U}$ には

$$\hat{U}(s,t)^{\dagger}=\hat{U}(s,t)^{-1}=\hat{U}(t,s) \tag{1.2.5}$$

の性質があるため

$$\begin{aligned}\hat{U}(s+\tau,s)&=\hat{U}(s+\tau,t+\tau)\hat{U}(t+\tau,t)\hat{U}(s,t)^{\dagger} &(1.2.6)\\&=\hat{U}(s,t)\hat{U}(t+\tau,t)\hat{U}(s,t)^{\dagger} &(1.2.7)\end{aligned}$$

となり $\hat{F}_s$ と $\hat{F}_t$ はユニタリ同値だからである．$\hat{F}\equiv\hat{U}(\tau,0)$ とすると式（1.2.6）より $\hat{U}(n\tau,0)=\hat{F}^n$ となるため，$\hat{F}$ を n 回写像することで長時間の時間発展を与えることができる．Floquet 演算子を用いて状態 $|\psi(n)\rangle$ の一周期分の時間発展は

$$|\psi(n+\tau)\rangle=\hat{F}\,|\psi(n)\rangle \tag{1.2.8}$$

で与えられる．波動関数がある時刻 $(n-1)\tau$ で撃力を受けた直後から撃力の周期 τ 分だけの時間発展を考えるとき $\hat{U}$ は微小時間 $\epsilon\tau$ を用いて

$$\hat{U}=\int_{(n-1+\epsilon)\tau}^{(n+\epsilon)\tau}\hat{H}dt \tag{1.2.9}$$

と書ける．ここで再び撃力を受けるまでの時間は自由粒子と同じ時間発展をするため，

$$\int_{(n-1+\epsilon)\tau}^{(n-\epsilon)\tau}\hat{H}dt=\int_{(n-1+\epsilon)\tau}^{(n-\epsilon)\tau}T(\hat{p})dt$$
$$=(\tau-2\epsilon\tau)T(\hat{p})$$
$$\to\tau T(\hat{p})\ (\epsilon\to 0) \tag{1.2.10}$$

である．時刻 $n\tau$ で波動関数は撃力の影響を受ける．このとき $T(\hat{p})$ からの寄与は小さく，撃力による位相の変化が大きいとみなし

$$\int_{(n-\epsilon)\tau}^{(n+\epsilon)\tau}\hat{H}dt=\int_{(n-\epsilon)\tau}^{(n+\epsilon)\tau}kV(\hat{q})\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(t-m\tau)dt \tag{1.2.11}$$
$$=kV(\hat{q}) \tag{1.2.12}$$

と書ける．よって周期撃力系の時間発展演算子 $\hat{U}$ は

$$\hat{U}=e^{-\frac{i}{\hbar}\tau T(\hat{p})}e^{-\frac{i}{\hbar}kV(\hat{q})} \tag{1.2.13}$$

となる．この $\hat{U}$ が周期撃力系における Floquet 演算子であり，以下ではこの $\hat{U}$ を Floquet 演算子と呼び，記号 $\hat{F}$ で表す．Floquet 演算子はユニタリ演算子であるため，正規直交基底を持つ．Floquet 演算子の ν 番目の固有値を λ_ν とし，λ_ν に属する固有状態を $|\Psi_\nu(n)\rangle$ とすれば

$$\hat{F}\,|\Psi_\nu(n)\rangle=|\Psi_\nu(n+\tau)\rangle \tag{1.2.14}$$
$$=\lambda_\nu\,|\Psi_\nu(n)\rangle \tag{1.2.15}$$

である．$|\Psi_\nu(n)\rangle$ は一周期分の時間発展に対しては定常でなければならないため

$$|\Psi_\nu(n+\tau)\rangle=e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon_\nu}\,|\Psi_\nu(n)\rangle \tag{1.2.16}$$

となる．ϵ_ν を擬エネルギー固有値と呼び，$|\Psi_\nu(n)\rangle$ を擬固有状態と呼ぶ．

周期撃力系の時間発展演算子が導かれたので，量子系における運動量期待値の平均二乗変位

$$<(p_n-p_0)^2>=\langle\psi(n)|\,(\hat{p}-p_0)^2\,|\psi(n)\rangle \tag{1.2.17}$$

の時間変化を考えよう．もし，量子系における $<(p_n-p_0)^2>$ が古典系と同様の拡散過程に従うのであれば，$<(p_n-p_0)^2>\sim Dn$ となるはずである．図 1.2.1 に量子系の $<(p_n-p_0)^2>$ と古典系のそれを比較した結果を示す．量子系の $<(p_n-p_0)^2>$ は時間発展初期には古典系と同様の拡散を示すが，ある時間スケールで拡散が停止する様子が見てとれる．拡散が停止する時間スケールを n^* で表す．この結果は，時間スケール n^* で波動関数が運動量空間において古典系の拡散過程に従わなくなることを表している．

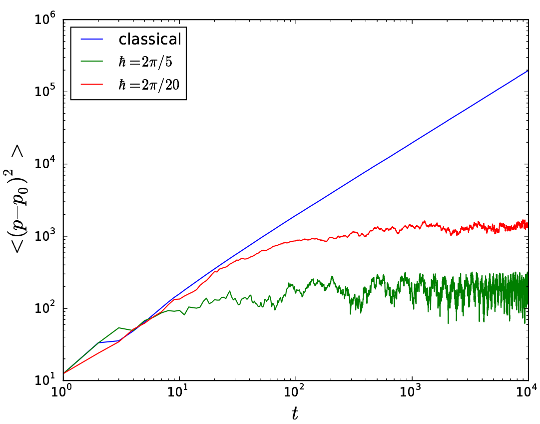


図 1.2.1: $<(p-p_0)^2>$ の様子．$k=5.0$

より直接的に波動関数の拡散の停止を見よう．運動量表示波動関数の初期状態 $\psi(p,0)$ を $k=0$ のときの無摂動系の固有状態 $\delta(p-p_\mu)\equiv\langle p|\,p_\mu\rangle$ とする．ここで μ 番目の無摂動系の固有状態を $|p_\mu\rangle$ と表した．n

回時間発展をし, 確率分布関数 $|\psi(p,n)|^2$ を求めた結果をスナップショットで図 1.2.2 に示した．$n=50$（水色の線）で $|\psi(p,n)|^2$ の裾が広がらなくなり，以後，時間発展を繰り返しても $|\psi(p,n)|^2$ の様子はほとんど変わらない．このことから $|\psi(p,n)|^2$ は時間発展の末に適当な空間スケール ξ を持った

$$|\psi(p,n)|^2 \sim \frac{1}{\xi} e^{-2|p-p_\mu|/\xi} \tag{1.2.18}$$

となると考えられる．このことは擬固有状態 $\Psi_\nu(p,n) \equiv \langle p|\ \Psi_\nu(n)\rangle$ が運動量空間に幅 ξ で指数関数的に局在していることを示唆している [12]．ξ は局在長と呼ばれる．

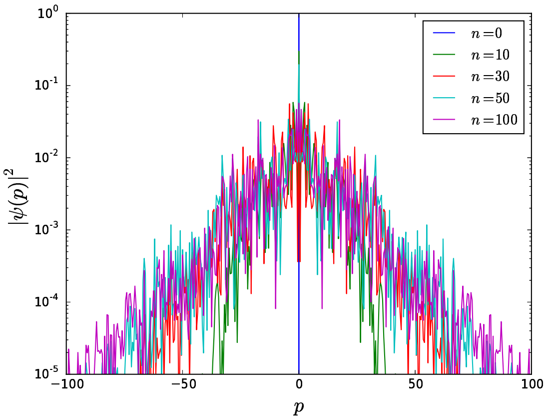


図 1.2.2: 運動量表示波動関数の絶対値二乗 $|\psi(p)|^2$ の時間発展のスナップショット．$p_0 = 0$，n は時刻．$k=5.0$，$\hbar = 0.5$

拡散が停止する時間スケール n^* と局在長 ξ，拡散係数 D は Chirikov らによって関係付けられている [13]．以下では文献 [13] の議論を紹介する．

もし擬エネルギー固有値が連続スペクトルになっているとすると波動関数は拡散し続けるため，ここでは擬エネルギー固有値 ϵ_ν は離散的になっていると仮定し，平均準位間隔を $\Delta\epsilon$ とする．エネルギーと時間の不確定性関係は $\Delta n \Delta\epsilon \sim h$ であるから，

$$\Delta n \sim \frac{h}{\Delta\epsilon} \tag{1.2.19}$$

である．$t_H \equiv \frac{h}{\Delta\epsilon}$ は Heisenberg 時間と呼ばれる．時間 $n < n^*$ では無摂動系の固有状態は古典系と同様に拡散する．すなわち

$$\langle\psi(n^*)|\,(\hat{p}-p_0)^2\,|\psi(n^*)\rangle \sim Dn^* \tag{1.2.20}$$

である．式（1.2.20）から拡散が停止する時間スケール n^* と平均準位間隔 $\Delta\epsilon$ の関係

$$n^* \sim \frac{h}{\Delta\epsilon} \tag{1.2.21}$$

が得られる．また，無摂動系の固有状態は n^* の時間発展後，幅 ξ で局在するため，

$$\langle\psi(n^*)|\,(\hat{p}-p_0)^2\,|\psi(n^*)\rangle \sim \xi^2 \sim Dn^* \tag{1.2.22}$$

である．

無摂動系の固有状態 $|p_\mu\rangle$ は

$$\hat{p}\,|p_\mu\rangle = \mu\hbar\,|p_\mu\rangle \tag{1.2.23}$$

であるため，$\xi/\hbar$ 個の擬固有状態と重なりを持つ．擬エネルギー固有値 ϵ_ν はその定義から $\epsilon_\nu \in [0, 2\pi\hbar]$ であり，幅 $[0,2\pi\hbar]$ に一様に分布していると仮定すると

$$\begin{aligned}\Delta\epsilon &\sim \frac{2\pi\hbar}{\xi/\hbar} \\ &= \frac{2\pi\hbar^2}{\xi}\end{aligned} \tag{1.2.24}$$

である．よって式（1.2.21）と式（1.2.24）より

$$n^* \sim \frac{\xi}{2\pi\hbar} \tag{1.2.25}$$

の関係が得られ，式（1.2.22）と式（1.2.25）より

$$D \sim 2\pi\hbar\xi \tag{1.2.26}$$

の関係が得られる．

1.3 動的局在の半古典的理解

動的局在が周期撃力系において現れる理由は，周期撃力系に対する擬固有値方程式が，形式的に，一次元ランダム系の強束縛模型のそれと同じ固有値方程式を満たすことによって理解することができる [3]．しかし，周期撃力系における波動関数の拡散は対応する古典系のカオスに起因しているため，動的局在の発生機構の完全な理解には，古典力学におけるカオスとの関連を知ることを避けて通ることはできない [7, 4]．この節では文献 [7, 4] における動的局在の半古典的理解に対する試みを紹介する．

1.3.1 切断のある区分線形写像の動的局在

周期撃力系の Hamiltonian において，

$$V(q) = \frac{(q - \pi - [\frac{q}{2\pi}]2\pi)^2}{2} \tag{1.3.1}$$

としたものを，以下では切断のある区分線形写像と呼ぶことにする．記号 $[\cdot]$ は $x - [x] < 1$ となるような整数を表す（Gauss 記号）．図 1.3.1 は切断のある区分線形写像のポテンシャル $V(q)$ とポテンシャルの微分 $\frac{dV}{dq}$ である．

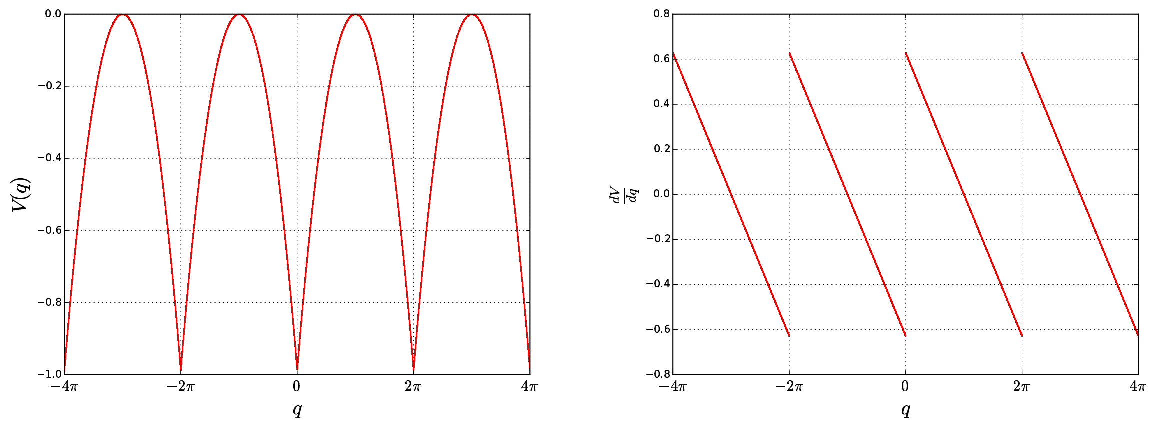


図 1.3.1: ポテンシャル $V(q)$ とポテンシャルの微分 dV/dq，$k = 0.2$．

1.3.2 動的局在の半古典論と古典作用間の相関

量子論における動的局在が古典論のカオスとどのように関係づくかを考える．以下，運動量表示で半古典論を考える．経路積分表示の伝播関数に鞍点近似を施すことによって，半古典伝播関数は

$$G^{(\mathrm{sc})}(p_n, p_{n'}) = \sum_l A_n^{(l)}(p_n^{(l)}, p_{n'}^{(l)}) e^{\frac{i}{\hbar} S^{(l)}(p_n^{(l)}, p_{n'}^{(l)})} \tag{1.3.2}$$

と書ける [14]．ここで，$S^{(l)}$ は古典軌道 l の作用を表す．軌道 l が n 回写像されるまでにかせぐ作用は

$$S^{(l)}(p_n^{(l)}, p_0^{(l)}) = \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{p_m^{(l)2}}{2} + V(q_m^{(l)}) + (p_m^{(l)} - p_{m-1}^{(l)}) q_m^{(l)} \right) \tag{1.3.3}$$

で与える．この作用（1.3.3）は写像（1.1.2）の母関数となるように与えられる（付録 B）．$A_n^{(l)}$ は古典軌道周りのゆらぎを反映した振幅因子である．半古典伝播関数は始状態と終状態に対する然るべき条件を満たす複数の軌道の和をとることによって得られる．初期状態を $\delta(p-p_0)$ においたときの半古典表示された波動関数を $\psi^{(\mathrm{sc})}(p,n)$ とする．半古典確率分布関数 $|\psi^{(\mathrm{sc})}(p,n)|^2$ は

$$|\psi^{(\mathrm{sc})}(p,n)|^2 = |G^{(\mathrm{sc})}(p_0,p_0)|^2 = \sum_{l,l'} A^{(l)} A^{(l')*} e^{\frac{i}{\hbar}(S^{(l)}-S^{(l')})} \tag{1.3.4}$$

のように半古典伝播関数 $G^{(\mathrm{sc})}$ を用いて表される．ただし振幅因子 A と作用 S の引数は省略した．ここで軌道 l,l' に与えられる条件はある時刻 n で運動量が $p_n=p_0$ となることである．式（1.3.4）を対角項と非対角項に分離して考えると，

$$\begin{aligned}
|\psi^{(\mathrm{sc})}(p,n)|^2 &= \sum_{l,l'} A_n^{(l)} A_n^{(l')*} e^{\frac{i}{\hbar}(S^{(l)}-S^{(l')})} \\
&= \sum_{l} |A_n^{(l)}|^2 + \sum_{l\neq l'} A_n^{(l)} A_n^{(l')*} e^{\frac{i}{\hbar}(S^{(l)}-S^{(l')})} \\
&= \sum_{l} |A_n^{(l)}|^2 + 2\sum_{l>l'} A_n^{(l)} A_n^{(l')*} e^{\frac{i}{\hbar}(S^{(l)}-S^{(l')})}
\end{aligned} \tag{1.3.5}$$

となる．対角項はを表している．そのため対角項は古典分布と同様に強いカオス系では時間発展とともに拡散する．半古典確率分布関数が動的局在を再現するためには，非対角項が古典分布の裾を抑制するような破壊的干渉と，$p_n=p_0$ 付近で振幅を一定に保つような建設的干渉を併せ持つ必要がある．このことは，作用の差が完全にランダムではなく，特殊な相関を持つことを意味する [5]．切断のある区分線形写像は位相空間上の全ての点で不安定性の強さが同一であることから，$A_n^{(l)}=A_n$ となる [4]．

$p_n=p_0$ の条件の下で半古典論（1.3.5）の各軌道間の作用の差がどのように分布しているかを数値的に見る．作用の差の分布関数は

$$g(\Delta S) = \sum_{i>j} \delta(\Delta S - |S_i - S_j|) \tag{1.3.6}$$

で与えられる．添字 i,j は各軌道の初期点に付けられた番号である．$g(\Delta S)$ は $|S_i-S_j|$ の値が ΔS と一致するような軌道のペア (i,j) の数を表す．

また，式（1.3.5）の非対角項は $g(\Delta S)$ を Fourier 変換することで

$$|\psi^{(\mathrm{sc})}(p,n)|^2 - \sigma_n(p) = A_n^2 \int e^{\frac{i}{\hbar}\Delta S} g(\Delta S) d(\Delta S) \tag{1.3.7}$$

と書くことができる [7]．図 1.3.2 にポテンシャルの強度 $k=0.15$ の場合に時刻 $n=28$ で $p_n=p_0=0$ の条件を満たす軌道についての $g(\Delta S)$ の様子を示した．もし，軌道間に全く相関がなく，作用の差が完全にランダムになっていれば分布関数は中心極限定理より Gauss 分布になることが期待される．

赤線が数値計算による結果で青線が Gauss 分布でのフィッティングである．分布関数 $g(\Delta S)$ の全体的なふるまいには Gauss 分布に従いながらもピークを持つことが読み取れる．$g(\Delta S)$ のピーク構造の存在は，軌道間の作用の差が完全にランダムではなく相関があることを示唆している．

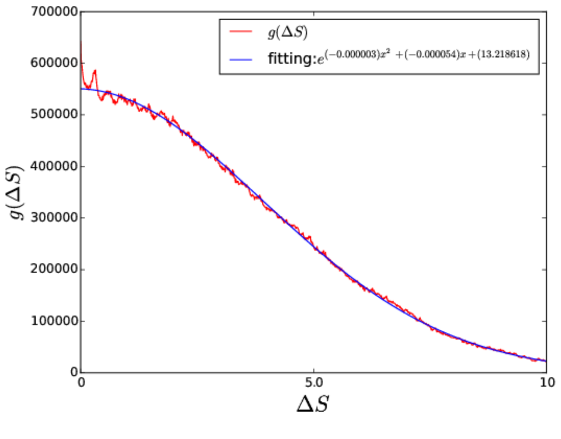


図 1.3.2: 作用の差の分布関数 $g(\Delta S)$．$n=28$，$k=0.15$，$p_n=p_0=0$

次に図 1.3.3 中央上に $p_n = p_0 = 2$ となる場合の $g(\Delta S)$ を示した．図 1.3.2 の $p_n = p_0 = 0$ の場合と比べると $p_n = p_0 = 0$ の場合は $g(\Delta S)$ のピーク構造がはっきりと見られるのに対して $p_n = p_0 = 2$ の場合にははっきりとは見られないことがわかる．図 1.3.3 の左下には時刻 $n = 27$ の場合に $p_n = p_0 = 0$ となるものを，右下には同じ時刻の $p_n = p_0 = 2$ となるものを示した．この場合でも $p_n = p_0 = 0$ の方がピーク構造がはっきりと見られる．

以下では $g(\Delta S)$ の中にピークとして現れる作用の相関の起源について議論をするため，$g(\Delta S)$ のピーク構造がはっきりと見える $p_n = p_0 = 0$ の場合に注目して考える．

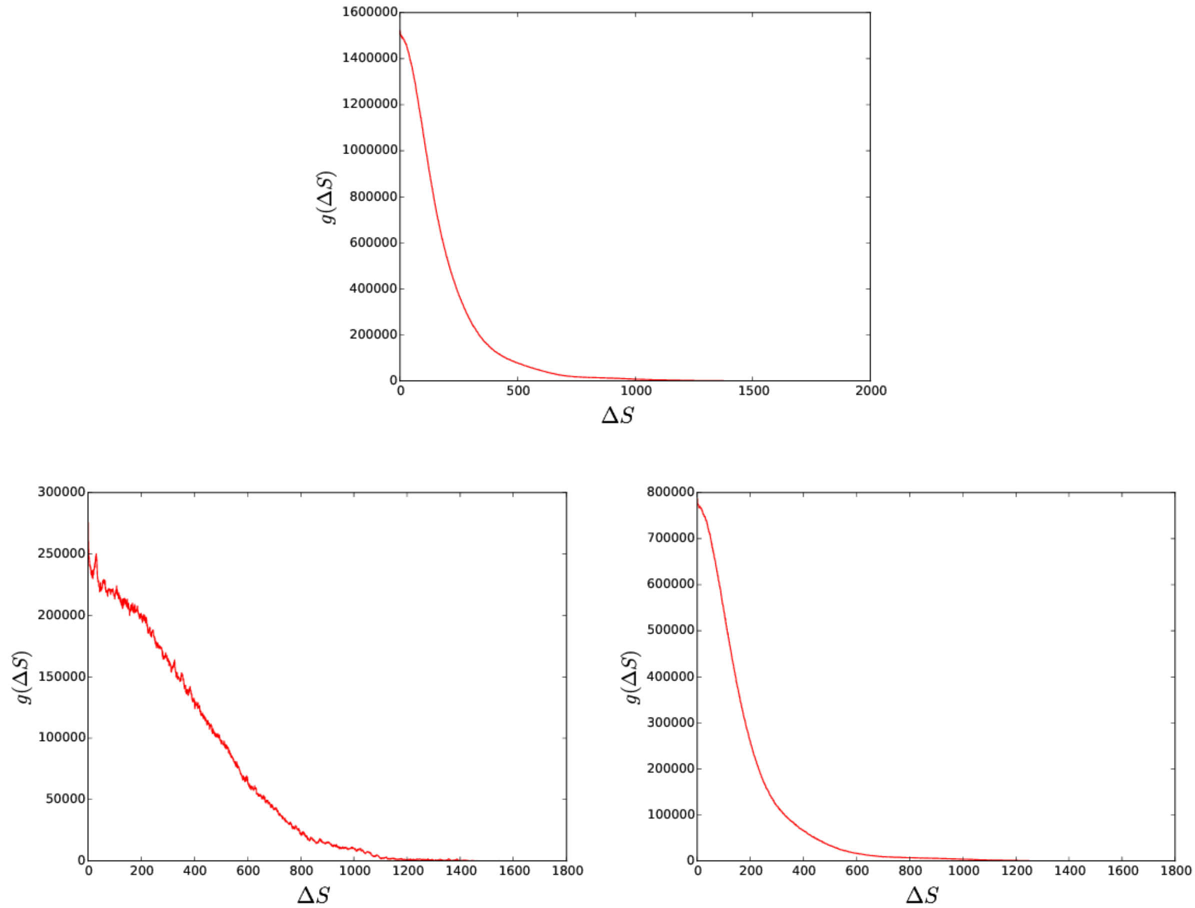


図 1.3.3: 作用の差の分布関数 $g(\Delta S)$．中央上：$n = 28$，$k = 0.15$，$p_n = p_0 = 2$．左下：$n = 27$，$k = 0.15$，$p_n = p_0 = 0$，右下：$n = 27$，$k = 0.15$，$p_n = p_0 = 2$．

首藤・池田らは $p_n = p_0 = 0$ の条件を満たす軌道の中から $g(\Delta S)$ に見られるピークを作り出す軌道のペアを抽出し，それらの軌道が法則性を持つかどうかを調べた [7]．その手段として位相空間を粗視化し，各領域に記号を割り振ることで導入される記号力学系を用いて軌道を記号列で表現する．切断のある区分線形写像においては軌道を表現する記号を

$$\eta_m = \left[\frac{q_m}{2\pi}\right] \tag{1.3.8}$$

で導入する．さらに，この系では軌道の記号列を用いて

$$S(\{\eta_m\}) = J_0 \sum_{m,m'=1}^{\tau} t(m-m')(\eta_m - \eta_{m'})^2 \tag{1.3.9}$$

とできる．ただし，$t(m) = \coth(\alpha(\tau/2 - |m|))/\coth(\alpha\tau/2)$，$J_0 = \pi^2 m \coth(\alpha\tau/2)\tanh(\alpha/2)$ であり，α は系の Lyapunov 数である．Lyapunov 数とは系の不安定性の尺度であり，切断のある区分線形写像の場合には α は位相空間上の場所によらず定数である．

作用の差の分布 $g(\Delta S)$ に現れるピークを作っている軌道のペアを抽出し，その軌道の記号列 $\{\eta_m\}$ を観察するといずれも記号列が 0011 の繰り返しで表現される 4 周期の記号列に欠陥構造（defect）が挿入され

た形で表されていた．欠陥構造が入った軌道の例として $n = 22$ の場合を文献 [7] から転載する．下線部が欠陥である．

- 1-defect

$$011\underline{01}00110011001100110 \tag{1.3.10}$$

$$0110011\underline{10}0011001100110 \tag{1.3.11}$$

- 3-defect

$$011\underline{01}0011\underline{01}0011\underline{01}00110 \tag{1.3.12}$$

$$011\underline{01}0011\underline{01}0011\underline{10}00110 \tag{1.3.13}$$

$$\underline{0}1100110011\underline{10}00\underline{01}1100\underline{1} \tag{1.3.14}$$

$$011\underline{01}001100\underline{01}11\underline{10}00110 \tag{1.3.15}$$

欠陥には 01 と 10 の二種類の入り方がある．例えば $\ldots 011\underline{01}0011 \ldots$ と $\ldots 011\underline{10}0011 \ldots$ である．欠陥の入り方の違いによる作用の差を $\Delta S_{\mathrm{defect}} = S(\ldots 011\underline{01}0011 \ldots) - S(\ldots 011\underline{10}0011 \ldots)$ とすると上述の欠陥を持つ軌道間の作用の差は $\Delta S_{\mathrm{defect}}$ の整数倍となる．よって作用の差の分布 $g(\Delta S)$ のピークは $\Delta S = 0, \Delta S_{\mathrm{defect}}, 2\Delta S_{\mathrm{defect}} \ldots$ の位置に現れる．この結果より作用間の相関を作り出す軌道間に 4 つの記号で表される周期的構造が関わっていることがわかる．この 4 つの周期的構造が 4 周期軌道由来のものであることが文献 [15] に示されている．以上の結果は，今のところ，切断のある区分線形写像でのみ確認されており，その他の系，あるいは一般的に成り立つか否かは明らかではない．そこで本研究では系を変更してこれらの事実が再現されるかどうかを考える．

1.4　切断のない区分線形写像における古典軌道の相関

半古典論が動的局在を再現するためには，半古典確率分布関数に寄与する古典軌道間の作用の差が相関を持つ必要がある．このことは，文献 [7, 4] で行われた解析により明らかになった．文献 [7, 4] で示された作用の相関を古典系が持つ時間に対して不変な構造と関連づけ，力学系の問題として取り扱うことができれば動的局在を半古典論を用いて理解するための道を一歩前進することになる．

一方で，強いカオス系において半古典論に用いられる古典軌道間の作用の差の相関と古典系の不変構造との関係は Tomsovic らによって議論されている [6]．文献 [6] では波束の再帰現象の半古典論に際して，軌道間の作用の差を安定多様体・不安定多様体という不変構造が囲む領域の面積と対応づけることで，背景の古典構造からの説明を試みているが，今のところ，アイディアの提唱に留まっている現状にある．Tomsovic らの議論の詳細は本論文第 2 章で紹介する．

文献 [7, 4] で見出された作用の相関の起源と，Tomsovic らのアイディアとの関係を考えることは，作用の相関の起源を，位相空間の不変構造の性質とを関係づけるために極めて重要である．しかし，文献 [7, 4] で用いられた切断のある区分線形写像は，その特殊性から，安定多様体と不安定多様体とが囲む領域を定義することができず，Tomsovic らの考える古典軌道間の作用の相関との関係を直接議論することができない．本研究では作用間の相関と系の古典構造との関係を知るために，上記の困難を解決し，Tomsovic らのアイディアを適用できるように変更したモデル（切断のない区分線形写像）で動的局在について調べた．

1.4.1　切断のない区分線形写像の動的局在

周期撃力系の Hamiltonian において，ポテンシャルを

$$V(q) = \begin{cases} -\frac{1}{2}q^2 \ (0 \le q < \frac{\pi}{2}) \\ \frac{1}{2}q^2 - \pi q + \frac{\pi^2}{4} \ (\frac{\pi}{2} \le q \le \frac{3\pi}{2}) \\ -\frac{1}{2}q^2 + 2\pi q - 2\pi^2 \ (\frac{3\pi}{2} < q < 2\pi) \end{cases} \tag{1.4.1}$$

$$\frac{dV}{dq} = \begin{cases} -q \ (0 \leq q < \frac{\pi}{2}) \\ -\frac{\pi}{2} + q \ (\frac{\pi}{2} \leq q \leq \frac{3\pi}{2}) \\ -q + 2\pi \ (\frac{3\pi}{2} < q < 2\pi) \end{cases} \tag{1.4.2}$$

としたものを以下では切断のない区分線形写像と呼ぶことにする．ただし，$m \in \mathbb{Z}$ である．撃力の周期は $\tau = 1$ とする．図 1.4.1 に切断のない区分線形写像のポテンシャル $V(q)$ とポテンシャルの微分 $\frac{dV}{dq}$ を示した．

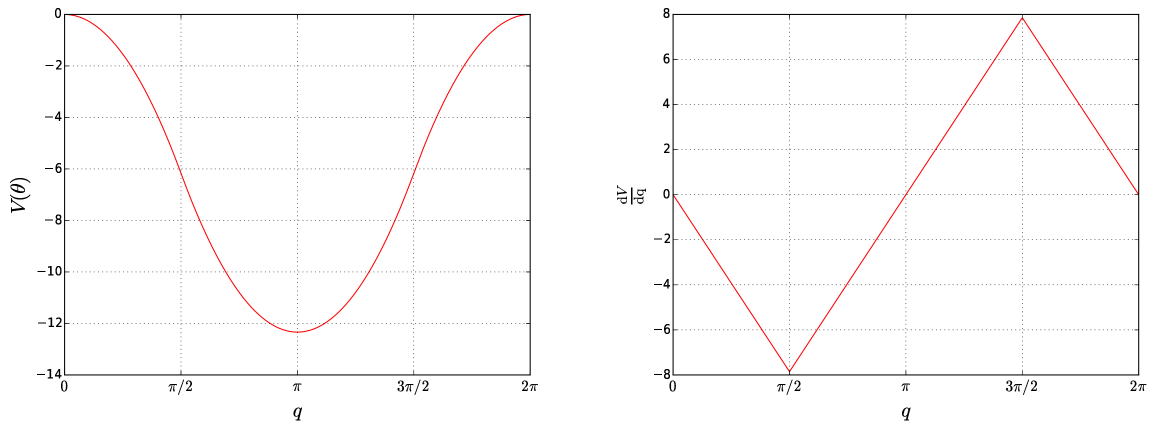


図 1.4.1: 切断のない区分線形写像のポテンシャル $V(q)$ とポテンシャルの微分 dV/dq．$k = 5.0$

切断のない区分線形写像はポテンシャルの強度 $k > 4$ で強いカオス系になる [16]．以後，$k > 4$ として強いカオス系を考える．図 1.4.2 に切断のない区分線形写像の位相空間の様子を示した．$k = 4$ までは位相空間上に安定領域が存在する．

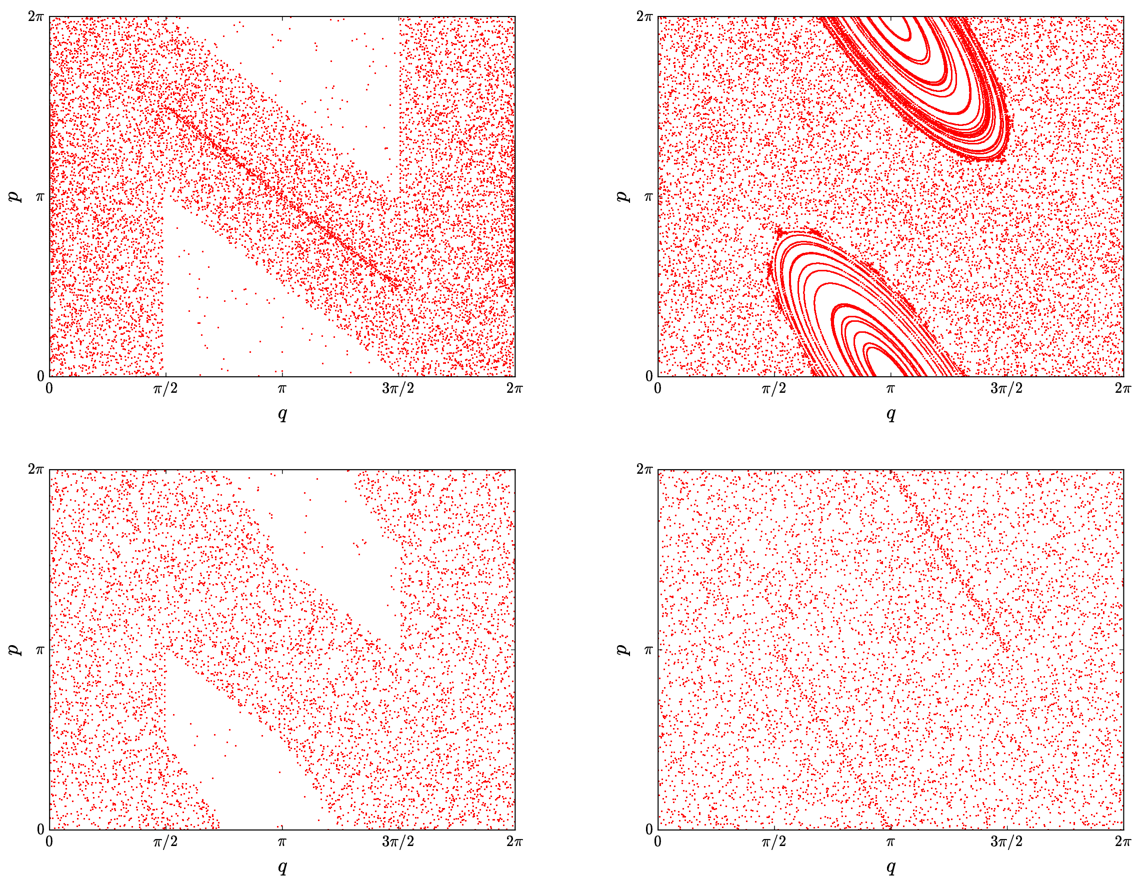


図 1.4.2: 左上：$k = 2.0$，右上：$k = 2.5$，左下：$k = 3.0$，右下：$k = 4.0$ の位相空間の様子．

切断のない区分線形写像について 1.2 節と同様の計算を行い，動的局在が発生するかを確認しよう．まず，古典系における古典軌道の分布の時間発展を運動量空間で見る．先と同様，古典軌道の運動量分布を $\sigma_n(p)$ とする．図 1.4.3 は軌道の初期分布 $\sigma_0(p) = \delta(p)$ としたときの $\sigma_n(p)$ の時間発展のスナップショットである．ただし，ポテンシャルの強度 $k = 5.0$ とした．軌道の分布 $\sigma_n(p)$ の裾が運動量空間上で時間発展とともに広がっていく様子が確認でき，1.2 節の標準写像の場合と同様に，軌道の分布 $\sigma_n(p)$ は通常の拡散方程式によく従い Gauss 分布になる．図 1.4.4 に運動量の平均二乗変位 $< p^2 >$ の時間変化を示した．$< p^2 >$ は時間 n に対して線形に拡散する．これらの状況は 1.1 節で紹介した標準写像の場合と同様である．

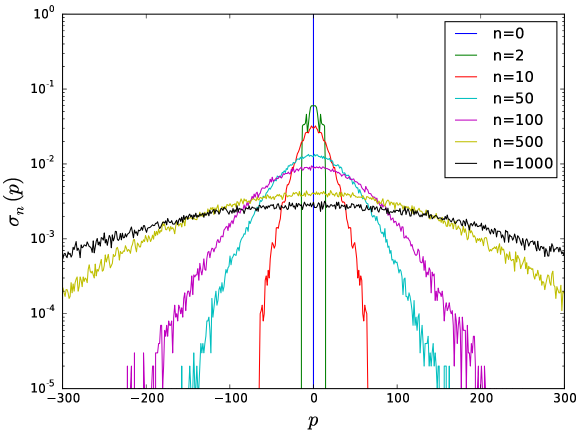


図 1.4.3: 切断のない区分線形写像における軌道の分布 $\sigma_n(p)$ の時間発展のスナップショット．n は時刻．$k = 5.0$.

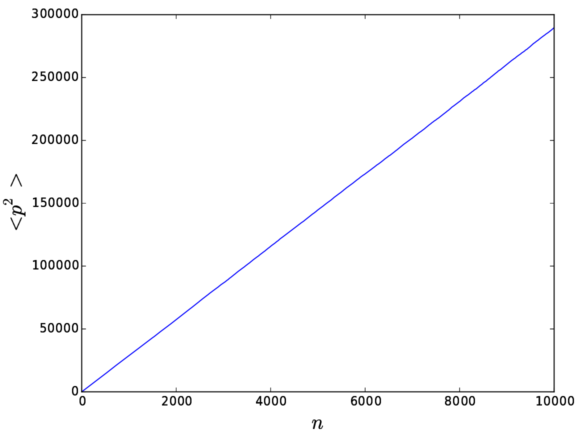


図 1.4.4: 切断のない区分線形写像における運動量の平均二乗変位 $< p^2 >$ の時間変化．$k = 5.0$.

古典軌道の運動量分布 $\sigma_n(p)$ の拡散について標準写像と同様のことが確認されたので，次に運動量表示波動関数 $\psi(p, n)$ の時間発展を見ることで動的局在を確認しよう．

図 1.4.5 は運動量表示波動関数の絶対値二乗 $|\psi(p, n)|^2$ の時間発展のスナップショットである．$|\psi(p, n)|^2$ の裾は $n = 10$ 程度まで広がり続ける様子が見られるため，時間発展初期には $|\psi(p, n)|^2$ は拡散するといえる．さらに時間発展をすると，$n = 100$ を越えたあたりで $|\psi(p, n)|^2$ の裾の広がりが $|p| = 100$ 程度で停止する．$n = 1000$ まで時間発展しても $|\psi(p, n)|^2$ の様子は変わらず，ある局在長 ξ の $|\psi(p, n)|^2 \sim \frac{1}{\xi} e^{-2|p|/\xi}$ という状態に落ち着いたと考えられる．図 1.4.5 にあるように，運動量期待値の二乗平均 $< p^2 >$ の時間変化を見ると，時間発展初期には古典系と同様に時間 n に対して増大するが，ある時間スケールで停滞する様子が見て取れる．これらの結果は標準写像で確認されている動的局在と同様であるため，切断のない区分線形写像においても動的局在を確認することができた．

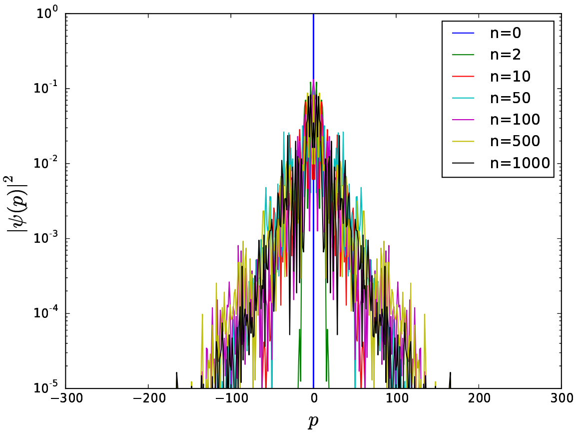


図 1.4.5: 運動量表示波動関数の絶対値二乗 $|\psi(p)|^2$ の時間発展のスナップショット．n は時刻．$k = 5.0$, $\hbar = 1.2$

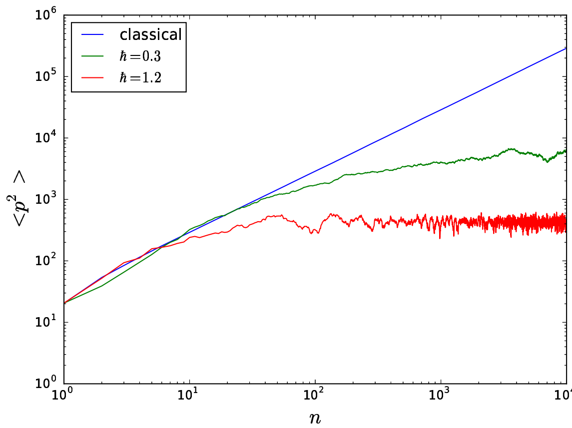


図 1.4.6: 運動量期待値の二乗平均 $< p^2 >$ の時間変化．$k = 5.0$.

1.4.2 作用の差の分布

切断のない区分線形写像において，初期条件を $p = 0$ とする軌道の中で，ある時刻 n について $p_n = p_0 = 0$ の条件を満たす軌道の作用を計算し，式（1.3.6）で与えられる作用の差の分布 $g(\Delta S)$ を得た．ただし軌道の初期位置 $q_0 \in [0, 2\pi)$ とした．図 1.4.7 はポテンシャルの強度 $k = 5.0$，時刻 $n = 6, 8, 10$ の場合である．$g(\Delta S)$ のグラフの中にはピーク構造が現れ，かつ，全体は Gauss 分布にならないことがわかる．ほとんどピークがあるようには見えない $n = 10$ の場合に関しても Gauss 分布にはならないため，軌道間の作用の差には何らかの相関があると考えられる．図 1.4.7 の右下に $n = 10$ の場合の $g(\Delta S)$ を semi-log プロットで描いたものを示した．$g(\Delta S)$ 全体の減衰が semi-log プロットの下では 1 次になっていることが読み取れる．

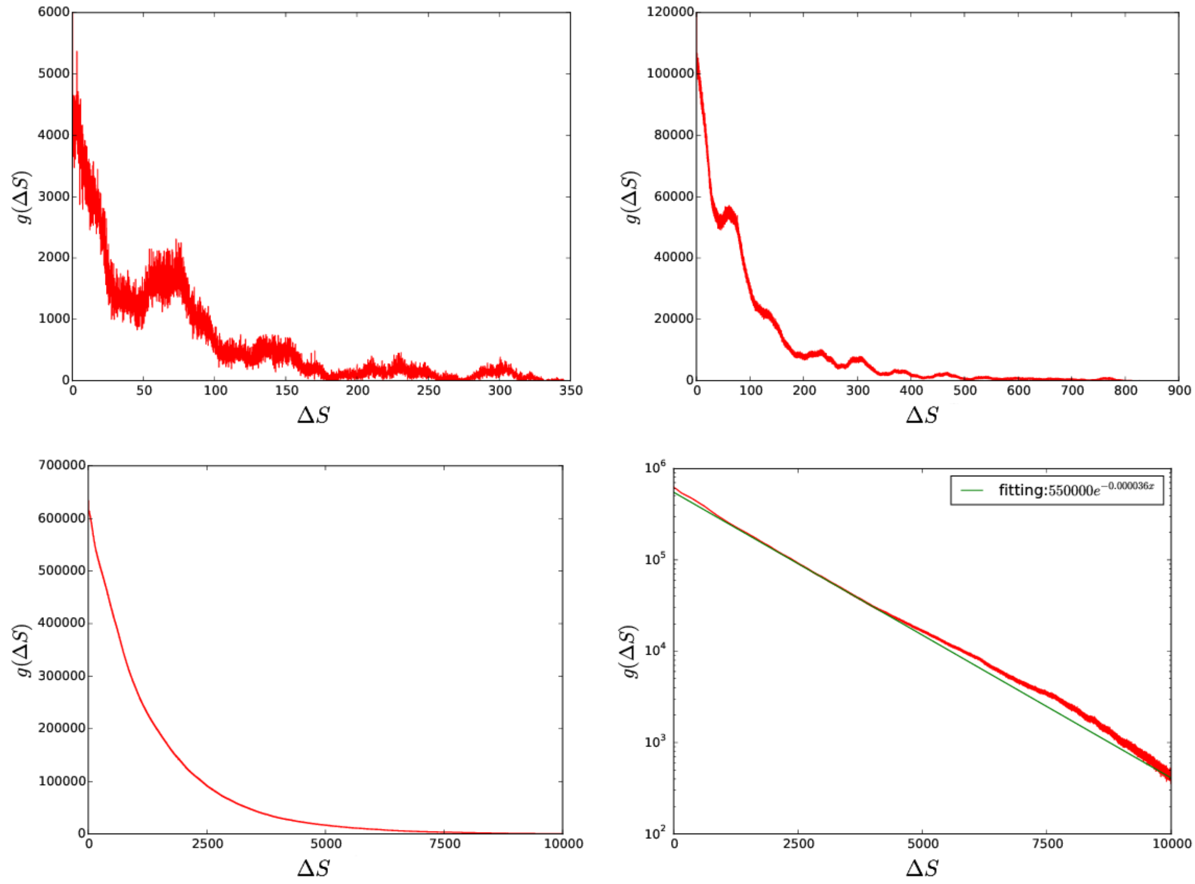


図 1.4.7: $p_n = p_0 = 0$ の条件を満たす軌道の作用の差の分布．いずれも $k = 5.0$．左上：$n = 6$，右上：8，左下：ノーマルプロットでの $n = 10$，右下：semi-log プロットでの $n = 10$.

また，初期条件を直線 $p = 0$ 上に持つが，$p_n = p_0 = 0$ の条件を満たさない軌道をランダムにとり $g(\Delta S)$ を計算した結果が図 1.4.8 である．初期位置をランダムにとったにも関わらず $g(\Delta S)$ は Gauss 分布にならないため，この場合も作用の差には相関があり，$p_n = p_0 = 0$ の条件を満たす軌道の場合と同様にピーク構造を持っていると考えられる．

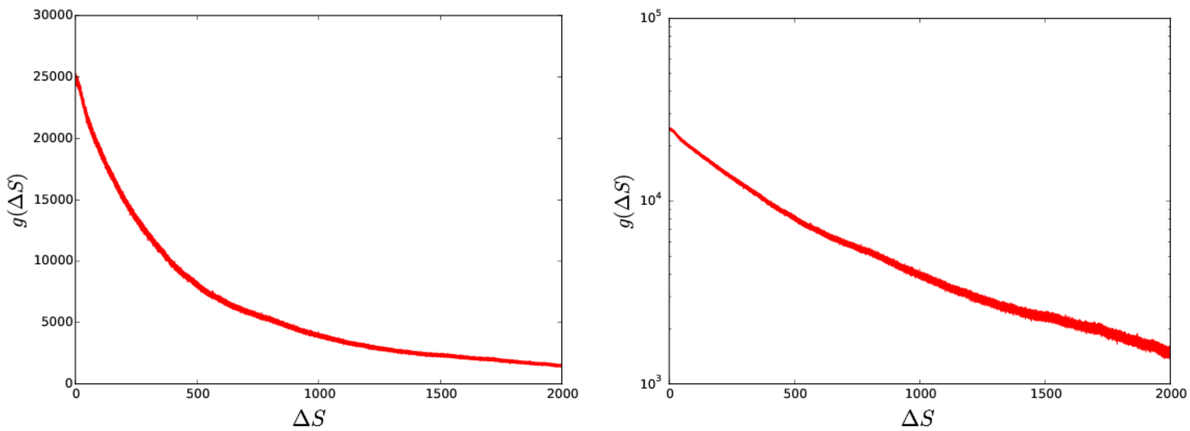
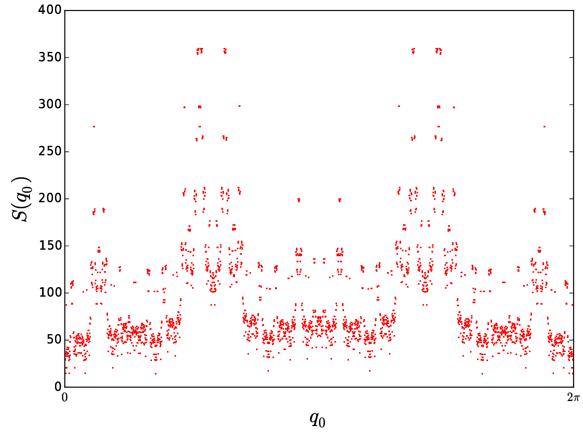
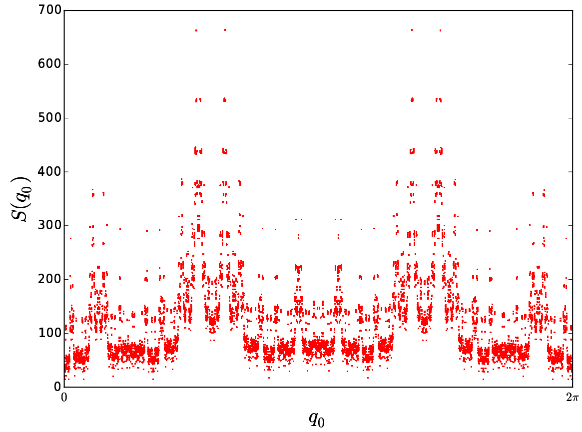


図 1.4.8: $p_n = p_0 = 0$ の条件を満たさない軌道の作用の差の分布．$k = 5.0$，$n = 8$．左：ノーマルプロット，右：semi-log プロット．

以下ではここで得られた作用の差の相関の起源を追究する．特に $p_n = p_0$ の場合にははっきりとピーク構造が見えるため，$p_n = p_0$ を満たす軌道に注目し解析を行う．$p_n = p_0 = 0$ の条件を満たす軌道の中から作用の差の分布 $g(\Delta S)$ のピーク構造を作っている軌道を抽出するため，作用の値を軌道の初期位置 q_0 の関数としてみる．すなわち $S = S(q_0)$ とする．ただし，$q_0 \in [0, 2\pi)$ とした．$S(q_0)$ を，ポテンシャルの強度

$k = 5.0$ の場合に時刻 $n = 6, 7, 8$ まで求めた結果を図 1.4.9 に示す．図 1.4.9 より，どの時刻においても，アルファベットの M の形に似た構造が現れた．$S(q_0)$ の自己相似的な成長過程から，$S(q_0)$ にフラクタル構造があることが予想できる．図 1.4.10 に示したように，実際に $S(q_0)$ の一部を拡大して見ると，類似の構造が現れることから，$S(q_0)$ はフラクタル構造の性質が確認される．$S(q_0)$ がフラクタル構造を持っているならば，各軌道の作用の値はランダムではない．各軌道の作用の値がランダムでないならば，各軌道間の作用の差の値もランダムではない．よって，$S(q_0)$ がフラクタル構造を持つことは，$g(\Delta S)$ のグラフに現れたピーク構造がランダムな確率のゆらぎによるものではないことの証拠になる．また，図 1.4.9 から，$S(q_0)$ では $S = 50$ 程度のところや $S = 120$ 程度のところにプロットが密集していることがわかる．$S(q_0)$ においてプロットが密集していることは，図 1.4.11 左上に示した $S(q_0)$ に対する軌道の本数の分布にピークとして反映されている．このピークが立っている場所を基準に，$S(q_0)$ を図 1.4.11 右上に示したように層に分ける．図 1.4.11 右上では最も軌道の本数が多い層を層 1 とし，軌道の本数が多い順に層 2，層 3 としている．作用の差の分布 $g(\Delta S)$ の各ピークが立つ場所は層 1 の軌道と他の層の軌道との差から見積もることができる．例えば，$g(\Delta S)$ のピークを ΔS の小さい順にピーク 1，ピーク 2 とすると，層 1 の軌道と層 2 の軌道とのペアが作用の差の分布 $g(\Delta S)$ のピーク 1 を形成しており，層 1 と層 3 の軌道のペアがピーク 2 を形成するというように見積もられる．$g(\Delta S)$ のピーク 1 の形成には層 1 の軌道と層 2 の軌道以外にも層 2 の軌道と層 3 の軌道とのペアも寄与するが，層 1 の軌道の本数が非常に多いため，層 1 の軌道と層 2 の軌道のペアだけを考えれば $g(\Delta S)$ のピークの立つ場所を見積もる上では十分であると考えられる．





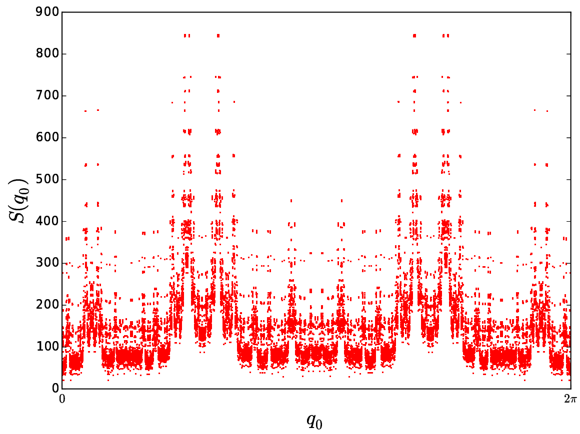


図 1.4.9: 作用の値 S の初期位置 q_0 に対する分布．左上：$n = 6$，右上：$n = 7$，中央下：$n = 8$．ただし，$k = 5$，$p_n = p_0 = 0$．

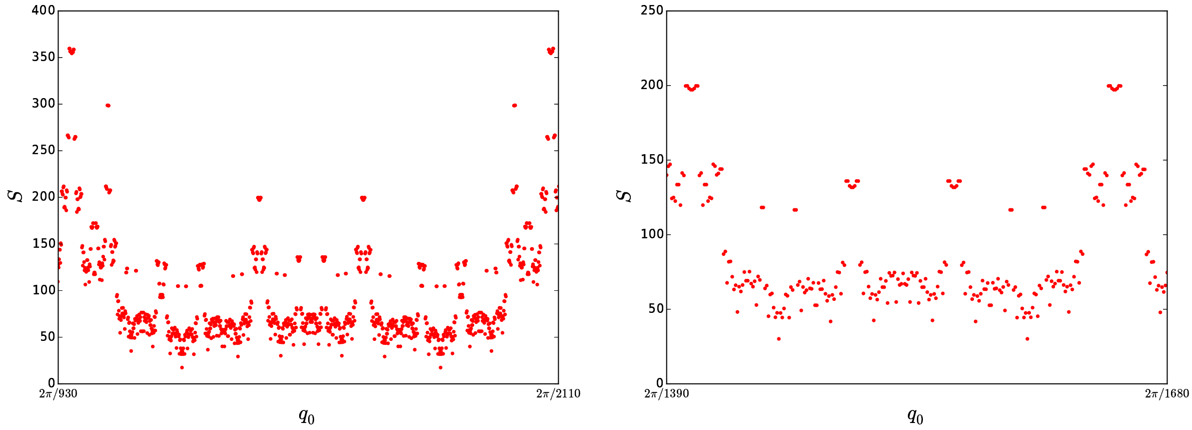


図 1.4.10: $n = 6$ の場合の $S(q_0)$ の拡大図.

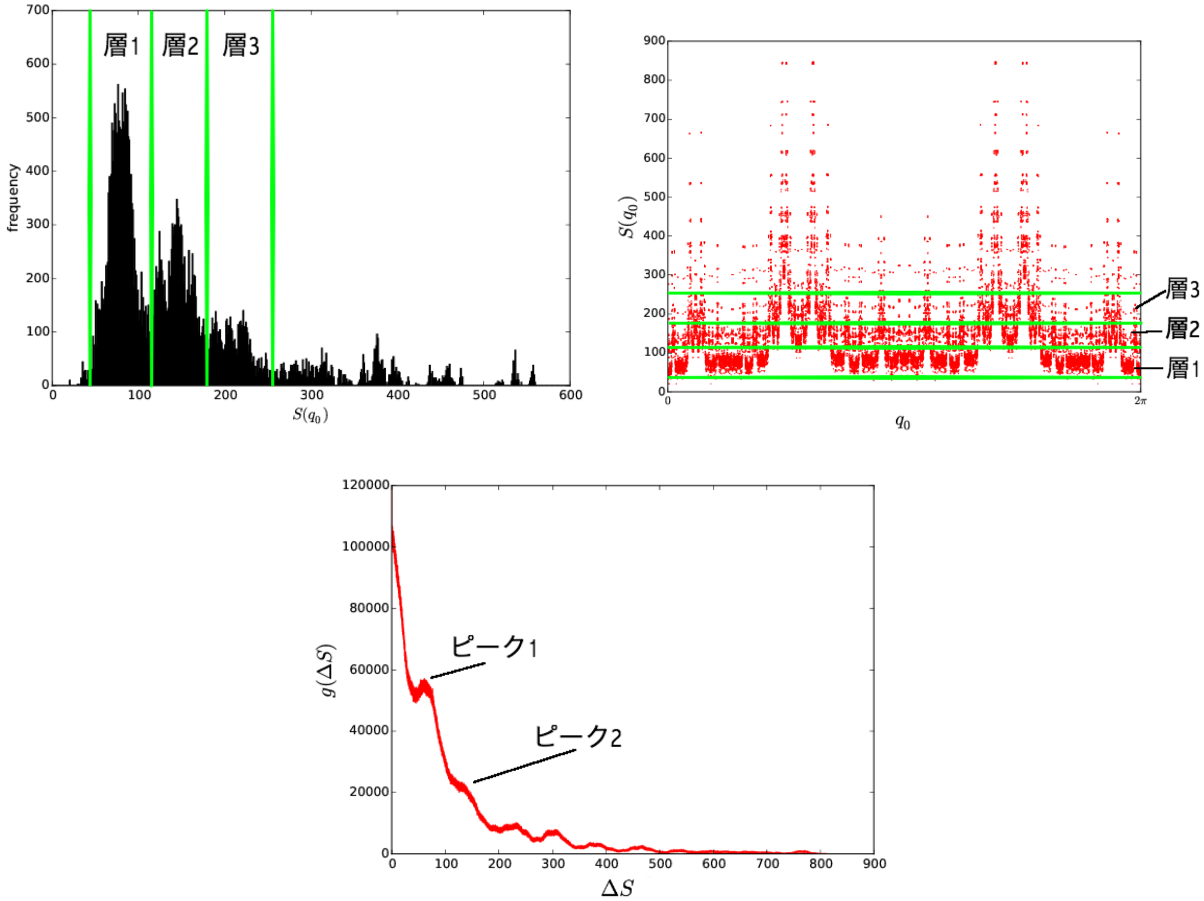


図 1.4.11: $S(q_0)$ に対する軌道の本数の分布．緑の線は補助線.（左上），$S(q_0)$ に補助線（緑線）を引いたもの（右上），作用の差の分布 $g(\Delta S)$ のピークに番号づけをしたもの（中央下）．いずれも $k = 5.0$，$n = 8$.

1.4.3 作用の相関と周期軌道との関係

次に，作用の差の分布 $g(\Delta S)$ のピークの形成に最も寄与している層（図 1.4.11 の層 1 に対応する層）に属している軌道について考える．作用の大きさを見積もるための比較対象として，4 周期軌道の作用の値を同時にプロットしたものが図 1.4.12 である．4 周期軌道はこのモデルでは作用の大きさで分類すると 2 種類存在し，大きい方を $S^1_{\rm 4PO}$，小さい方を $S^2_{\rm 4PO}$ とする．図 1.4.12 の中には $S^{1,2}_{\rm 4PO}$ の大きさの線を描画してある．この図から層 1（最も密な層）に属する軌道の作用の大きさは 4 周期軌道の作用の 1〜3 倍程度であることがはっきりとわかる．

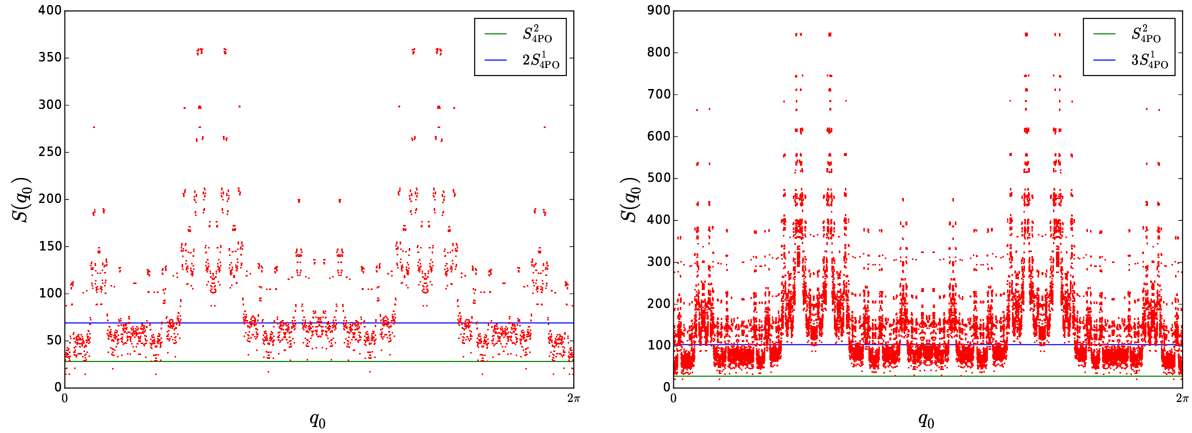


図 1.4.12: 図 1.4.9 に $S_{\mathrm{4PO}}^{1,2}$ の整数倍の線を描画したもの．左：$n=6$，右：$n=8$．

層 1 の軌道と 4 周期軌道との関係を論じる前に，本研究の中で証明したいくつかの性質と位相空間上の構造について説明する．ある時刻 n で $p_n = p_0 = 0$ となる軌道について以下の性質が成り立つ．

性質 1. 写像（1.1.2）で時間発展が与えられる系において，$p_n = p_0 = 0$ の条件を満たす全ての軌道は $2n$ 周期軌道である．

性質 1 の証明は付録に載せた．この性質の証明の過程から

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{dV}{dq}(q_i) = 0 \tag{1.4.3}$$

が周期軌道となる q_0 に対する条件であり，式（1.4.3）を q_0 について解くことによって周期軌道の初期点を求めることができる．4 周期軌道はいずれのモデルにおいても，$p_n = p_0 = 0$ である限り，不動点（1 周期軌道）を除き最小周期の周期軌道である．$n=1$ のとき，すなわち $p_1 = p_0 = 0$ となる軌道は $p_0 = 0$ であるため写像（1.1.2）の定義から $q_1 = q_0$ であることが示され，$(q_1, p_1) = (q_0, p_0)$ となるため不動点であることがわかる．性質 1 はポテンシャル $V(q)$ によらず成立するため，いずれのモデルにおいても不動点を除けば $p_n = p_0 = 0$ を満たす最小周期の周期軌道は $n=2$ のときのものであり，すなわち 4 周期軌道である．

また性質 1 で与えられる $2n$ 周期軌道について以下の性質 2 が成り立つ．

性質 2. ポテンシャルの微分 $\frac{dV}{dq}(q)$ が q について 2π 周期的であるとき，$p=0$ 上の $2n$ 周期軌道 $(q_0, 0)$ が存在するならば，$(q_0 + 2N\pi, 0)$（N は整数）も $2n$ 周期軌道である．

性質 2 から周期軌道は位相空間上で q 軸に沿って 2π 周期的に並んでいることがわかる．時間発展した軌道の各点を線分で結ぶと，あたかも平行四辺形のタイルが並んだ構造をなすため，一つの平行四辺形を 4 周期軌道のタイルと呼び，q 軸に沿って 4 周期軌道のタイルが並ぶ構造を 4 周期軌道のタイル構造と呼ぶことにする．図 1.4.13 に切断のない区分線形写像における 4 周期軌道のタイル構造を示した．図 1.4.13 の中で 4 周期軌道は 18 本ある．

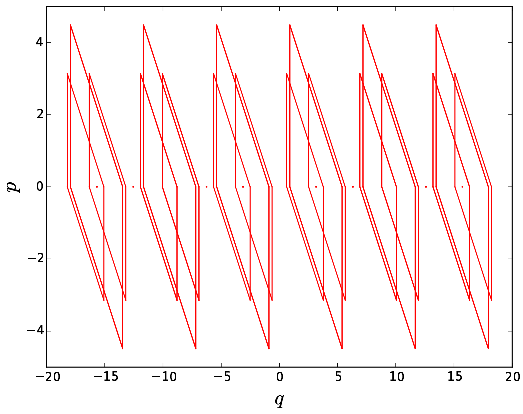


図 1.4.13: 切断のない区分線形写像における 4 周期軌道のタイル構造．$k = 5.0$．$p = 0$ 上のドットは不動点である．

性質 3. ポテンシャルの微分 $\frac{dV}{dq}(q)$ が 2π 周期的であるとき，$(q_0^{(n)}, 2M\pi)$（M は 0 でない整数）なる点は，n 回写像後，$(q_0^{(n)} + 2nM\pi, 2M\pi)$ という点に写像される．ここで，$p = 0$ 上の $2n$ 周期軌道の座標を $(q_0^{(n)}, 0)$ とする．

性質 3 より初期点 $(q_0^{(n)}, 2M\pi)$ から始まる軌道は周期軌道ではなく，$n = 2$ の場合に時間発展した軌道の各点を線分で結んでも平行四辺形は作らない．しかし，$p = 2M\pi$ 上の軌道が作る構造も 4 周期軌道の場合との対応から $p = 2M\pi$ でのタイル構造と呼ぶことにする．

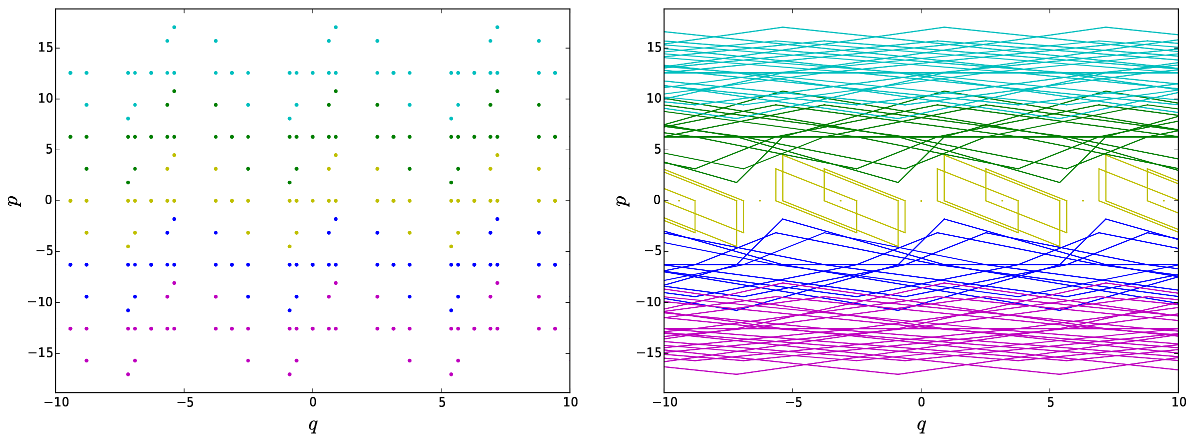


図 1.4.14: 左：切断のない区分線形写像における $p = 2M\pi$ 上に初期条件を持つ $p_2 = p_0 = 2M\pi$ となる軌道と 4 周期軌道．ただし，$(q = N\pi, 0)$ は系の不動点（1 周期軌道）．右：左図の点を時系列順に線分で結ぶことで得られるタイル構造．いずれも $k = 5.0$

以上の性質 1，2，3 の準備の下で作用の分布 $S(q_0)$ の断層構造と 4 周期軌道との関係について議論する．作用の分布 $S(q_0)$ の断層構造の中で，最も密に軌道が存在する層 1 に属する軌道の時間発展を数値的に計算すると図 1.4.15，図 1.4.16 のようになる．ほとんどの軌道が時間発展の中で 4 周期軌道のタイルの辺にほとんど重なるように線分を作ることが計算結果を観察してわかった．例として，$k = 5.0$，$n = 6, 8$ の場合を図 1.4.15，1.4.16 に示す．二番目に密な層に属する軌道の時間発展を数値的に計算し観察すると，$p = \pm 2\pi$ でのタイル構造にたどり着き，たどり着いた先のタイルの辺にほとんど重なるように線分を作ることがわかった．例として $k = 5.0$，$n = 6$ の場合を図 1.4.17 に示す．

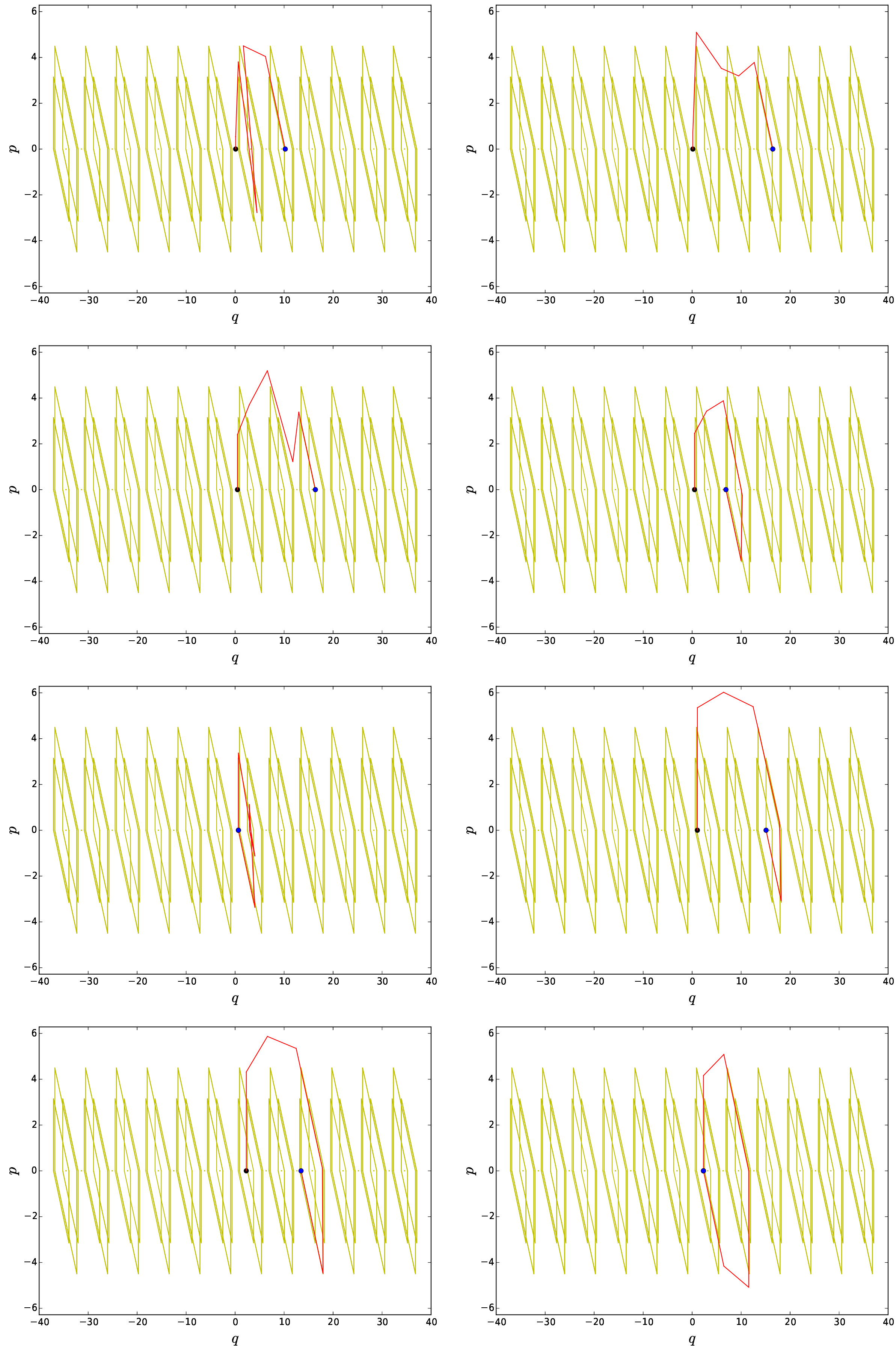


図 1.4.15: $k = 5.0$，$n = 6$ の場合．黒点が $(q_0, 0)$ に対応し，青点が $(q_n, 0)$ に対応する．赤線は時間発展した軌道の各点を結ぶ線分である．

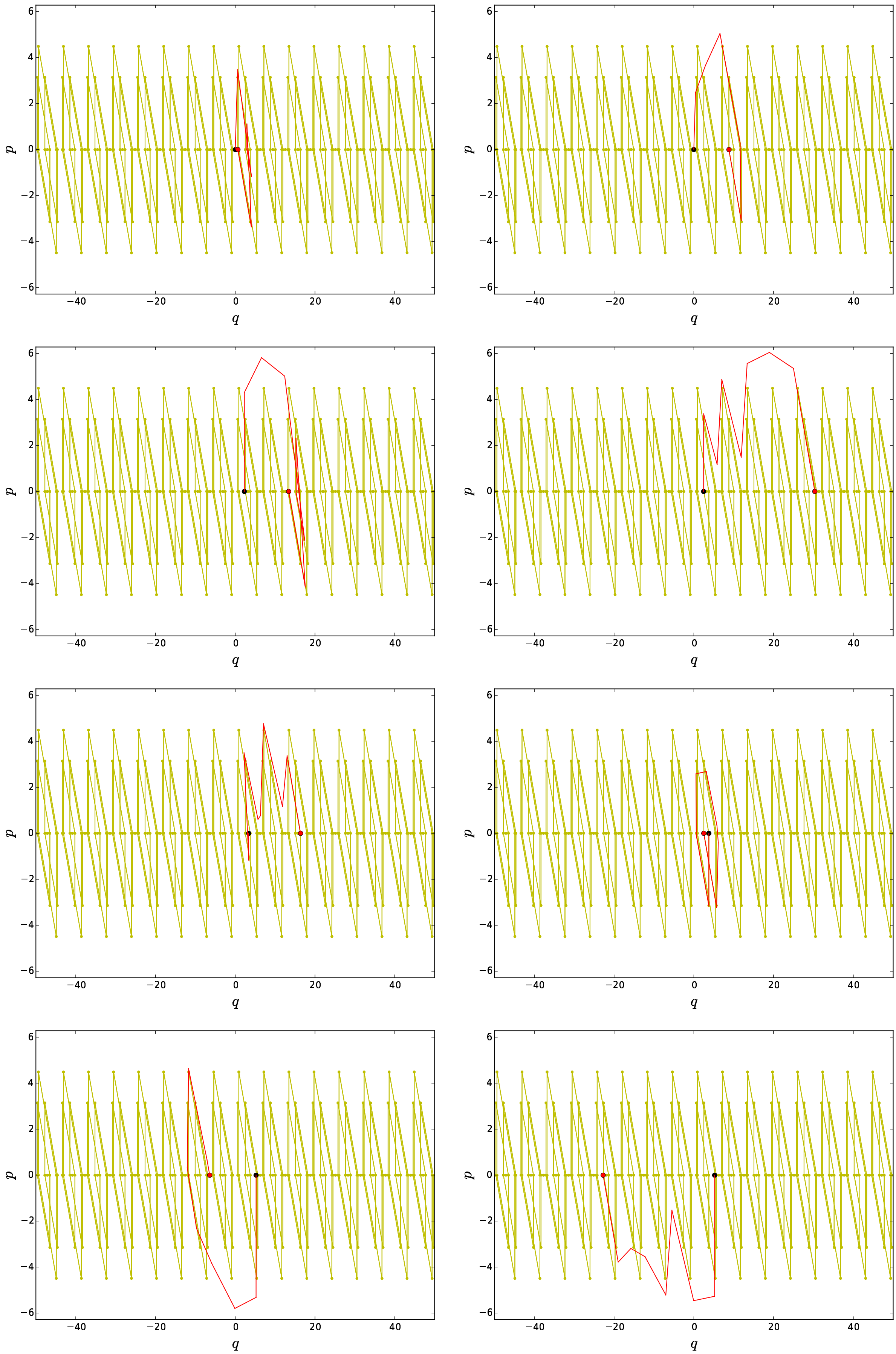


図 1.4.16: $k = 5.0$，$n = 8$ の場合．黒点が $(q_0, 0)$ に対応し，赤点が $(q_n, 0)$ に対応する．赤線は時間発展した軌道の各点を結ぶ線分である．

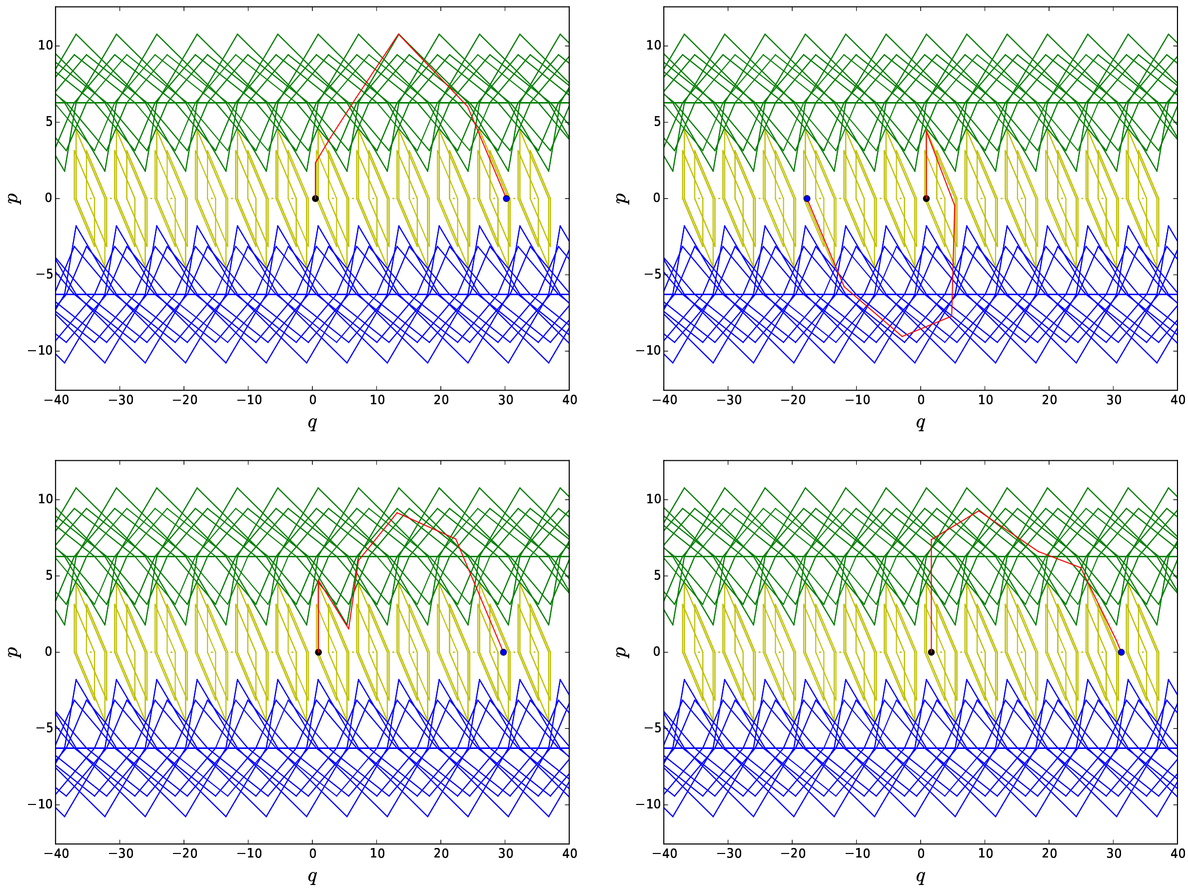


図 1.4.17: $k = 5.0$，$n = 6$．黒点が $(q_0, 0)$ に対応し，青点が $(q_n, 0)$ に対応する．赤線は時間発展した軌道の各点を結ぶ線分である．

第2章　強いカオス系における波動関数の再帰現象

強いカオス系における波動関数の干渉と古典軌道間の相関についてもう一つの先行研究 [6] を紹介する．文献 [6] では強いカオス系で起こる波動関数の再帰現象を扱っている．波動関数の再帰現象に対してはホモクリニック軌道をとりこむ半古典論に基づいて考察がなされている．ホモクリニック軌道を用いた半古典論は Heller らの計算から導かれている [17]．またここでも軌道間の作用の差が中心的役割を果たしているのだが，ホモクリニック軌道間の作用の差は系の不変構造（安定多様体・不安定多様体）が位相空間上に作る領域の面積の値に一致することが知られている [18]．Tomsovic らは，[17] の半古典論が有効であることを前提に，[6] で発見された再帰現象を背後にある古典構造から説明することを試みた．その際に，ホモクリニック軌道の作用間の差を系の不変構造が作る領域の面積に読み替え，その面積が量子化条件を満たすものであるとき再帰が起こる，という仮説が提唱されたが，いまだ実証には至っていない．

ここでは以上の話のレビューを行うとともに Tomsovic らの再帰現象について写像系を用いた立場から議論する．

2.1　再帰現象の半古典的考察

波束の再帰現象とは初期波束を時間発展させ，初期状態との重なりが大きくなることをいう．ここでの重なりが大きい，小さいということに関しては特に決まりはないが適当な閾値を設けて判断する．ここでは [6] で Tomsovic らが提案した波束の再帰の機構の説明を行う．スタジアムビリヤード系において，初期状態は Gauss 分布型波束を中心をずらしながら並べて重ね合わせた状態である（図 2.1.1 左の $t=0$）．この取り方は古典系の周期軌道の上に乗っていることになっている．一般に量子論において波束の相関関数は

$$
\begin{aligned}
C_{\beta\gamma}(t) &= \langle\beta|\ \gamma(t)\rangle && (2.1.1)\\
&= \int dq dq' \psi^*_\beta(q) G(q,q';t)\psi_\gamma(q') && (2.1.2)
\end{aligned}
$$

で表される．$|\beta\rangle, |\gamma\rangle$ は Gauss 分布型波束である．ここで q-表示の波動関数を

$$
\psi_\gamma(q) = \langle q|\ \gamma\rangle \tag{2.1.3}
$$

とした．また，$G(q,q';t)$ は q' から q への波束の伝播を表すプロパゲータである．今，初期状態は複数の Gauss 分布型波束を周期軌道に横たわるように重ね合わせたものであるから，初期状態の波束（図 2.1.1）を $|\alpha\rangle$ としたときの自己相関関数 $C_\alpha(t)$ は

$$
C_\alpha(t) = \langle\alpha|\ \alpha(t)\rangle \propto \sum_{\beta,\gamma} C_{\beta\gamma}(t) \tag{2.1.4}
$$

である．図 2.1.1 はスタジアムビリヤード系における波束の再帰の様子である．図 2.1.1 左の右列では波束の再帰がはっきりと起きているが，左列では右列ほどはっきりとした再帰が見られない．図 2.1.1 右は波束の自己相関関数のグラフである．実線が右列，点線が左列に対応している．この場合は自己相関関数の閾値を 0.7 程度に見積もれば，波束の再帰の様子がよく反映されていることが読み取れる．これほどはっきりした再帰は文献 [6] で紹介されているパラメータ設定以外では確認されていない．

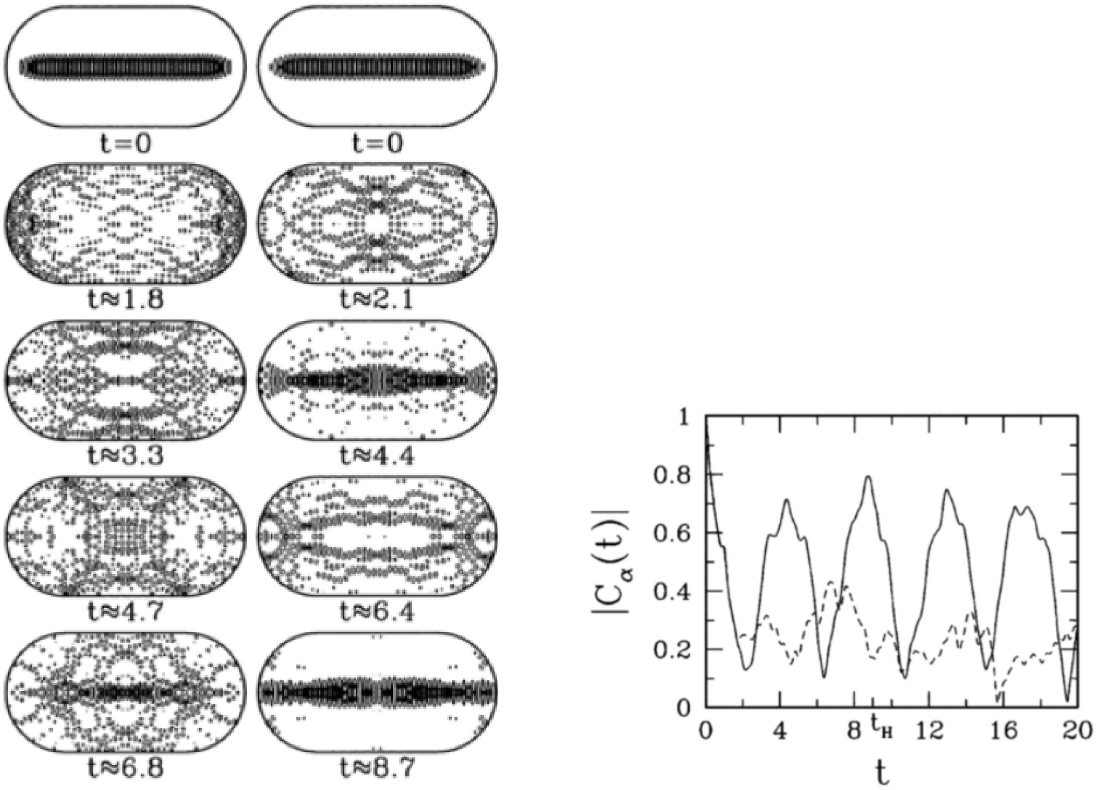


図 2.1.1: スタジアムビリヤード系における波束の再帰の様子．左：配位空間，右：自己相関関数のグラフ．どちらも [6] から転載．t_H は Heisenberg 時間．

Tomsovic-Heller は [17] において，初期に不安定周期点に局在した Gauss 分布型の波動関数に対してホモクリニック軌道を用いて

$$C_{\beta\gamma}(t) \sim \sum_l A_l(t) e^{iS_l(t)/\hbar - i\nu_l \pi/2} \tag{2.1.5}$$

と半古典的に近似できることを示した．ここで j は $|\gamma(0)\rangle$ の中心から始まる全てのホモクリニック軌道をとる．また，A_l は振幅因子，S_l は軌道 l の作用，ν_l は Maslov 指数である．ホモクリニック軌道については付録 B に記載した．

よって，$C_\alpha(t)$ もまた

$$C_\alpha(t) \sim \sum_l A_l(t) e^{iS_l(t)/\hbar - i\nu_l \pi/2} \tag{2.1.6}$$

となる．ここで，l は重ね合わせに用いられた全ての Gauss 分布型波束のホモクリニック軌道とヘテロクリニック軌道をとる．ヘテロクリニック軌道についても付録 B に記載した．そのため，$|C_\alpha(t)|$ は

$$|C_\alpha(t)| \sim \sqrt{\left(\sum_l A_l(t) e^{iS_l(t)/\hbar - i\nu_l \pi/2}\right)^* \left(\sum_l A_l(t) e^{iS_l(t)/\hbar - i\nu_l \pi/2}\right)} \tag{2.1.7}$$

$$= \sqrt{\sum_{l,l'} A_l(t) A^*_{l'}(t) e^{i(S_l(t) - S_{l'}(t))/\hbar}} \tag{2.1.8}$$

となる．もし，$S_l(t) - S_{l'}(t)$ が完全にランダムな場合，自己相関関数はランダムな位相の振動の重ね合わせになるため，$|C_\alpha(t)|$ には振幅因子の対角項だけが残り，図 2.1.1 に現れているようなピーク構造を再現することはできない．$|C_\alpha(t)|$ がピーク構造を持つためには，ホモクリニック軌道間の作用の差 $S_l(t) - S_{l'}(t)$ が完全にランダムではなく相関を持ち，$|C_\alpha(t)|$ が非対角項を持つ必要がある．このことは，再帰現象の原因を波束の干渉性に求めていることに他ならない．

ホモクリニック軌道間の作用の差は MacKay らによって安定多様体・不安定多様体が囲む領域の面積と対応づけられている [18]．Tomsovic らはこの対応に注目した．図 2.1.2 において，C，C' はそれぞれスタ

ジアムビリヤード系における安定多様体，不安定多様体であり，点 1，2 は異なるホモクリニック軌道上の点である．Tomsovic らは点線で表されている領域を primary region と名付け，primary region の面積が Planck 定数の整数倍のときに再帰が起こると予想したが，彼らは primary region の量子化を用いた半古典論により再帰現象を再現するに至っていない．

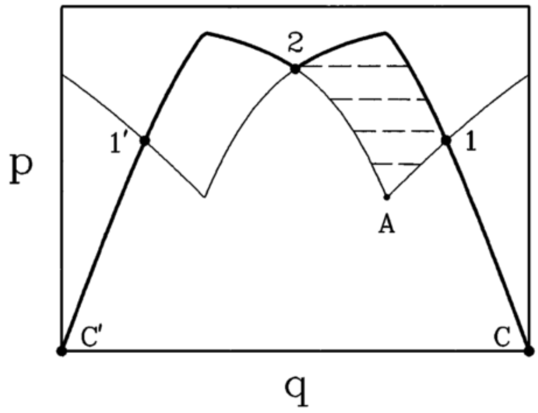


図 2.1.2: スタジアムビリヤード系における primary region（点線領域）．[6] より転載．

2.2 切断のない区分線形写像を用いた解析

本論文では切断のない区分線形写像に primary region の量子化条件を与え，再帰現象の再現を試みた結果を紹介する．ここでは自己相関関数の計算を行う．今，簡単のため切断のない区分線形写像を

$$V(q) = \begin{cases} -\frac{1}{2}q^2 \ (0 \leq q < \frac{1}{4}) \\ \frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{2}q + \frac{1}{16} \ (\frac{1}{4} \leq q \leq \frac{3}{4}) \\ -\frac{1}{2}q^2 + q - \frac{1}{2} \ (\frac{3}{4} < q < 1) \end{cases} \tag{2.2.1}$$

と再定義する．q のスケールを $[0, 2\pi)$ から $[0, 1)$ に変え，p 方向の周期境界条件 mod1 を与える．切断のない区分線形写像における primary region は図 2.2.1 中の黄色の領域とする．

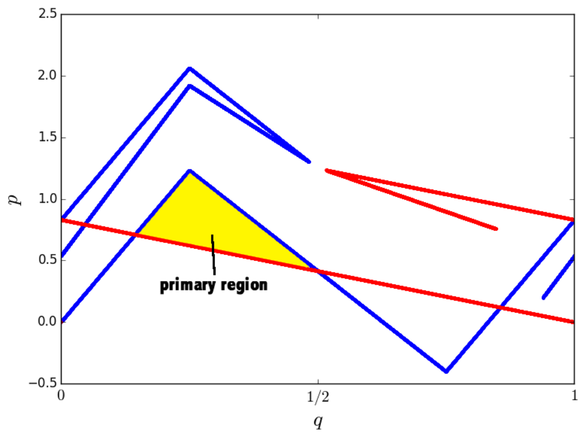


図 2.2.1: 切断のない区分線形写像における primary region．青線は不安定多様体，赤線は安定多様体．

primary region の面積を $S_{\rm pr}$ とする．$S_{\rm pr}$ は厳密に計算でき，$k > \frac{4}{3}$ では

$$S_{\rm pr} = \frac{k}{16}\left(\sqrt{\frac{4k}{4+k}} - 1\right) \tag{2.2.2}$$

である [19]．$k > \frac{4}{3}$ は primary region が面積を持つ条件である．ここでは，primary region の面積に対して

$$S_{\rm pr} = \mathcal{N} h \tag{2.2.3}$$

という量子化条件を与える．ここで $\mathcal{N}$ は整数であり，h は Planck 定数である．また，位相空間の面積を W，Hilbert 空間の次元を $N_{\mathcal{H}}$ としたとき，Planck 定数は，$h = W/N_{\mathcal{H}}$ である．

量子化条件を与えたので，自己相関関数の計算結果を紹介する．初期状態をその中心が不安定不動点 $(0, 0)$ に持つ Gauss 分布型の波束にとった．条件（2.2.3）が成り立つ下で波束を時間発展し，自己相関関数を計算した結果を図 2.2.2 に示した．また条件（2.2.3）が成り立っていない場合の自己相関関数の計算結果を図 2.2.3 に示した．再帰しているかどうかを判断する閾値を 0.3 程度に設けることにすると，図 2.2.2 と図 2.2.3 を比べてもピーク構造に大差はなく，条件（2.2.3）がそれほど効いてきているようには思えず，条件（2.2.3）は再帰に対しての必要条件とも十分条件とも言えない．

この結果からは，再帰現象の作用間の相関と系の不変構造が作る領域の面積との関連が半古典論に影響を及ぼすことは何も言及できない．ここで見られている自己相関関数の振る舞いの中で周期的に再帰しているように見られるものに対しても，重みの大きい固有状態と別の固有状態との間を周期的に振動するという説明がなされている [19]．Tomsovic らの再帰現象を別の系で再現できたのかできていないのかという判断は保留せざるを得ない．

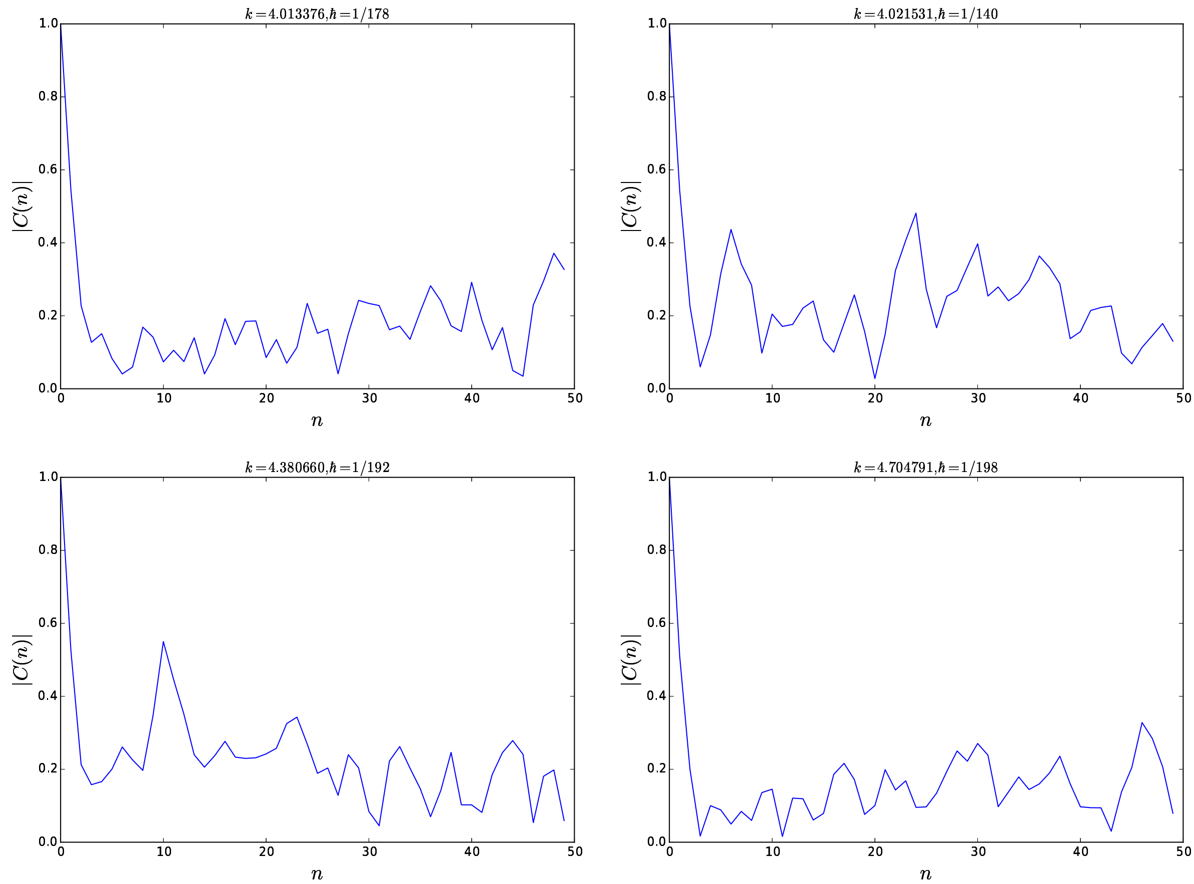


図 2.2.2: 条件（2.2.3）が成り立つ場合の自己相関関数．

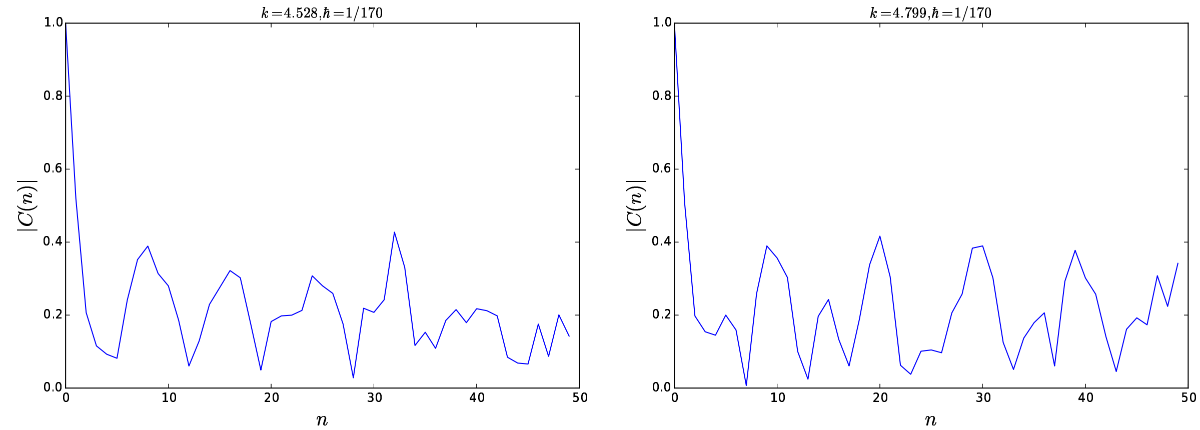


図 2.2.3: 条件（2.2.3）が成り立っていない場合の自己相関関数.

第3章　結論・展望

本研究では，古典系が強いカオスを示す場合に起こる波動関数の干渉現象として，動的局在と再帰現象を取り扱った．どちらの現象も，半古典論に用いる古典軌道間の作用の相関に原因が求められているという意味での共通した背景がある [7, 4, 6]．本研究の主たる目的は，半古典論に用いる軌道間の作用の相関を古典系の不変構造と対応づけることにより，力学系の問題として取り扱う手がかりを探ることにある．力学系の問題として取り扱うことができれば，軌道の性質を調べる上での強力な解析手段を得ることになり，波動関数の動的局在，および，再帰現象の発生機構の理解への道を拓くことが期待される．

第 1 章では，動的局在の古典的起源を求めるため，半古典論を用いて動的局在を再現するための古典軌道に関する議論を行った．まず，半古典論に必要な軌道が作用の相関を持つことについて，切断のある区分線形写像に対して，文献 [7, 4] で得られた計算の追試を行った．次に切断のない区分線形写像についても作用の相関の存在を確認した．どちらのモデルにおいても，半古典論に寄与する軌道間の作用の相関が作用の差の分布 $g(\Delta S)$ のピークとして現れるため，本研究において得られた作用の相関が文献 [7, 4] の作用の相関と同等のものかどうかを追究した．切断のない区分線形写像において，$g(\Delta S)$ のピークを形成する軌道について考えるために，軌道の作用を初期位置 q_0 の関数とした $S(q_0)$ を見ると，ランダムにはなっておらず，特徴的な構造を持っていることがわかった．特に，$S(q_0)$ が軌道の本数に応じて層に分けられることに着目して解析を行った．$g(\Delta S)$ のピークは，最も多く軌道が属している層（図 1.4.11 の層 1）の軌道と他の層の軌道とのペアで見積もることができるため，層 1 の軌道が $g(\Delta S)$ のピークを形成していると考えた．$S(q_0)$ の層 1 は，系が持つ 4 周期軌道の作用の値の定数倍（定数は時間 n が大きければ大きくなる）程度が境界となっているため，層 1 に属する軌道と 4 周期軌道との関係を予想した．実際に層 1 に属する軌道の振る舞いを数値計算によって位相空間上に表示すると，4 周期軌道とよく似た振る舞いをしつつもズレが生じて離れ，離れた先で別の 4 周期軌道と似た振る舞いをする様子が見られた．また，軌道は 4 周期軌道が作るタイル構造にほとんど捕らえられていることが観察された．作用の相関を表現している $g(\Delta S)$ のピーク構造と関係づけられた 4 周期軌道は系の不変構造である．このことよって，少なくとも，切断のない区分線形写像においては，作用の相関を系の不変構造と結び付ける手掛かりがつかめた．本論文で証明した性質 1 により任意の n について系の周期軌道を解析的に求めることができ，性質 2，3 からポテンシャル $V(q)$ が q について周期的であれば位相空間上にタイル構造を作ることが示された．この議論は周期撃力系のより一般的な場合に拡張できることが期待される．これらの結果は文献 [7, 4] で用いられているモデル（切断のある区分線形写像）における，作用の相関の形成を担っている軌道が $\ldots 00110011 \ldots$ の 4 周期軌道由来の記号列を持つ事実と整合しており，4 周期軌道が何らかの役割を果たしていることが強く示唆される．

第 2 章では，Tomsovic らが発見した強いカオス系における波動関数の再帰現象について写像系を用いた立場から考察した．安定多様体と不安定多様体が囲む領域の面積に具体的表式が与えられる切断のない区分線形写像を用いて，写像系の場合の Tomsovic らの量子化条件に対応する条件（2.2.3）を満たす場合と満たさない場合を計算した．結果として，どちらの場合においても，再帰しているか，または再帰していないかを判断出来るだけの決定的証拠を得ることはできず，条件（2.2.3）が必要条件であるとも十分条件であるとも結論づけることはできなかった．

再帰現象に対しては未だに写像系で再現するに至っていないため，議論を保留せざるを得ない状況にあるが，Tomsovic らの，作用の相関を位相空間上のある領域の面積に対する条件として読み替えるアイディアは，動的局在の半古典論に対する議論の中でも使える可能性がある．Tomsovic らのアイディアとの関連を睨みつつ，第 1 章で得られた軌道間の作用の相関と周期軌道との関係を定式化すること，および，その法則の普遍性を議論し，動的局在を古典系の不変構造から考察することが今後の課題である．

謝辞

本論文を制作するにあたり多くの方のご協力をしていただきました．特に首藤啓教授，田中篤司助教，花田康高先輩，原田浩充先輩，研究室の皆様に深い感謝の意を表します．指導教官である首藤啓教授には研究テーマを与えていただき，様々な面でのご指導，議論をしていただきました．厳しくもご辛抱強いご指導に深く感謝致します．田中篤司助教にはセミナー等の際に研究に関する助言をいただきました．また，計算機の取り扱いに関して様々な方法や助言をいただきました．様々な面でのサポートに深く感謝致します．花田康高先輩には本研究について議論，助言をしていただきました．数値計算について知識が乏しい私に計算の基礎から全て教えていただきました．研究生活のことや大学のこと，学会でのことなど何から何までお世話になりました．大変感謝致します．原田浩充先輩には本研究について夜遅くまで，何度も議論していただきました．本論文の構成や発表スライドに助言していただきました．また，研究面だけでなく，人生相談にものっていただきました．私が辛いときには，励ましていただきました．大変感謝致します．また，研究生活において非線形研究室の皆様には大変お世話になりました．深く感謝致します．

最後に，大学に残る選択に対して理解を示して頂いた家族に心より感謝の意を表し，謝辞と致します．

付録A 周期撃力系の写像の導出

(1.1.1) の Hamiltonian

$$H(q,p,t) = T(p) + kV(q) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - m\tau)$$

を考える．このとき，Hamilton 方程式は

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dT}{dp}$$
$$\frac{dp}{dt} = -\frac{dV}{dq} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - m\tau)$$

となる．

周期ポテンシャルの影響を見るために微小時間 ϵ を用いて，区間 $((n-1+\epsilon)\tau, (n+\epsilon)\tau)$ で時間積分を実行すると，

$$\int_{(n-1+\epsilon)\tau}^{(n+\epsilon)\tau} \frac{dq}{dt} dt = q((n+\epsilon)\tau) - q((n-1+\epsilon)\tau)$$
$$\int_{(n-1+\epsilon)\tau}^{(n+\epsilon)\tau} \frac{dT}{dp} dt = \frac{dT}{dp}(p((n-1)\tau))\tau - \epsilon\tau\frac{dT}{dp}(p((n-1)\tau)) + \epsilon\tau\frac{dT}{dp}(p(n\tau))$$
$$\int_{(n-1+\epsilon)\tau}^{(n+\epsilon)\tau} \frac{dp}{dt} dt = p((n+\epsilon)\tau) - p((n-1+\epsilon)\tau)$$
$$\int_{(n-1+\epsilon)\tau}^{(n+\epsilon)\tau} \left(-\frac{dV}{dq}\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t-m\tau) dt = -\frac{dV}{dq}(q(n\tau))$$

となる．$\epsilon \to 0$ とすれば

$$\begin{cases} q_n &= q_{n-1} + \tau \frac{dT}{dp}(p_{n-1}) \\ p_n &= p_{n-1} - k\frac{dV}{dq}(q_n) \end{cases}$$

が求まる．

付録B 写像系の古典論

シンプレクティック写像

2N+1 次元位相空間 $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)$ を考える．Hamiltonian フローは Hamiltonian $H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t)$ と Hamilton 方程式により作られる位相空間上の流れである．位相空間上の点を z で書き，Hamiltonian フローから作られる微分同相写像 $T : z \mapsto T(z)$ を考える．写像 T は位相空間上の点の時間発展を与える．ここでは写像 T がシンプレクティック写像であることを見る．

時間 t 一定の平面上に任意の閉曲線 $\mathcal{L}$ を選ぶ．この $\mathcal{L}$ は連続的に一点に縮められるとする．今，時間 t も変数とみなしているので，パラメータ λ を導入し，$\mathcal{L}$ をパラメータ $0 \leq \lambda \leq 1$ ごとに定める．すなわち，

$$\mathcal{L} = \{\boldsymbol{q}(\lambda), \boldsymbol{p}(\lambda), t(\lambda); 0 \leq \lambda \leq 1\} \tag{B.1}$$

であるとする．$\mathcal{L}$ 上の各点は Hamilton 方程式の初期条件に対応する．ここで $\mathcal{L}$ の作用は

$$\begin{aligned} S[\mathcal{L}] &= \int_0^1 \left(\boldsymbol{p} \cdot \frac{d\boldsymbol{q}}{d\lambda} - H\frac{dt}{d\lambda}\right) d\lambda \\ &= \oint_{\mathcal{L}} \boldsymbol{p} \cdot d\boldsymbol{q} - H dt \\ &= \oint_{\mathcal{L}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l} \end{aligned} \tag{B.2}$$

で定義される．最後は $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{0}, -H)$，$d\boldsymbol{l} = (d\boldsymbol{q}, d\boldsymbol{p}, dt)$ とおいた．$\mathcal{L}$ の各点を Hamiltonian フローに沿って時間発展したものは位相空間上にチューブ $\mathcal{T}$ を形作る（図 B.1）．

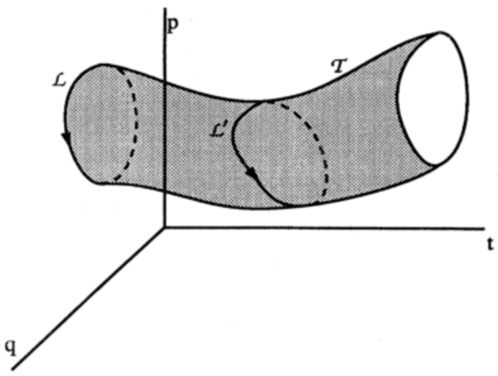


図 B.1: Hamiltonian フローに沿って形成されるチューブ $\mathcal{T}$．[20] より転載．

チューブ $\mathcal{T}$ 上の任意の閉曲線 $\mathcal{L}'$ は $\mathcal{L}$ とホモトープ（連続変形可能）とする．閉曲線 $\mathcal{L}'$ は閉曲線 $\mathcal{L}$ を有限時間の時間発展して得られるものに限らず，任意の方法で得られたものでよい．閉曲線 $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ のそれぞれの作用 $S[\mathcal{L}]$ と $S[\mathcal{L}']$ の差は 2 つの閉曲線 $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ における $\boldsymbol{A}$ の積分の差である．すなわち，

$$\begin{aligned} S[\mathcal{L}] - S[\mathcal{L}'] &= \oint_{\mathcal{L}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l} - \oint_{\mathcal{L}'} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l} \\ &= \int_{\mathcal{T}} \nabla \times \boldsymbol{A} \cdot d^2 s \end{aligned} \tag{B.3}$$

である．最後の等式では三次元の Stokes の定理を用いた．$\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ はそれぞれチューブ $\mathcal{T}$ の端とみなしたが，一般性は失わない．ここで

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = (-\partial H/\partial \boldsymbol{p}, \partial H/\partial \boldsymbol{q}, -1) = -(\dot{\boldsymbol{q}}, \dot{\boldsymbol{p}}, 1)$$

である．$\nabla \times \boldsymbol{A}$ が T に沿っている，つまり $d^2 s$ に垂直になっていれば $S[\mathcal{L}] = S[\mathcal{L}']$ となる．この条件を満たすような写像 T をシンプレクティック写像という．

まず，Hamiltonian が時間に依存しない場合を考える．この場合，任意のループ $\mathcal{L}$ はエネルギー一定の平面 $H = E$ の上に乗る．このとき，作用 $S[\mathcal{L}]$ はエネルギー一定の平面上で

$$S[\mathcal{L}] = \oint_{\mathcal{L}} \boldsymbol{p} \cdot d\boldsymbol{q} \ (\text{エネルギー一定の平面上}) \tag{B.4}$$

となる．(B.4) をシンプレクティック・エリアという．$S[\mathcal{L}]$ の値は，$\mathcal{L}$ を平面 (q^i, p^i) に射影してできる N 個の面積の総和で与えられる．図 B.2 の $\mathcal{A}$ がシンプレクティック・エリアであり，$\mathcal{A}^1, \mathcal{A}^2$ はそれぞれ $\mathcal{A}$ を平面 $(q^1, p^1), (q^2, p^2)$ に射影したものである．作用 $S[\mathcal{L}]$ が不変であるということはシンプレクティック・エリアが Hamiltonian フローに沿って不変であるということに言い換えられる．

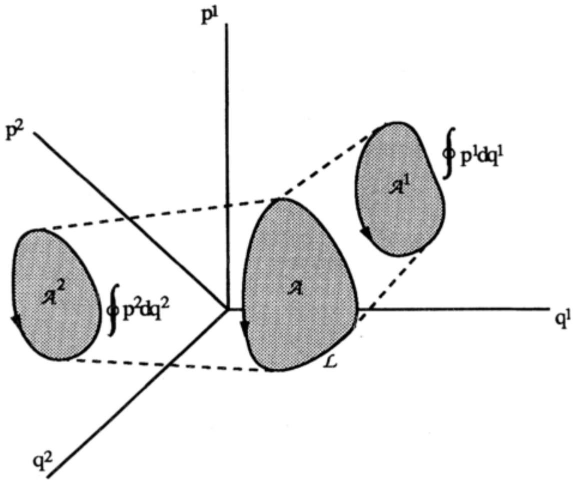


図 B.2: $N = 2$ の場合のシンプレクティック・エリアのイメージ．[20] より転載．

次に，時刻 $t(\lambda)$ が一定の平面上でのループを考える．この場合，Hamiltonian は時間に依存するが $\oint_{\mathcal{L}} H dt = 0$ であることに注意して，作用は

$$S[\mathcal{L}] = \oint_{\mathcal{L}} \boldsymbol{p} \cdot d\boldsymbol{q} \ (t(\lambda) = \text{const}) \tag{B.5}$$

となる．シンプレクティック写像であれば $S[\mathcal{L}] = S[\mathcal{L}']$ であり，このことは時間一定の平面上で (B.5) が保存されていることを表す．

シンプレクティック形式

便利のため，$(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ で書かれた位相空間を $(z, \bar{z})$ で書かれた斜交空間で書き直す．二つの微小ベクトル δz と $\delta \bar{z}$ により作られる向きづけられた平行四辺形の形をしたループ $\omega(\delta z, \delta \bar{z})$ を考える（図 B.3）．

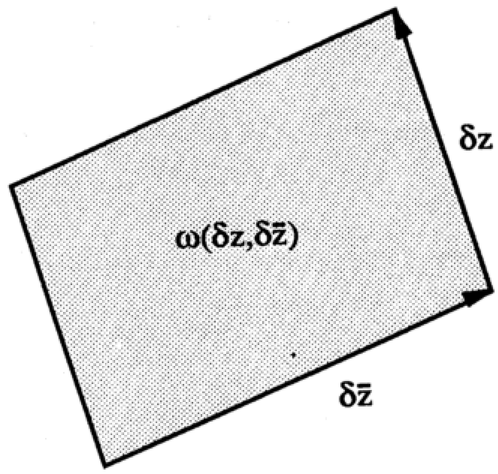


図 B.3: $\omega(\delta z, \delta\bar{z})$ のイメージ．[20] より転載．

そのシンプレクティック・エリアはそれぞれの平行四辺形の面積を射影したものの和で与えられる．平行四辺形の面積 $\omega(\delta z, \delta\bar{z})$ は

$$\begin{aligned}\omega(\delta z, \delta\bar{z}) &= \delta\boldsymbol{p}\cdot\delta\bar{\boldsymbol{q}} - \delta\boldsymbol{q}\cdot\delta\bar{\boldsymbol{p}} \\ &= \delta z^i \omega_{ij} \delta z^j \end{aligned} \tag{B.6}$$

と書くことができ，このような反対称な形式の ω のことをシンプレクティック形式という．シンプレクティック形式は (q,p) の座標で書いたとき反対称行列

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \tag{B.7}$$

で書くことができる．ここで I は N 次元単位行列である．

局所シンプレクティック写像

シンプレクティック形式を用いて，シンプレクティック・エリアが保存するという条件の微分形を得ることができる．$z' = T(z)$ の微分は

$$\begin{aligned}\delta z' &= \delta(T(z)) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial z}T(z)\right)\delta z \\ &\equiv DT(z)\delta z \end{aligned} \tag{B.8}$$

である．

シンプレクティック・エリアが写像 T による変換に対しても保存するならば，

$$\omega(\delta z', \delta\bar{z}') = \omega(\delta z, \delta\bar{z}) \tag{B.9}$$

なので．(B.9) と ω の定義より

$$\begin{aligned}\delta z^i \omega_{ij} \delta\bar{z}^j = \omega(\delta z, \delta\bar{z}) = \omega(\delta z', \delta\bar{z}') &= \delta z'^i \omega_{ij} \delta\bar{z}'^j \\ &= \delta z^k (DT)_k{}^i \omega_{ij} (DT)^j{}_l \delta z^l \end{aligned} \tag{B.10}$$

の関係を得る．$M^i_j \equiv (DT)^i_j = \partial z'^i / \partial z^j$（ヤコビ行列）とすれば

$$M^t \omega M = \omega \tag{B.11}$$

という関係を得る．ここで上付きの t は転置行列の意味で用いた．このような性質を持つ行列 M をシンプレクティック行列という．その微分がいたるところで (B.11) を満たすような写像を局所シンプレクティック写像という．

シンプレクティック行列 M の固有値，行列式

(B.11) より，$\det\omega \neq 0$ のとき

$$\det M^t \omega M = \det\omega \Rightarrow (\det M)^2 = 1 \tag{B.12}$$

となる．よって，$\det M = \pm 1$ となるが，実際には $\det M = 1$ となっていることを確認する．行列式の値が 1 となるということは，シンプレクティック写像は面積とその向きを保存するということである．

M の固有値方程式は 2N 次多項式になっており，

$$\det(M - \lambda I) = 0 \tag{B.13}$$

である．写像が実であるため，固有値方程式も実数の方程式になっている．そのため，λ を M の固有値としたとき，λ^* もまた M の固有値である．また

$$\begin{aligned}\det\omega \det(M - \lambda I) &= \det(\omega M - \lambda\omega)\\ &= \det((M^t)^{-1}\omega - \lambda\omega)\\ &= \det((M^t)^{-1} - \lambda I)\det\omega\\ &= \det(M^{-1} - \lambda I)\end{aligned}$$

なので，λ^{-1} も M の固有値である．

λ と λ^{-1} を同時に固有値として持つことから行列 M の固有値方程式は

$$\lambda^N + A\lambda^{N-1} + B\lambda^{N-2} + \ldots B\lambda^{2-N} + A\lambda^{1-N} + \lambda^{-N} = 0 \tag{B.14}$$

という方程式になる．また，行列式は全固有値の積と同じ値になるため，固有値方程式から

$$\det M = 1 \tag{B.15}$$

とわかる．

再帰写像

$H = E$ となるような 2N-1 次元等エネルギー曲面 $\mathcal{E}$ と，$\mathcal{E}$ とは別の 2N-1 次元曲面 $\mathcal{Q}$ を考える．$\mathcal{Q}$ は等エネルギー曲面ではなく，Hamiltonian フローに対して，どの局所領域をとっても平行になっていないような面とする．$\mathcal{E}$ と $\mathcal{Q}$ が交差して作る 2N-2 次元曲面を $\mathcal{S} = \mathcal{E} \cap \mathcal{Q}$ とする．この $\mathcal{S}$ を Poincaré 断面という．

定義 1 (再帰写像)**.** 再帰写像 $T(z) = z'$ は初期点 z が $\mathcal{S}$ 上にあり，終点 z' も $\mathcal{S}$ 上にくるような写像である．

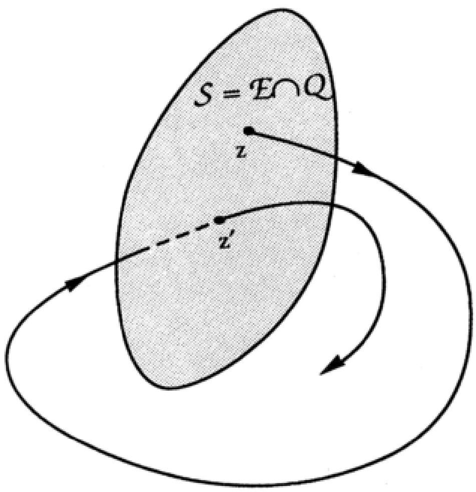


図 B.4: 再帰写像．[20] より転載．

再帰写像は，その作用が（??）となるようなシンプレクティック写像になっている [引用 or 証明].

ツイスト写像

以後，特に自由度 $N = 2$ の場合を考える．2 次元の位相空間 (x, y) を円柱型の位相空間とする．すなわち，x を角度変数とし，周期境界条件 $x = x + 2m\pi (m \in \mathbb{Z})$ を与える．

定義 2 (ツイスト写像)**.** 円柱型の 2 次元位相空間からそれ自身への微分可能なシンプレクティック写像 $T : (x, y) \mapsto (x', y')$ を考える．T が（右回りの）ツイスト写像であるとは，ある K が存在して

$$\frac{dx'}{dy}|_x \geq K > 0 \ (\text{ツイスト条件}) \tag{B.16}$$

であることをいう．

ツイスト条件が意味するところは x' が y について一様増加関数であるということである．また，その物理的意味は，y を運動量としたとき，x の単位時間あたりの移動量（速度）は y が大きくなるほど大きくなるということである．すなわち運動量が大きいことは常に速度が大きいことを表しているに過ぎない．

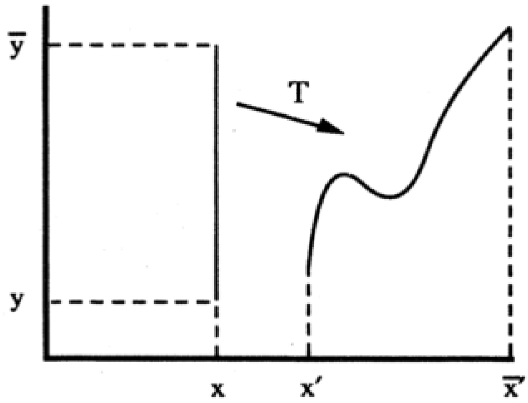


図 B.5: ツイスト写像の幾何的表現．[20] より転載．

微分可能な写像なので接ベクトル $(\delta x, \delta y)$ の時間発展は

$$\begin{pmatrix} \delta x' \\ \delta y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} \tag{B.17}$$

で書ける．T はシンプレクティック写像であるため，M の行列式は 1 である．この線形写像の逆写像は T^{-1} の微分から作れる．そしてそれは M^{-1} と同じになる．すなわち

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial x}{\partial y'} \\ \frac{\partial y}{\partial x'} & \frac{\partial y}{\partial y'} \end{pmatrix} = M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y'}{\partial y} & -\frac{\partial x'}{\partial y} \\ -\frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial x} \end{pmatrix} \tag{B.18}$$

よってこの場合のツイスト条件は

$$\frac{\partial x}{\partial y'}|_{x'} = -\frac{\partial x'}{\partial y}|_x \leq -K \tag{B.19}$$

となる．すなわち，T が右回りのツイスト写像なら T^{-1} は左回りのツイスト写像である．

T^2 はツイスト写像である必要はなく，典型的にはツイスト写像になっていない．なぜなら，二回写像してできた曲線がツイスト条件を破るようにできるからである．

シンプレクティックなツイスト写像の母関数

円柱型の位相空間 (x, y) を懸垂した空間を考える．シンプレクティックなツイスト写像 $T : (x, y) \mapsto (x', y')$ は xy 平面全体に懸垂されたものとする．

$$y = -G_1(x, x') \tag{B.20}$$

$$y' = G_2(x, x') \tag{B.21}$$

または１形式

$$dG(x, x') = y'dx' - ydx \tag{B.22}$$

と書けるような正準変換の母関数 $G(x, x')$ が存在することを示す．G_1, G_2 はそれぞれ G を一番目の引数で微分したもの，二番目の引数で微分したものの意味を表している．

G の存在性を示すため，$q'(q, p)$ という関係から $p(q, q')$ という関係を得る必要がある．まず，p, p' を定める．平面内で $q = \xi$，$x = \xi'$ の直線を考える．曲線 $T(x = \xi)$ は $x = \xi'$ を横切る．ツイスト条件によって横切るのは一回だけである．この交点の y 座標の値を $y'(\xi, \xi')$ とする (図 B.6)．T^{-1} もツイスト写像であるため，同様にして $T^{-1}(x = \xi')$ と $x = \xi$ の交点の y 座標の値を $y(\xi, \xi')$ とする．

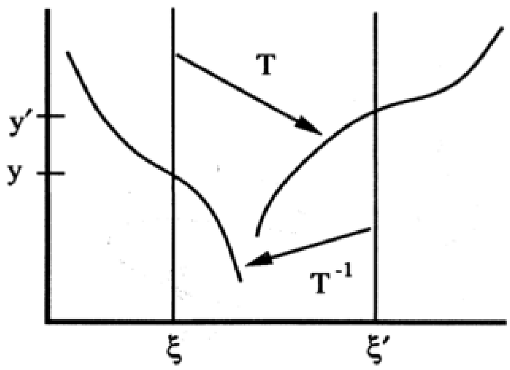


図 B.6: $y(x, x'), y'(x, x')$ の定義．[20] より転載．

次に，このようにして得られた関数 y, y' を用いて関数 G を以下の積分で定義する．

$$G(x, x') = \int_{\gamma}^{(x,x')} y'(\xi, \xi')d\xi' - y(\xi, \xi')d\xi \tag{B.23}$$

積分は xx' 平面における任意の一点から (x, x') への経路 γ に沿って行われ，終点を明示するために積分記号の上に終点を書いた．

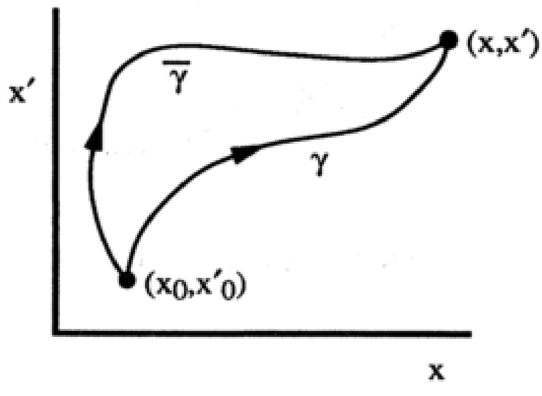


図 B.7: (B.23) の積分経路．[20] より転載．

(B.23) の積分は経路の選び方によらないことを示す．まず，γ と同じ端点を持つ他の経路 $\bar{\gamma}$ を考える．周回経路 $\gamma - \bar{\gamma}$ の積分は Stokes の定理により，その経路により囲まれる領域での面積分にできる．すなわち，

$$\oint y(x, x')dx = \int dy \wedge dx \tag{B.24}$$

$$\oint y'(x, x')dx' = \int dy' \wedge dx' \tag{B.25}$$

が得られる．x', y' は x, y を一回写像したものであるため，dx', dy' が作る閉領域の面積は T がシンプレクティック写像であることから dx, dy が作る面積と向きまで含めて等しいので，上の二式の右辺は等しい．

よって

$$\oint y'(x,x')dx' - y(x,x')dx = 0 \tag{B.26}$$

すなわち

$$\int_{\gamma}^{(x,x')} y'(\xi,\xi')d\xi' - y(\xi,\xi')d\xi = \int_{\bar{\gamma}}^{(x,x')} y'(\xi,\xi')d\xi' - y(\xi,\xi')d\xi \tag{B.27}$$

となり，(B.23) の積分が経路によらないことが示された．

(B.20)，(B.21)，(B.22) を要求すればツイスト条件を満たし，シンプレクティック性を持つ写像 T の母関数 G が得られることを見る．まず，ツイスト条件から以下が得られる．

$$G_{12}(x,x') = -\frac{\partial y}{\partial x'} = -\left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right)^{-1} \leq -\frac{1}{K} < 0 \tag{B.28}$$

すなわち，G を x で微分した後に x' で微分したものは負になる．これを用いれば G により生成される写像がシンプレクティック写像になっていることが示せる．なぜなら写像する前の (x,y) が作る領域と (x',y') が作る領域は

$$dy \wedge dx = -G_{12}dx' \wedge dx \tag{B.29}$$

$$dy' \wedge dx' = -G_{12}dx' \wedge dx \tag{B.30}$$

となり等しいからである．ここで $dy = -G_{11}dx - G_{12}dx'$，$dy' = G_{12}dx + G_{22}dx'$，$\omega \wedge \omega = 0$ となることを用いた．上の式はシンプレクティックなツイスト写像を生成する母関数の条件となっている．

シンプレクティックなツイスト写像の母関数と位相空間の面積の関係

位相空間上のある適当な曲線 $\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}$ を写像した $\mathcal{C}'$ のそれぞれの曲線と x 軸の間の領域の面積をそれぞれ $A = \int ydx$，$A' = \int y'dx'$ とする．ここで，A, A' は実際の面積ではなく，負値もとれるものとし，以後，代数的な面積と呼ぶことにする．

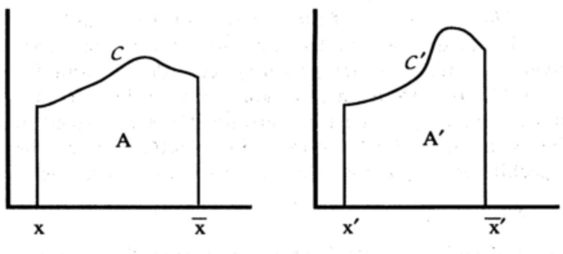


図 B.8: A, A' の定義．[20] より転載．

この面積の差を計算すると

$$\begin{aligned} A' - A &= \int_{\mathcal{C}'} y'dx' - \int_{\mathcal{C}} ydx \\ &= \int_{x'}^{\bar{x}'} \frac{\partial G}{\partial \xi'}d\xi' + \int_{x}^{\bar{x}} \frac{\partial G}{\partial \xi}d\xi \\ &= \int_{(x,x')}^{(\bar{x},\bar{x}')} dG(\xi,\xi') \\ &= \left(\int^{(\bar{x},\bar{x}')} - \int^{(x,x')}\right) dG \\ &= G(\bar{x},\bar{x}') - G(x,x') \end{aligned} \tag{B.31}$$

二行目から三行目への移行は，ベクトルの成分で考えたとき，接線方向のベクトルを ξ', ξ の成分に分割して，それぞれを足し上げたものの和と，接線方向のベクトルをそのまま足し上げたのでは結果が同じということを使っている．

シンプレクティックなツイスト写像の母関数と軌道の作用の関係

連続時間の系では作用は

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}; t) dt \tag{B.32}$$

であった．軌道の線分 $q(t)$ は端点 $q(t_0) = x, q(t_1) = x'$ 間における作用の微分が 0 になる点（stationary points）である．ここではある軌道上の作用の値がそのフローを作る写像の母関数になっていることを見る．

ラグランジアンは時間に対して周期 1 の関数だとする．$q(t)$ はこの周期の中のある軌道の線分だとして，G を以下で定義する．

$$G(x, x') = \int_{0, q(t) stationary}^{1} L(q, \dot{q}, t) dt \tag{B.33}$$

(B.33) はある $q(0) = x, q(1) = x'$ 間のある軌道上の作用で，G はそのフローを作る，時間を 1 だけ進める時間発展写像の母関数になっている．軌道の作用を得るにはこれを足し上げればよく，適当な軌道の部分 $\{x_m, x_{m+1}, \dots, x_n\}$ の作用は

$$S\{x_m, x_{m+1}, \dots, x_n\} = \sum_{t=m}^{n-1} G(x_t, x_{t+1}) \tag{B.34}$$

となる．これは離散時間のそれぞれの位置 x_i にしか依存しない．

安定多様体・不安定多様体

周期軌道近傍の点は写像 T の接写像で時間発展する．n 回写像を繰り返した後，線形近似をすると

$$\begin{aligned}
\delta z_n &= \left(\frac{d}{dz_0} T(T(\dots T(z_0))) \right) \delta z_0 \\
&= M(z_{n-1}) M(z_{n-2}) \dots M(z_0) \delta z_0 \\
&\equiv M^n \delta z_0
\end{aligned}$$

と書ける．M がシンプレクティックであることから M^n はシンプレクティック行列である．M または M^n の固有値を λ とする．シンプレクティック写像の性質より，$1/\lambda$ も固有値である．固有値方程式は

$$\lambda^2 - \mathrm{Tr}(M^n)\lambda + 1 = 0 \tag{B.35}$$

となる．ここで $\det M = 1$ であることを用いた．この方程式を解くと

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}(M^n) \pm \sqrt{(\mathrm{Tr}(M^n))^2 - 4}) \tag{B.36}$$

となる．また，可能な固有値によって以下のように周期点近傍での構造を分類している[1]．

(a) (regular) hyperbolic: $\mathrm{Tr}(M^n) > 2$

(b) elliptic: $-2 < \mathrm{Tr}(M^n) < 2$

(c) inversion(reflection) hyperbolic: $\mathrm{Tr}(M^n) < -2$

[1] 微分方程式と異なり，写像の場合には上でした分類の中に渦状沈点や渦状源点は存在しない．これは解の係数の問題である．2 階微分方程式の解を明示的に書くと例えば

$$y(t) = \alpha e^{\lambda t} y(0) \ (\alpha\text{:const})$$

となるが，写像の場合は λ そのものがかかる．例えば

$$y_{n+1} = \lambda y_n = \lambda^n y_0$$

のようになる．シンプレクティック写像の性質として，$\lambda \times \lambda^* = 1$ であるため，λ を極座標表示すれば

$$\lambda = e^{i\phi t}$$

となるため，固有値が複素数の場合は必ず elliptic になる．

(d) parabolic: $\mathrm{Tr}(M^n) = \pm 2$

Hyperbolic な周期 n の周期軌道近傍で線形化を行い，得られた安定性行列 M^n の固有値をそれぞれ $\lambda_+ > 1, \lambda_- < 1$ とする．安定多様体定理により，λ_+, λ_- に属する固有ベクトルは，それぞれ以下で定義される不安定多様体と安定多様体に拡張される．

定義 3 (安定多様体・不安定多様体).
ある写像 F において周期 n の不安定周期点 P が存在するとき，

$$W^s(P) = \{z| \lim_{m\to\infty} T^{mn}(z) = P\} \tag{B.37}$$

を安定多様体といい，

$$W^u(P) = \{z| \lim_{m\to-\infty} T^{mn}(z) = P\} \tag{B.38}$$

を不安定多様体という．

ホモクリニック軌道

安定多様体も不安定多様体も自分自身とは交わらないが，安定多様体と不安定多様体は交わることがある．安定多様体と不安定多様体が交差する点をホモクリニック点という．ホモクリニック点は安定多様体と不安定多様体の両方の上に乗っている．安定多様体・不安定多様体の定義から，安定多様体・不安定多様体上の点に写像 T を作用させた点もまた，それぞれの多様体上に乗っている．そのため，ホモクリニック点に写像 T を作用させた点もまた，ホモクリニック点になる．このようにして作られたホモクリニック点の軌道

$$\{T^n(z)|z：ホモクリニック点, n \to \pm\infty\} \tag{B.39}$$

をホモクリニック軌道という．また，ヘテロクリニック点も存在し，ヘテロクリニック点はそれぞれ異なる不安定周期点から延長される安定多様体と不安定多様体が交差する場合にできる点のことをいう．

ホモクリニック軌道が位相空間上にどのように現れるかを見る．z_0 を不安定周期点とし，z_0 から伸びる安定多様体 W^s と不安定多様体 W^u との交点 z をホモクリニック点とする．領域 $\mathcal{A}$ を W^s の z_0 から z までの曲線と W^u の z_0 から z までの曲線が囲む面積とする．

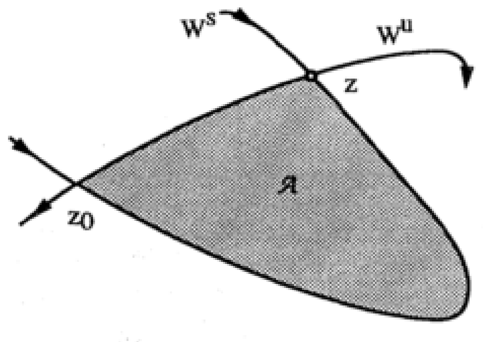


図 B.9: z_0 の安定多様体と不安定多様体が交差し，ホモクリニック点 z を作る様子．[20] より転載．

z は安定多様体上の点であるから，時間発展極限で z_0 に漸近しなければならない．そのため，必ず $T(z)$ が存在し，z_0 から z の間の部分多様体の上に乗っている．また，$T(z)$ は存在すればホモクリニック点になっているため，安定多様体と不安定多様体の交点でなければならない．よって，W_u はどこかで折れ曲がり，領域 $\mathcal{A}$ に侵入するようにして伸びていき，再び W_s と交わる（図 B.10）．ただし，W_u が領域 $\mathcal{A}$ に侵入する向きで延長されたときに W_s と作る交点は $T(z)$ ではない．なぜなら，今，写像はシンプレクティック性を持ち，ホモクリニック点近傍の微小ベクトルの貼る向き付きの微小面積は向きも含めて保存するからである．よって，$T(z)$ は $\mathcal{A}$ から出て行く向きの W_u と W_s が作る交点である．W_u が領域 $\mathcal{A}$ に侵入するとき

に W_s と作る交点 ζ はホモクリニック点ではあるが，z と同じホモクリニック軌道には属さない．そのため，ζ は新しいホモクリニック軌道 $\{F^n(\zeta)|n \to \pm\infty\}$ の点である．

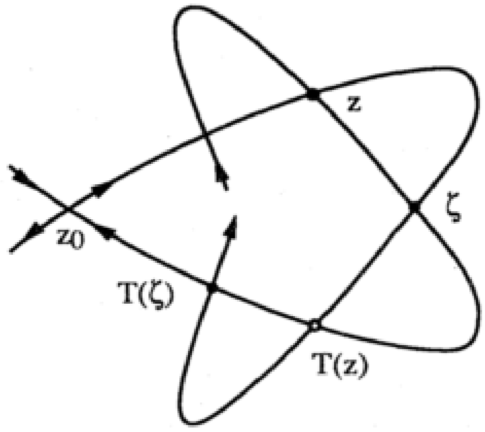


図 B.10: 不安定多様体が折れ曲がり，新たなホモクリニック点 ζ を作る様子．[20] より転載．

次に，ζ から $T(z)$ までの部分安定多様体と部分不安定多様体が作る領域 $\mathcal{L}$ について考える（図 B.11）．$\mathcal{L}$ は $\mathcal{A}$ に含まれる．もし，W_u が W_s と新たなホモクリニック軌道を作らなければ，$\mathcal{L}$ を写像した領域 $T(\mathcal{L})$ もまた $\mathcal{A}$ に含まれる．しかし，$\mathcal{A}$ は有限の領域であるから，$T^j(\mathcal{L})$ は $\mathcal{A}$ の中に残り続けることはできない．そのため，$T(\mathcal{L})$ は $\mathcal{A}$ の外へ出て行く必要がある．$T^j(\mathcal{L})$ が適当な j で $\mathcal{A}$ の外へ出て行ったとき，新しいホモクリニック点を少なくとも二つ作る必要がある．このようにして新しいホモクリニック軌道が作られることが繰り返され，無限のホモクリニック軌道が生成されていく．

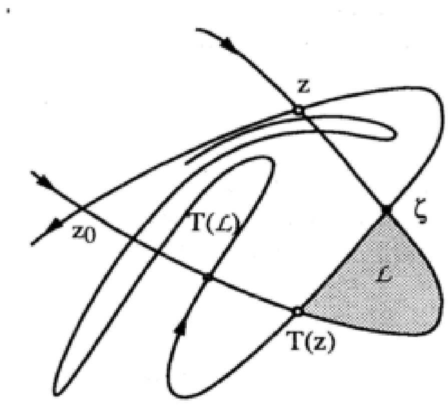


図 B.11: z, ζ 以外のホモクリニック点を作る様子．[20] より転載．

ホモクリニック軌道の作用の差と安定多様体・不安定多様体が囲む領域の面積の関係

その端点（ホモクリニック点）を共有する部分安定多様体と部分不安定多様体が囲む領域の面積が，その端点の属するホモクリニック軌道間の作用の差になっていることを示す．図 B.11 で言えば，$\mathcal{L}$ の面積が z, ζ が属するホモクリニック軌道間の作用の差になっている．

定義 4 (future(past) asymptotic)．二つの異なる位相空間上の点 z_0, w_0 が future asymptotic であるとは，それらの点列 $\{z_t\}, \{w_t\}$ が同じ点に漸近し

$$\lim_{t\to\infty} |z_t - w_t| = 0 \tag{B.40}$$

を満たすときのことを言う．同様に

$$\lim_{t\to-\infty} |z_t - w_t| = 0 \tag{B.41}$$

を past asymptotic という．

同じ安定多様体に乗っている全ての点は future asymptotic であり，同じ不安定多様体に乗っている全ての点は past asymptotic である．任意にとった二つの future(past) asymptotic な点の間の部分多様体を安定（不安定）部分と言う．

安定部分，不安定部分を構成するには以下の方法を用いる．z_0, w_0 を future asymptotic な二点とする．これらを j 回時間発展させた z_j, w_j の間に存在する安定部分は j が十分大きければ直線とみなせるため，L_j を z_j, w_j の二点を結ぶ直線とする．L_j を j 回だけ逆向きに時間発展すれば，z_0, w_0 を結ぶ安定部分に近い形の曲線が得られ，$j \to \infty$ の極限で一致する．よって，今，安定部分は

$$\mathcal{S}_0 = \lim_{j\to\infty} T^{-j}(L_j) \tag{B.42}$$

で与えられ，不安定部分は

$$\mathcal{U}_0 = \lim_{j\to\infty} T^{j}(L_j) \tag{B.43}$$

で与えられるとする．安定部分，不安定部分を写像したものは $\mathcal{S}_t, \mathcal{U}_t$ と書く．

軌道 $\{w_t\}, \{z_t\}$ は future asymptotic であるとする．このとき二つの軌道間の母関数の差を

$$\Delta G_t = G(w_t, w_{t+1}) - G(z_t, z_{t+1}) \tag{B.44}$$

とする．$\mathcal{S}_t$ を t 番目の二つの点 w_t, z_t を結んだ安定部分とする．

位相空間に適当な軸 x を選ぶ．w_t, z_t の x 成分を $x(w_t), x(z_t)$ とし，$\mathcal{S}_t$ を区間 $(x(w_t), x(z_t))$ で x 積分する．得られた値を A_t^s とする．A_t^s は負値もとれるものとする．すなわち，代数的な面積である．$A' - A = \Delta G$ なので

$$\begin{aligned} A_t^s &= A_{t+1}^s - \Delta G_t && \text{(B.45)} \\ &= A_{t+k}^s - \sum_{j=0}^{k-1} \Delta G_{t+j} && \text{(B.46)} \end{aligned}$$

となる．二つの future asymptotic な点 w_t, z_t は時間発展極限で同じ点に収束していくため $A_{t+k}^s \to 0$ $(k \to \infty)$[2]である．よって，

$$A_t^s = -\sum_{j=0}^{\infty} \Delta G_{t+j} \tag{B.47}$$

となる．和が収束することは，軌道が一様なため，円柱上の位相平面で考えたときに軌道間の gap が常に 1 以下であることから保証されている．

同様にして past asymptotic なときは

$$A_t^u = \sum_{j=-\infty}^{-1} \Delta G_{t+j} \tag{B.48}$$

となる．よって，

$$\begin{aligned} A_t^u - A_t^s &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Delta G_j && \text{(B.49)} \\ &= S\{w_t\} - S\{z_t\} && \text{(B.50)} \end{aligned}$$

を得る．この式は任意の安定部分と不安定部分が囲む領域が二つの軌道 $\{z_t\}, \{w_t\}$ の作用の差に等しいことを表している．また，写像 T が面積保存写像であることから，安定部分と不安定部分が囲む領域は時間発展に対して不変である．そのため，$\{z_t\}, \{w_t\}$ の作用の差は時間によらず一定であることも表している．

[2] ここで，正方向に時間発展させているのは安定部分であることに注意する．不安定部分を正方向に時間発展した場合はシンプレクティック性により面積が保存され，$k \to \infty$ でも面積は変わらないが，安定部分の場合は最初のホモクリニック点を作った時刻のときに作られる領域を越えて大きくなることはなく，時間発展極限で 0 になる．

付録C 本研究で得られた諸性質の導出

位相空間上の 1 点 (q_0, p_0) の時間発展について考える．(q_0, p_0) を（1.1.2）を用いて写像すると，

$$
\begin{cases}
q_1 &= q_0 + p_0 \\
p_1 &= p_0 - k\frac{dV}{dq}(q_1)
\end{cases}
$$
$$
\begin{cases}
q_2 &= q_1 + p_1 = q_1 + p_0 - k\frac{dV}{dq}(q_1) \\
p_2 &= p_1 - k\frac{dV}{dq}(q_2) = p_0 - k\frac{dV}{dq}(q_1) - k\frac{dV}{dq}(q_2)
\end{cases}
$$
$$
\begin{cases}
q_3 &= q_2 + p_2 = q_2 + p_0 - k\frac{dV}{dq}(q_1) - k\frac{dV}{dq}(q_2) \\
p_3 &= p_2 - k\frac{dV}{dq}(q_3) = p_0 - k\frac{dV}{dq}(q_1) - k\frac{dV}{dq}(q_2) - k\frac{dV}{dq}(q_3)
\end{cases}
$$

となるため，以後繰り返していけば

$$
\begin{cases}
q_m &= q_{m-1} + p_0 - k\sum_{i=1}^{m-1}\frac{dV}{dq}(q_i) \\
p_m &= p_0 - k\sum_{i=1}^{m}\frac{dV}{dq}(q_i)
\end{cases}
\tag{C.1}
$$

となる．（C.4）より，$p_n = p_0$ という条件は $\sum_{i=1}^{m}\frac{dV}{dq}(q_i) = 0$ という条件に換えられる．

ここで，$p_n = p_0 = 0$ の場合を考えると，次の補題が成り立つ．

補題 1. （C.4）の写像を用いて $(q_0, 0)$ を写像し，$(q_n, 0)$ に辿り着いたとする．すなわち，$p_0 = 0$ かつ $p_n = 0$ となる場合を考えると，任意の $n \geq l > 0$ なる整数 l に対して，

$$q_{n+l} = q_{n-l+1} \tag{C.2}$$

が成り立つ．

補題の証明の前に，$\sum_{i=1}^{n}\frac{dV}{dq}(q_i) = 0$ を書き換えると，$\sum_{i=1}^{l-1}\frac{dV}{dq}(q_i) = -\sum_{i=l}^{n}\frac{dV}{dq}(q_i)$ となることを注意しておく．

導出. $l = 1$ の場合，$p_n = 0$ より，

$$q_{n+1} = q_n + p_n = q_n$$

なので成り立つ．

$l = 2$ の場合，

$$
\begin{aligned}
q_{n+2} &= q_{n+1} + p_{n+1} \\
&= q_n - k\sum_{i=1}^{n+1}\frac{dV}{dq}(q_i) \\
&= q_n - k\frac{dV}{dq}(q_{n+1}) \\
&= q_{n-1} + p_{n-1} - k\frac{dV}{dq}(q_n) \\
&= q_{n-1} - k\sum_{i=1}^{n-1}\frac{dV}{dq}(q_i) - \frac{dV}{dq}(q_n) \\
&= q_{n-1} - k\sum_{i=1}^{n}\frac{dV}{dq}(q_i) \\
&= q_{n-1}
\end{aligned}
$$

より成り立つ．

$l=m-1$ まで成り立つとすると，$l=m$ の場合，

$$
\begin{aligned}
q_{n+m} &= q_{n+m-1} + p_{n+m-1} \\
&= q_{n-(m-1)+1} - k \sum_{i=1}^{n+m-1} \frac{dV}{dq}(q_i) \\
&= q_{n-m+2} - k \sum_{i=n+1}^{n+m-1} \frac{dV}{dq}(q_i) \\
&= q_{n-m+1} + p_{n-m+1} - k \sum_{i=n+1}^{n+m-1} \frac{dV}{dq}(q_i) \\
&= q_{n-m+1} - k \sum_{i=1}^{n-m+1} \frac{dV}{dq}(q_i) - k \sum_{i=n+1}^{n+m-1} \frac{dV}{dq}(q_i) \\
&= q_{n-m+1} + k\frac{dV}{dq}(q_n) + k\frac{dV}{dq}(q_{n-1}) + \cdots + k\frac{dV}{dq}(q_{n-m+2}) \\
&\qquad - k\frac{dV}{dq}(q_{n+1}) - k\frac{dV}{dq}(q_{n+2}) - \cdots - k\frac{dV}{dq}(q_{n+m-1}) \\
&= q_{n-m+1}
\end{aligned}
$$

となり，成り立つ．よって示された． □

補題 1 より，次の二つの補題が成り立つ．

補題 2. 系の時間発展が写像（C.4）で与えられているとき，$p_n = p_0 = 0$ ならば，

$$q_{2n} = q_1 = q_0$$

となる．

導出. 補題 1 より，$l=n$ とすれば，

$$q_{2n} = q_{n-n+1} = q_1 = q_0 \tag{C.3}$$

□

補題 3. 系の時間発展が写像（C.4）で与えられているとき，$p_n = p_0 = 0$ ならば，

$$p_{2n} = p_n = 0$$

となる．

導出.

$$
\begin{aligned}
p_{2n} &= -k \sum_{i=1}^{2n} \frac{dV}{dq}(q_i) \\
&= -k \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{dV}{dq}(q_i) \\
&= -k\frac{dV}{dq}(q_{n+1}) - k\frac{dV}{dq}(q_{n+2}) - k\frac{dV}{dq}(q_{n+3}) - \cdots - k\frac{dV}{dq}(q_{2n-1}) - k\frac{dV}{dq}(q_{2n}) \\
&= -k\frac{dV}{dq}(q_n) - k\frac{dV}{dq}(q_{n-1}) - k\frac{dV}{dq}(q_{n-2}) - \cdots - k\frac{dV}{dq}(q_2) - k\frac{dV}{dq}(q_1) \\
&= -k \sum_{i=1}^{n} \frac{dV}{dq}(q_i) \\
&= p_n \\
&= 0
\end{aligned}
$$

□

定理 2，定理 3 より，$(q_0, 0) = (q_{2n}, 0)$ であることがわかる．よって，次の定理が示されたことになる．

性質 1. 写像（C.4）において，$p_n = p_0 = 0$ を満たすような全ての軌道は $2n$ 周期軌道である．

性質 2. ポテンシャルの微分 $\frac{dV}{dq}(q)$ が q について 2π 周期的であるとき，$p = 0$ 上の $2n$ 周期軌道 $(q_0, 0)$ が存在するならば，$(q_0 + 2N\pi, 0)$（N は整数）も $2n$ 周期軌道である．

導出. $2n$ 周期軌道 $(q_0, 0)$ を（1.1.2）を用いて写像していけば，

$$\begin{cases} q_m &= q_{m-1} - k\sum_{i=1}^{m-1} \frac{dV}{dq}(q_i) \\ p_m &= -k\sum_{i=1}^{m} \frac{dV}{dq}(q_i) \end{cases} \tag{C.4}$$

をとなる．次に $q'_0 = q_0 + 2N\pi$ とし，（1.1.2）を用いて $(q'_0, 0)$ を写像すると

$$\begin{cases} q'_1 &= q'_0 = q_0 + 2N\pi = q_1 + 2N\pi \\ p'_1 &= -k\frac{dV}{dq}(q'_1) = -k\frac{dV}{dq}(q_1) \end{cases}$$

となる．ここで $q_1 = q_0$ であることと，ポテンシャルの微分の 2π 周期性 $\frac{dV}{dq}(q + 2N\pi) = \frac{dV}{dq}(q)$ を用いた．もう一度写像すると

$$\begin{cases} q'_2 &= q'_1 + p'_1 = q_1 + 2N\pi - k\frac{dV}{dq}(q_1) = q_2 + 2N\pi \\ p'_2 &= p'_1 - k\frac{dV}{dq}(q'_2) = -k\frac{dV}{dq}(q_1) - k\frac{dV}{dq}(q_2) \end{cases}$$

となる．以後繰り返していけば

$$\begin{cases} q_m &= q_{m-1} + 2N\pi - k\sum_{i=1}^{m-1} \frac{dV}{dq}(q_i) \\ p_m &= -k\sum_{i=1}^{m} \frac{dV}{dq}(q_i) \end{cases} \tag{C.5}$$

を得る．よって，（C.4）と（C.5）を比較すると，軌道 $(q'_0, 0)$ と周期軌道 $(q_0, 0)$ は常に q 方向に $2N\pi$ だけずれていることを表していることがわかる．そのため，$(q_0, 0)$ が $2n$ 周期軌道であるならば $(q'_0, 0)$ も $2n$ 周期軌道である． □

性質 3. ポテンシャルの微分 $\frac{dV}{dq}(q)$ が 2π 周期的であるとき，$(q_0^{(n)}, 2M\pi)$（M は 0 でない整数）なる点は，n 回写像後，$(q_0^{(n)} + 2nM\pi, 2M\pi)$ という点に写像される．ここで，$p = 0$ 上の $2n$ 周期軌道の座標を $(q_0^{(n)}, 0)$ とする．

導出. $p = 0$ 上の $2n$ 周期軌道の座標を $(q_0^{(n)}, 0)$ とする．$(\bar{q}_0, \bar{p}_0) = (q_0^{(n)}, 2M\pi)$（$M$ は 0 でない整数）を写像すると $q_1^{(n)} = q_0^{(n)}$，$p_1^{(n)} = -k\frac{dV}{dq}(q_1^{(n)})$ とポテンシャルの微分 $\frac{dV}{dq}(q + 2\pi) = \frac{dV}{dq}(q)$ より

$$\bar{q}_1 = \bar{q}_0 + \bar{p}_0 = q_0^{(n)} + 2M\pi = q_1^{(n)} + 2M\pi \tag{C.6}$$

$$\bar{p}_1 = \bar{p}_0 - k\frac{dV}{dq}(\bar{q}_1) = 2M\pi - k\frac{dV}{dq}(q_1^{(n)}) = p_1^{(n)} + 2M\pi \tag{C.7}$$

となる．同様にして $q_2^{(n)} = q_1^{(n)} + p_1^{(n)}$，$p_2^{(n)} = p_1^{(n)} - k\frac{dV}{dq}(q_2^{(n)})$ より

$$\bar{q}_2 = \bar{q}_1 + \bar{p}_1 = q_1^{(n)} + 2M\pi + p_1^{(n)} + 2M\pi = q_2^{(n)} + 2 \times 2M\pi \tag{C.8}$$

$$\bar{p}_2 = \bar{p}_1 - k\frac{dV}{dq}(\bar{q}_2) = p_1^{(n)} + 2M\pi - k\frac{dV}{dq}(q_2^{(n)}) = p_2^{(n)} + 2M\pi \tag{C.9}$$

となる．n 回写像を繰り返せば $q_n^{(n)} = q_0^{(n)}$，$p_n^{(n)} = 0$ より

$$\bar{q}_n = \bar{q}_{n-1} + \bar{p}_{n-1} = q_{n-1}^{(n)} + 2(n-1)M\pi + p_{n-1}^{(n)} + 2M\pi = q_n^{(n)} + 2nM\pi = q_0^{(n)} + 2nM\pi \tag{C.10}$$

$$\bar{p}_n = \bar{p}_{n-1} - k\frac{dV}{dq}(\bar{q}_n) = p_{n-1}^{(n)} + 2M\pi - k\frac{dV}{dq}(q_n^{(n)}) = p_n^{(n)} + 2M\pi = 2M\pi \tag{C.11}$$

を得る． □

参考文献

[1] A. B. Rechester and R. B. White. *Phys. Rev. Lett.*, **44**, 1586, (1980).

[2] G. Casati, B.V. Chirikov, J. Ford, and F.M. Izrailev. *Stochastic Behavior in Classical and Quantum Hamiltonian Systems*. Springer, Berlin, (1979).

[3] S. Fishman D. R. Grempel and R. E. Prange. *Phys. Rev. Lett.*, **49**, 509, (1982).

[4] 首藤 啓 and 池田 研介. **物性研究**, **59**, 757, (1993).

[5] A. Ishikawa. *Dynamical Localization and Chaotic Tunneling in Mixed Phase Space*. PhD thesis, Tokyo Metropolitan University, Japan, (2010).

[6] S. Tomsovic and H. Lefebvre. *Phys. Rev. Lett.*, **79**, 3629, (1997).

[7] A. Shudo and K. Ikeda. *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, **116**, 283, (1994).

[8] L. E. Reichl. *The Transition to Chaos - In Conservative Classical Systems: Quantum Manifestations*. Springer-Verlag, (1992).

[9] H-J Stöckmann. *QUANTUM CHAOS An Introduction*. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1999.

[10] A. Rechester and R. White. *Phys. Rev. Lett.*, **44**, 1586–1589, (1980).

[11] G. Casati and L. Molinari. *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, **98**, 287, (1989).

[12] D. R. Grempel, R. E. Prange, and Shmuel Fishman. *Phys. Rev. A*, **29**, 1639–1647, (Apr 1984).

[13] B. V. Chirikov, F. M. Izrailev, and D. L. Shepelyansky. *Physica D*, **33**, 77, (1988).

[14] A. Shudo and K. S. Ikeda. *Physica D*, **115**, 234, (1998).

[15] 田中 岐王寛. 区分線形写像における作用間の相関. 修士論文, 首都大学東京, (2009).

[16] M. Wojtkowski. *Commun. Math. Phys.*, **80**, 453, (1981).

[17] S. Tomsovic and E. J. Heller. *Phys. Rev. E.*, **47**, 282, (1993).

[18] R. S. MacKay, J. D. Meiss, and I. C. Percival. *Physica D*, **13**, 55, (1984).

[19] 杉山 友梨霞. 強いカオス系における波束の再帰現象について. 修士論文, 首都大学東京, (2012).

[20] J. D. Meiss. *Rev. Mod. Phys*, **64**, 795, (1992).