

# 修士学位論文

題名 区分線型写像の階層構造

指導教授 首藤 啓 教授

平成 27 年 2 月 18 日提出

首都大学東京大学院

理工学研究科 物理学専攻

学修番号 12879301

氏名 青木 和輝

## 目次

概要	iii
1 問題の起源	1
2 階層構造を議論するための準備	2
2.1 標準写像の相空間	2
2.2 一般の力学系における周期点の安定性	2
2.3 標準写像における chaos と階層構造	4
2.4 一般の混合系における再帰時間分布	5
3 区分線型化	6
3.1 標準写像に対する区分線型化 $F_A$ の定義	6
3.2 parameter $A$ の変化に対する写像 $F_A$ の応答	6
3.3 $A = 1$ のときの相空間の様子	7
4 記号力学系と島	11
4.1 一般の力学系に対する記号力学系	11
4.2 $F_1$ に対する記号力学系の定義	11
4.3 $F_1$ における島の定義	12
4.4 $F_1$ における島の性質	15
4.5 相空間上での島の探索	16
4.6 島を表す記号列	18
4.7 相空間上での階層性	20
5 島が無限に存在することの証明	22
5.1 証明の概略	22
5.2 同次座標系を用いた, 写像の恒等性の証明	22
5.3 線型不等式を用いた, 写像の定義域が正の測度を持つことの証明	25
5.4 拡大した命題の否定による, 証明の正当性についての考察	43
6 再帰時間分布	45
6.1 一般の混合系における再帰時間分布の定義	45
6.2 島が 1 つしかない区分線型写像の再帰時間分布	46
6.3 島が無限に存在する区分線型写像の再帰時間分布	46
6.4 再帰軌道と無限に存在する島の関係	47
7 結論	53
謝辞	54
付録 A 区分線型写像の変数変換	55

付録 B 区分線型写像の対称性	56
付録 C 凸多角形領域を定義する全ての不等式の中から, 辺をなす式を見つける方法	57
参考文献	58

# 区分線型写像の階層構造

青木 和輝

## 概要

一様双曲的でない **Hamilton** 力学系において、相空間上には、あたかも海の中に島が点在するがごとく、安定軌道が **chaos** 軌道の中に混在する。島の存在は **chaos** 軌道の振る舞いに対して大きく影響を与え、特に島の近傍ではそれが顕著である。一般に、力学系における **chaos** を考える際、周期軌道や島などの、写像に対して不変な構造を調べることは、**chaos** 的な振る舞いを理解する大きな助けとなる。特に、**chaos** 軌道の周辺で起きる“遅い運動”は動力学の長時間の性質を左右することから、相空間上の島構造の研究は、**chaos** の研究においてきわめて大きな意味をもつことになる。特に、しばしば島構造は **chaos** の海の中に階層構造をもって現れるが、階層をつくる規則や詳しい機構はよくわかっておらず、また、一様双曲的でない **Hamilton** 力学系の相空間には、島が無数個存在することが強く信じられているが、その事実が厳密に確かめられた例は未だ存在しない。例えば、以下で与えられる、“標準写像”と呼ばれる、2 次元 **torus** 面上の保測自己同型写像：

$$(1) \quad S_K : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - K \sin 2\pi x + y \mod 1 \\ -K \sin 2\pi x + y \end{pmatrix}$$

は、安定軌道と **chaos** 軌道とが混在する、最も単純な一般の **Hamilton** 系として、長年、多くの研究者によって詳細に調べられてきたが、無限個の島の存在についての厳密な議論はない。

本研究においては、標準写像へ区分線型化を施して得られる、さらに簡単な形の

$$(2) \quad T_K : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + Kf(x) + y \\ Kf(x) + y \end{pmatrix} \mod 1 \quad \text{ただし} \quad (3) \quad f(x) = \begin{cases} -x & \text{where } x \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ -\frac{1}{2} + x & \text{where } x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] \\ 1 - x & \text{where } x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases}$$

という文献 [4] において与えられた写像系がもたらす、相空間上の階層性に注目した。この写像系もまた、parameter  $K$  の大きさによって島が階層構造を作り [5]、階層構造が存在する写像系の中では、最も分析を行いやすい系の 1 つと考えられる。本研究では、この単純化のおかげで、相空間をいくつかの領域に分割し、それぞれに **labeling** を行うことによって、軌道が通過した場所を記号列で記録する事ができることを見出し、相空間の構造、特に、階層構造を作る島同士の結びつきをきわめて詳細に考察ができることを示した。このことにより、最終的に島が無数個存在することを数学的に証明することに成功した。

さらに、この階層性が、**chaos** 軌道の“遅い運動”へ及ぼす影響についても、再帰時間分布を用いて調べた。**chaos** 軌道は、島のような安定な構造物に近づくと、しばらくその構造物の近傍を取り囲むように留まり続ける。この挙動を定量的に議論するために導入される代表的な統計量のひとつが、再帰時間分布である。標準写像 (1) においても、再帰時間分布は数値的によく調べられており、長時間領域に“冪的減衰”を観測できる事が知られているが、解析的な調査例は乏しく、冪則に従う機構は未だわかっていない。一方で、階層構造の存在が、長時間領域における冪則を律速している可能性があることを指摘されている [7]。

一般に、島が相空間上に階層構造をなして複雑に分布している場合において、再帰時間分布の解析的な研究を難しくしている原因は、再帰時間分布を調べるために必要となる再帰領域の定義の困難さにある。再帰領域が島を内包すると、再帰時間分布の振る舞いを大きく変化させることがその主たる理由である。それに対して、本研究で調べる写像 (2) においては、島の場所を特定することができるため、再帰領域を比較的容易に定義することができる。そのことを利用して、特に島の階層構造が存在しない場合については、再帰時間分布の冪則



が残り, その原因が安定集合の周りに **chaos** 軌道が巻き付く現象であることが確かめられている [4]. そこで本研究では, 区分線型化を施したときに存在する階層構造が, 再帰時間分布に対してどのように関係しているかを調べた. その結果, 島が階層構造を持つときであっても, 再帰時間分布の冪則に違いは見られず, 安定集合の周りに軌道が巻き付く様子が観察できた. そして, 写像系 (2) は, 島の階層性が再帰時間に対して影響をもたらさない例であることが確認できた.

第 1 章において, 写像 (1) を導出する. 第 2 章においてその相空間と, 一般の **Hamilton** 系に関する基礎理論を紹介する. 第 3 章で, 写像 (1) を区分線型化を施した時の振舞いについて述べる. 第 4 章において, **parameter** を 1 つの値に固定し, 区分線型化した写像における島の階層構造を, 記号列を用いて解析する. 第 5 章では, 島の階層構造と記号列の性質を用いて, 相空間上で島が無限に存在することを証明する. 第 6 章では, 島の階層構造が再帰時間分布に与える影響を考察する.

## 1 問題の起源

周期  $T$  で撃力が加わるような回転子の運動を考える. **Hamiltonian** は次のように与えられる.

$$(1.1) \quad H(\theta, p, t) = \frac{p^2}{2} - \frac{K}{2\pi} \cos(2\pi\theta) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(nT - t)$$

$K$  は **parameter** であり, 正値をとると仮定して一般性を失わない. 正準方程式に代入して

$$(1.2) \quad \frac{d}{dt}\theta = \frac{\partial}{\partial p}H = p, \quad \frac{d}{dt}p = -\frac{\partial}{\partial\theta}H = -K \sin(2\pi\theta) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(nT - t)$$

を得る. これを, 撃力 1 回ごとに離散化する. いま時刻  $\tau$  ( $t < \tau < t + T$ ) に撃力が加わるものと考え, 時刻  $t$  から  $(t + T)$  まで積分する. 後者は

$$(1.3) \quad p_{t+T} - p_t = -K \sin(2\pi\theta_\tau)$$

となる. 前者は  $\tau$  の前後で分けて考える.  $p$  は撃力の前後以外では不変なので,

$$(1.4) \quad \theta_{t+T} - \theta_t = \int_t^{t+T} p \, dt = p_{t+T}(t + T - \tau) + p_t(\tau - t)$$

となる. ここで,  $\tau \rightarrow t$  の極限をとると,

$$(1.5) \quad \theta_{t+T} - \theta_t = p_{t+T}T, \quad p_{t+T} - p_t = -K \sin(2\pi\theta_t)$$

となる.  $x_n = \theta_t$ ,  $x_{n+1} = \theta_{t+T}$ ,  $y_n = p_t$ ,  $y_{n+1} = p_{t+T}$  とし,  $T = 1$  とすれば, 離散化した写像:

$$(1.6) \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_{n+1} = x_n - K \sin(2\pi x_n) + y_n \\ y_{n+1} = -K \sin(2\pi x_n) + y_n \end{cases}$$

を得る. さらに  $x$  方向に  $\text{mod} 1$  による周期境界条件を課すことで, 式 (1) で表される写像を得る. 本研究ではさらに式 (1) について  $y$  方向にも  $\text{mod} 1$  による周期境界条件を課した

$$(1.7) \quad S_K : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - K \sin 2\pi x + y \pmod{1} \\ -K \sin 2\pi x + y \end{pmatrix}$$

を考える. これらの写像は, **Hamilton** 系の **chaos** の典型的な例として, 大変よく調べられている. **Hamilton** 系における **energy** 保存則は, 写像 (1.6) において, 相空間上の領域を, 同じ測度を持った領域へとうつすという性質として反映されている.

## 2 階層構造を議論するための準備

### 2.1 標準写像の相空間

得られた標準写像 (1.7) は,  $\mathbb{R}^2$  における辺の長さが 1 の正方形の, 上下左右をつなげた **torus** 面 の上で定義される. 以後これを  $\mathbb{T}^2$  と表す. 相空間の様子は Fig.1 のようになる. 点に写像を繰返し作用したときの軌跡を軌道と呼び, Fig.1 ではいくつもの軌道を描いている.

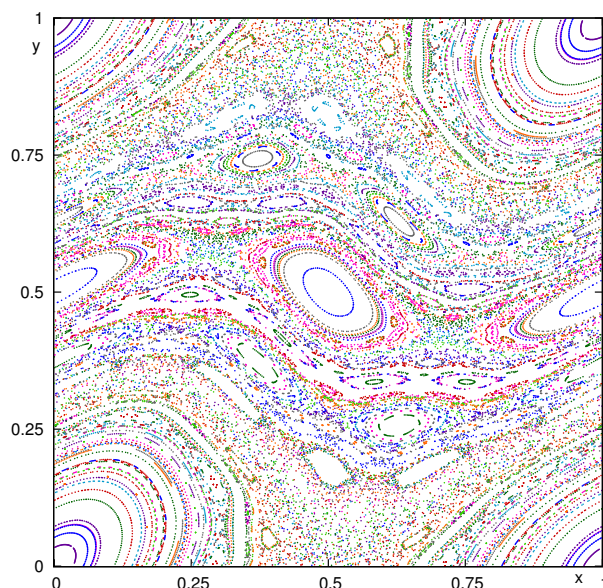


Fig.1  $K = 1$  としたときの標準写像 (1.7) の相空間 ( $y$  方向にも  $\text{mod } 1$  をとった). **random** に初期点をいくつか撒き, 各点に対して写像を繰返し作用させ, 通過した点をすべて **plot** している. 色の違いは初期点の違いであり, 同じ軌道には同じ色をつけている.

この位相空間には, 大きく分けて 2 つの **type** の軌道が存在している. ある初期点から始まる軌道は, その点を通るような楕円の上を, 一定の回転角で移動する. このような軌道は, 初期点を定めたとき, 任意時間後に相空間のどこを通過するかを, 軌道の座標を **1step** ずつ追わなくとも, 回転角を計算することで知ることができる. さらに, 初期点からわずかに離れた楕円上の点から始まる軌道は, 任意時間後も元の軌道から一定の距離以上は離れることはないことから, 安定軌道と呼ばれる. 特に回転角が  $\pi$  の有理数倍であれば, 写像を一定の回数繰返すことで初期点に戻るため, 安定周期軌道と呼ばれる. 後により詳しい定義を述べるが, この安定周期軌道だけで埋め尽くされた領域のことを安定領域と呼び, 同時に本研究で島と呼んでいるものである.

一方, 別のある初期点から始まる軌道は, 軌道は不規則的となり, 相空間上のある領域を埋め尽くしてしまう. この軌道を **chaos** 軌道と呼び, **chaos** 軌道が埋め尽くす領域を **chaos** 領域と呼ぶ.

**chaos** 軌道の任意の近傍には, 必ず不安定周期点が存在する. 不安定周期点もまた, 写像を一定回数繰返すと自分自身に戻ってくるが, 安定周期軌道と違い, そのどんな近くにある別の点から始まる軌道は, 時間が経過するほどに元の軌道から離れていく.

### 2.2 一般の力学系における周期点の安定性

周期点から写像を繰返し, 初めて自分自身に戻ってくるまでの写像回数を素周期と呼ぶ. 周期点は任意回数写像させても, 必ず素周期の個数だけの点しか通らない. 一方, **chaos** 軌道は, 写像させるごとに, どの周期点にもぶつかることなく, 必ず別の点へとうつされる. そのため, 無限の時間をかけて, 双曲的な領域を次第に

埋め尽くしていく．したがって，周期軌道がどこにあるかを調べることは，同時に **chaos** 軌道の通る場所も調べていることになる．

**chaos** 領域は，写像の双曲性に関係が深い．標準写像 (1.7) を含め，一般の **Hamilton** 系

$$(2.1) \quad \Phi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_1(x, y) \\ \varphi_2(x, y) \end{pmatrix}$$

において，周期  $m$  を持つ周期点  $p$  における **Jacobi** 行列

$$(2.2) \quad (D\Phi)_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \varphi_1 \Big|_p & \frac{\partial}{\partial y} \varphi_1 \Big|_p \\ \frac{\partial}{\partial x} \varphi_2 \Big|_p & \frac{\partial}{\partial y} \varphi_2 \Big|_p \end{bmatrix}$$

の 2 つの固有値の絶対値によって，周期点  $p$  と，その近傍での写像の性質を分類できる．固有値の絶対値が 1 でないとき， $p$  を双曲的であるという．そして，固有値が絶対値が 1 の複素数となるときは楕円のであるという．固有値が  $\pm 1$  どちらかとなれば，それは放物的と呼ぶ．

また，**Hamilton** 系においては，**torus** 上全ての点において，**Jacobi** 行列 (2.2) の行列式は 1 となる．これは，写像の保測性を示している．そして，**Jacobi** 行列がある固有値を 1 つ持つとき，その逆数と複素共役もまた，同じ **Jacobi** 行列の固有値となる．

これらを踏まえると， $\Phi^m$  は  $p$  の近傍で局所的に，前述の周期点の種類によって，次の  $\mathbb{R}^2$  上で定義される典型的な写像に位相共役的となる [1]．ここで， $\Phi^m$  が写像  $\Psi$  に位相共役的であるとは，ある同相写像  $h$  が存在して，

$$(2.3) \quad h \circ \Phi^m \equiv \Psi \circ h$$

となる．これは， $\Phi^m$  と  $\Psi$  が力学系として同一であることを意味する．例えば， $h(p)$  は  $\Psi$  における不動点となる．

### 1. 双曲型周期点

**Jacobi** 行列の固有値が  $\lambda_1 < 1$ ,  $\lambda_2 > 1$  であるとき， $\Phi^m$  は  $p$  の近傍で局所的に

$$(2.4) \quad H : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 x \\ \lambda_2 y \end{pmatrix}$$

に位相共役的となる (Fig.2).

### 2. 楕円型周期点

**Jacobi** 行列の固有値が  $\lambda, \bar{\lambda} \in \{e^{i\theta} \mid \theta \in (0, 2\pi)\}$  であるとき， $\Phi^m$  は  $p$  の近傍で局所的に

$$(2.5) \quad E : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (\alpha = \Re(\lambda), \beta = \Im(\lambda))$$

に位相共役的となる (Fig.3).

### 3. 放物型周期点

**Jacobi** 行列の固有値が 1 だけ 1 つだけであるとき， $\Phi^m$  は  $p$  の近傍で局所的に

$$(2.6) \quad P : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (a \in \mathbb{R})$$

に位相共役的となる (Fig.4).

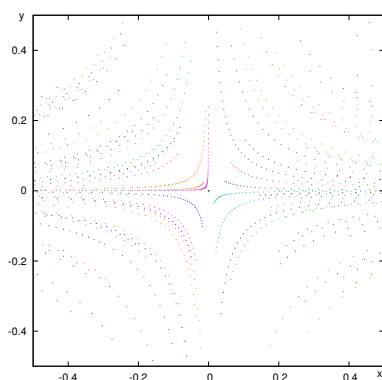


Fig.2  $[-0.5, 0.5]^2 \subset \mathbb{R}^2$  平面上に random に初期点を 100 個配置し,  $\lambda_2 = 1.1$  とした  $H$  によってそれぞれ 100 回ずつ写像させたときの軌跡を描いた. 原点が双曲型周期点である.

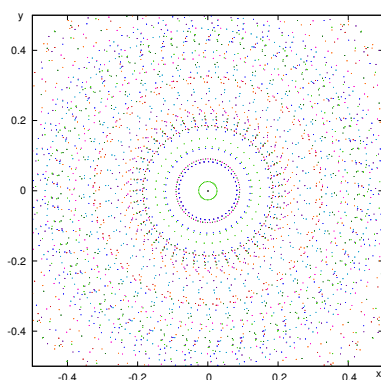


Fig.3  $[-0.5, 0.5]^2 \subset \mathbb{R}^2$  平面上に random に初期点を 100 個配置し,  $\alpha = 8.2\pi$  とした  $E$  によって, それぞれ 100 回ずつ写像させたときの軌跡を描いた. 原点が楕円型周期点である.

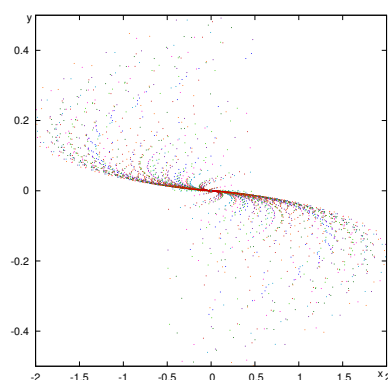


Fig.4  $[-0.5, 0.5]^2 \subset \mathbb{R}^2$  上に random に初期点を 100 個配置し,  $a = -10/9$  とした  $P$  によって, それぞれ 100 回ずつ写像させたときの軌跡を描いた. 原点が放物型周期点である.

(2.4), (2.5), (2.6) の写像は, いずれも原点が唯一の周期点である. ここで, 安定性の議論を領域へと拡張する. 写像が定義域上すべての点について, 周期点と同様に **Jacobi** 行列の固有値の絶対値を調べ, その全てが 1 でないとき, その写像を, 双曲的と呼ぶ. 同様に, 絶対値が 1 の複素数となるときは楕円的,  $\pm 1$  どちらかのときは放物的と呼ぶ.

双曲型周期点は, 不安定周期点とも呼ばれる. これは, 双曲型周期点の近くにある点は, 写像を繰返すごとに, はじめは安定多様体に沿うように双曲型周期点へと近づいていく. その後, 不安定多様体に沿うように双曲型周期点から離れていく. つまり, 双曲型周期点の周りの軌道は, 必ず双曲型周期点を離れるように動くことが, “不安定” の由来である. ここで安定多様体とは, 固有値  $\lambda_1 < 1$  に付随する固有 **vector** の張る直線のことであり, 不安定多様体とは 固有値  $\lambda_2 > 1$  に付随する固有 **vector** の張る直線のことである.

一方で, 楕円型周期点は, そのある近傍において, 写像は周期点の周りを回る回転写像となる. そのため, 軌道はいつまでも周期点の近くに留まり続け, 安定周期点とも呼ばれる.

放物型周期点は, 固有値が重複したときに発生する. 周期点以外の全ての軌道は, 固有値が正のときは周期点から遠ざかっていき, 負のときは近づいていく. また, 周期点の近傍では, ただ 1 つの固有 **vector** に接するように動く.

## 2.3 標準写像における chaos と階層構造

標準写像は, **parameter** によっては一様に双曲的な写像ではない. つまり, 安定な構造を生み出す要因と, 不安定な構造を生み出す要因を併せ持っている. これが, 相空間上で **chaos** 領域と安定領域とが共存することの直感的な説明である.

ここで, **parameter**  $K$  の変化に対する, 標準写像の性質について述べる [2].  $K = 0$  のときは, 全ての軌道は  $x$  軸に並行であり, 複雑なことは起こらない.  $K$  を徐々に大きくしていったとき, ある程度の値 ( $0.9716 \dots$ ) までは, **KAM torus** と呼ばれる曲線が存在する. **KAM torus** は写像に対して不変である. つまり, **KAM torus** の像となる集合は, **KAM torus** に一致する.

**KAM torus** は, 相空間を 2 つの領域に分断しており, 一方の点を通る軌道は絶対に他方を通ることはない. また, 一方の領域は 1 つの安定領域と, それを取り囲む 1 本の **chaos** 軌道で埋め尽くされている. 他方の領域

にも 1 本の **chaos** 軌道は存在するが、それは無数の安定領域を取り囲んでいる。特に、この無数の安定領域は、大きな安定領域の周りを小さな安定領域が取り囲む、という“親子関係”が存在している。さらに相空間を拡大すると、その親子関係が何世代も続く、という階層的な構造を観察できる。さらに、 $K$  がより大きな値となると、**KAM torus** が崩壊し、**chaos** 軌道は相空間を広範囲に渡って駆け巡るようになる。

いずれの場合でも、**chaos** 軌道は無限に長い周期を持つ。相空間のうち安定領域を除いた領域には、双曲型周期点も稠密に分布しているものの、**chaos** 軌道はその周りを縫うようにして走る。特に、どんなに近い異なる 2 点をとっても、それらから始まる軌道は全く異なる場所を通る。

## 2.4 一般の混合系における再帰時間分布

標準写像においても、滞在時間や拡散速度などの統計量  $P(t)$  に対して、時間に依存する冪的な振る舞い  $P(t) \sim t^{-\gamma}$  が見られる。本研究で問題とする再帰時間分布も例外ではない。指数  $\gamma$  の大きさに関しては諸説あり、例えば [3] では数値的に  $\gamma \approx 1.5$  であると報告されている。

しかし、標準写像を含め、任意の混合系において、冪則がもたらされる通有的な原因はわかっていない。安定領域が無数に存在していることが、何より解析を困難にしている。さらに、安定領域の場所や個数を調べることは非常に根本的な問題であるにもかかわらず、それすら完全に解明されていない。そのため、本研究においては、標準写像へ区分線型化を施すことで、安定領域の場所や個数を明らかにすることに挑戦している。

### 3 区分線型化

#### 3.1 標準写像に対する区分線型化 $F_A$ の定義

標準写像 (1.7) の階層構造の分析は困難であるため, 単純化を行う. 三角関数  $-\sin(2\pi x)$  を区分線型写像 (3) に置換える. これにより, [4] において与えられている式 (2) という, 2 つの Affine 写像の組合せによって定義される写像を得る. Affine 写像とは, 線型写像に平行移動の操作を加えた写像である. ここで, 写像 (3) は, 場合分けの境界の点も含めて連続な写像であり, 写像 (2) へも連続性は受け継がれる.

この単純化によって, 標準写像が持っていた性質に変化がもたらされる可能性は否定できない. なぜなら, 写像 (3) は, 三角関数と位相共役 (2.3) でないからだ. しかし相空間上では, 標準写像における安定領域の階層構造に似た構造を, 観察することができる.

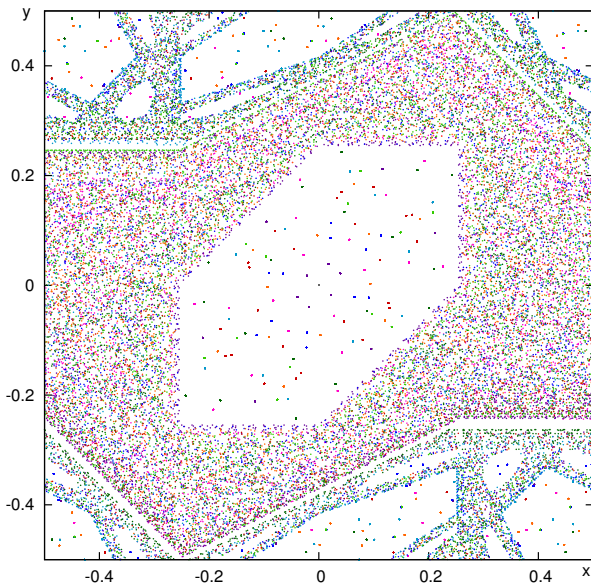


Fig.5  $\mathbb{T}^2$  平面上に random に初期点を 100 個配置し,  $T_{K=1}$  によってそれぞれ 500 回ずつ写像させたときの軌跡を描いた.

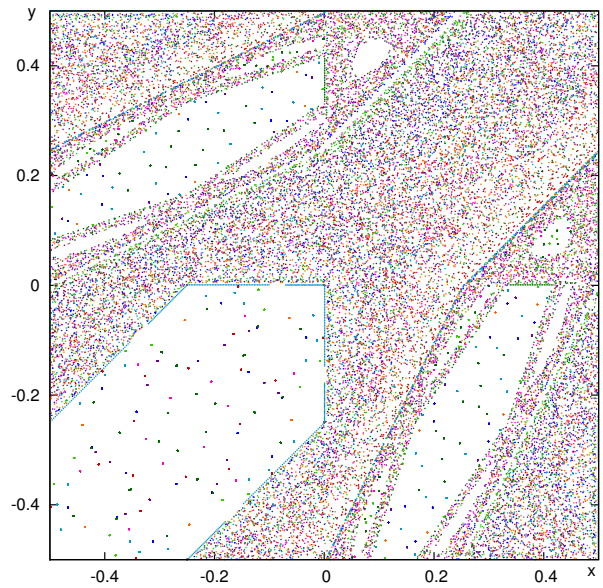


Fig.6  $\mathbb{T}^2$  平面上に random に初期点を 100 個配置し,  $F_{A=1}$  によって, それぞれ 500 回ずつ写像させたときの軌跡を描いた.

さらに写像 (2) に対して位相共役となるように, 付録 A に示す変数変換を施すことで得られる, [5] で定義されている区分線型写像:

$$(3.1) \quad F_A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2+A \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -A/4 \end{pmatrix} \bmod 1 & \text{where } y \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2-A \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -A/4 \end{pmatrix} \bmod 1 & \text{where } y \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \end{cases}$$

について考える. これは写像 (2) と位相共役である. 実際, それぞれの相空間を Fig.5 と Fig.6 のように並べて描くと, 似通った安定領域の階層性が見て取れる.  $A$  は, 標準写像 (1.7) における  $K$  を置換えた parameter であるため,  $K$  と同様に正値をとると仮定してよい.

#### 3.2 parameter $A$ の変化に対する写像 $F_A$ の応答

[5] で調べられた結果を述べる.



$y \geq 0$  の領域で定義されている写像は, いかなる  $A$  に対しても双曲的となる. 一方で,  $y \leq 0$  の領域における写像は,  $A > 4$  のとき双曲的であり,  $A < 4$  のときは楕円的となる.

双曲型周期点は, 周期点の周りの点は写像を繰返すとその周期点から遠ざかっていく一方で, 楕円型周期点は, そのある近傍において, 軌道は写像を繰返しても周期点の周りに留まり続けることを前に述べた. このことにより,  $A < 4$  では, 双曲的な写像による **chaos** 性を持ちながら, 楕円的な写像によって, 安定周期点の集まった領域: 島が形成されている.

$F_A$  は,  $A \geq 4$  のときに **torus** 面全体が **chaos** 軌道で埋め尽くされる. ただし, 特に  $A = 4$  のとき,  $\{x - y = -1/2 \mid x, y \in [-1/2, 0]\}$  という線分が, 放物型周期点だけから成る集合になり, この線分上にはない点はすべて **chaos** 軌道である. この線分は, 写像に対する不変集合であり, 測度のない島と考えることができる. なぜなら, 線分の近傍を通過する **chaos** 軌道は, 線分に沿うようにゆっくりと移動し, しばらくすると線分から離れていく, 遅い運動を観察できるからだ. この動きは, 写像 (2.6) の放物型周期点の近傍での挙動そのものである.

同じ挙動は,

$$(3.2) \quad A = A_n = 2 \left( \cos \frac{\pi}{n} + 1 \right) \quad (n = 2, 3, \dots)$$

のときにも観察される. このときは **chaos** 領域に囲まれてただ 1 つ存在する可積分な島は測度を持っている. さらに, 島の形は  $2n$  角形であり, 島の内部は  $n$  が偶数のときは  $n$  周期, 奇数のときは  $2n$  周期の周期点だけから構成されていることが証明されている.

その一方で,  $A \neq A_n$  かつ  $0 \leq A < 4$  のとき, 無数の可積分な島が出現し, 島たちが階層構造をなす様子も示唆している. 特に  $A \neq 1$  の場合では, 無数の島の形はすべて楕円形であり, 内部はすべて, 回転角が一定の準周期的な軌道で, 無限の時間かけて楕円形の軌跡を描くことが観察されている.

問題は  $A = 1$  のときである. このときは, 無数に存在する可積分の島は, すべて多角形をなすことが観察できる. 今後の議論では, **parameter** を  $A = 1$  に固定する. 本研究では,  $A = 1$  であるときは **parameter** を省略する.  $F (= F_1)$  の相空間に存在する島が必ず多角形であること, 島が無限に存在することを厳密に証明し, さらに島の階層構造が再帰時間分布にどのように影響を及ぼすかを詳しく議論する.

写像に対して少し摂動を加えても, 元の写像に位相共役的であるとき, その写像を構造安定的であると言う. (周期点の安定性とは全く異なる概念である.) しかし, 島の形が多角形の時と楕円形のときとで, 相空間の様子は大きく異なる. 例えば, 今述べたように多角形のときの島の内部は周期点であるのに対し, 楕円形のときにはそうではない. このように, **parameter** を少し変えただけで, 写像の性質が大きく変わってしまうため, 写像系  $F_{A_n}$  や  $F$  は構造安定的ではない. したがって, 本研究では  $A = 1$  のときについて詳しく議論するが,  $F$  において起こる現象が, 他の **parameter** でも観察されるとは限らないことに注意を必要とする.

### 3.3 $A = 1$ のときの相空間の様子

$A = 1$  のとき **torus** 面  $\mathbb{T}^2$  は Fig.6 のように 2 つの領域  $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$  に分断されている. ここで  $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$  は共に開集合として定義する. これらが分断されているというのはすなわち,  $\mathcal{I}_1$  上の点から始まる軌道は,  $\mathcal{I}_2$  へ入ることはないし, またその逆もない.

2 つの領域を隔てるのは, 3 周期点のみから成る不変な折線

$$(3.3) \quad \mathcal{J} := \overline{\mathcal{I}_1} \cap \overline{\mathcal{I}_2} = (\partial \mathcal{I}_1) \cap (\partial \mathcal{I}_2)$$

である. 集合に上線をつけたものは閉包を表すものとする. この折線  $\mathcal{J}$  は, 再帰時間分布に対して島と同じ



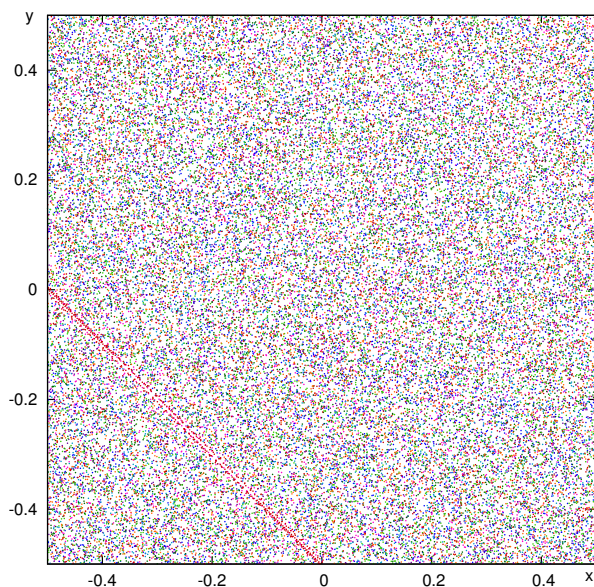


Fig.7  $F_4$  の相空間. torus 面全体が chaos 領域となっている.

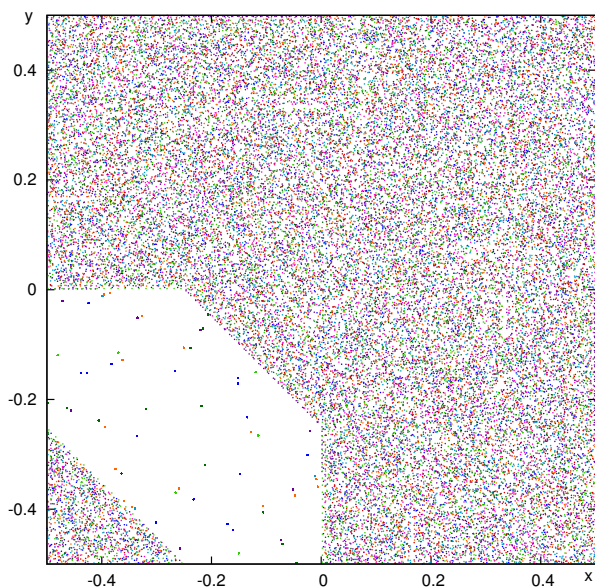


Fig.8  $F_3$  の相空間. 6 角形の島が存在し, その内部で写像は局所的に回転写像になっている.

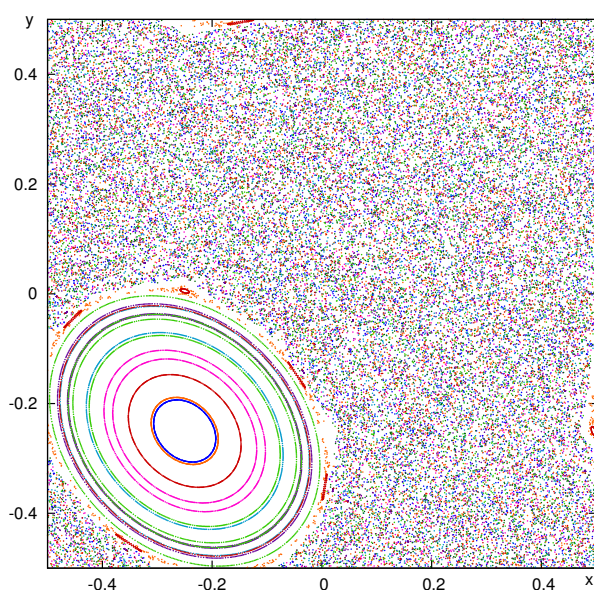


Fig.9  $F_{2.5}$  の相空間

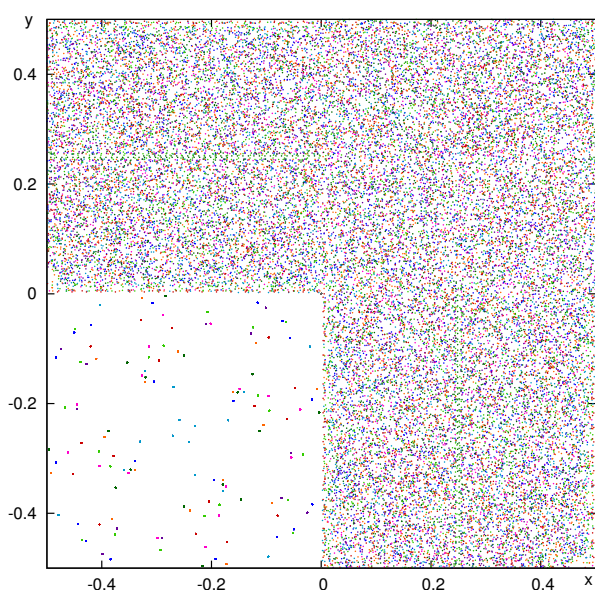


Fig.10  $F_2$  の相空間

役割を果たしている. 実際, chaos 軌道は, ひとたび  $\mathcal{J}$  に近づくと, しばらくの間  $\mathcal{J}$  の近傍に留まり続ける様子が観察できる.

$\mathcal{J}_1$  には,  $\mathcal{J}$  とは別に, Fig.6 に示したように安定な島が 1 つある. この島は 6 角形をなしており, chaos 領域との境界上の点を含めてすべての点は 6 周期を持つ. すなわち, この島は写像を 6 回繰返すと元の点に戻る点だけから成る. そして, この 6 角形を取り囲む chaos 軌道も, これまで述べたのと同じように, 島の近傍に留まり続ける挙動を見せる.

$\mathcal{J}_2$  には, 島の階層構造を観察できる. 一見すると, どの島も 6 角形または 4 角形を形作っているように見え, 数値的に確認した範囲でも, それら以外の辺の数の多角形は存在しなかった. そして, 大きな島の周りに小さな島が存在し, さらにその周りにより小さな島が存在するという, 階層的な構造も観察できた.

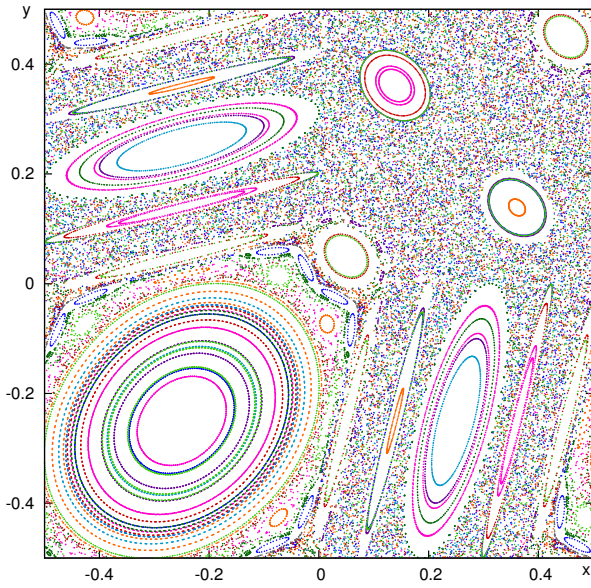


Fig.11  $F_{1.5}$  の相空間

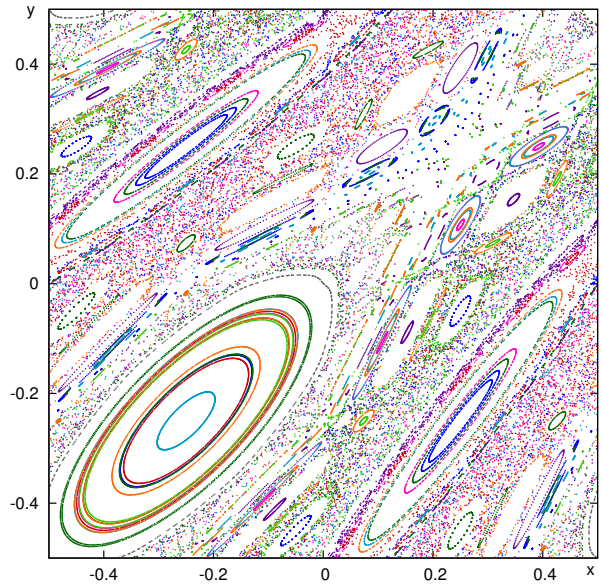


Fig.12  $F_{0.5}$  の相空間

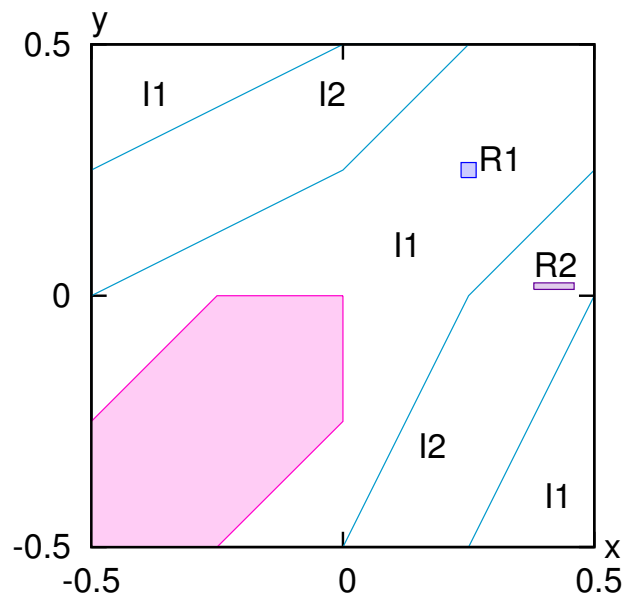


Fig.13  $F$  の相空間を隔てる折線  $\mathcal{I}$  と,  $\mathcal{I}_1$  内に存在する 6 周期の島. 四角形  $\mathcal{R}_1$  と  $\mathcal{R}_2$  は, 後の議論で定義する再帰領域である.

ここで,  $A = 1$  のときについて厳密な議論を行うために, 写像の定義を確認する. 式 (3.1) に  $A = 1$  を代入すれば

$$(3.4) \quad F: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2, \quad x \mapsto \begin{cases} F_+(x) = M_+x + V \bmod 1 & \text{where } x \in \overline{\mathcal{D}_+} \\ F_-(x) = M_-x + V \bmod 1 & \text{where } x \in \overline{\mathcal{D}_-} \end{cases}$$

と表せる. ここで,

$$(3.5) \quad M_+ := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad M_- := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad V := \begin{pmatrix} 0 \\ -1/4 \end{pmatrix},$$

$$(3.6) \quad \mathcal{D}_+ := \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \times \left( 0, \frac{1}{2} \right), \quad \mathcal{D}_- := \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \times \left( -\frac{1}{2}, 0 \right)$$

である.  $\overline{\mathcal{D}_+}$  上の全ての点において,  $F_+$  の **Jacobi** 行列は  $M_+$  であり, その固有値が 1 でない実数なので, 写像  $F_+$  は双曲的である. 同様に,  $\overline{\mathcal{D}_-}$  上の全ての点において,  $F_-$  の **Jacobi** 行列は  $M_-$  であり, その固有値は絶対値が 1 の複素数なので, 写像  $F_-$  は楕円的である.

また, 写像  $F$  を構成する行列と **vector** は, 成分に有理数しか持たない. すると, 座標の成分が有理数の点は, かならず有理数にうつされるため, 必ず周期点となる. **chaos** を扱う上で, 時として数値計算の精度が問題となることがあるが, この事実により, 計算機で数値計算を行っても, 厳密に正しい値を容易に計算できる.

## 4 記号力学系と島

### 4.1 一般の力学系に対する記号力学系

一般に, 相空間をいくつかの領域に分割し, 適当な **label** をつけることで, その上での力学系  $\Phi$  の軌道を記号列で表現することができる. つまり, 相空間の点 1 つずつに, 両側無限列を 1 つずつ割当てることができる. そして, 点を写像  $\Phi$  でうつすことは, 記号列の空間  $\Sigma$  上で記号列を 1 桁ずらすことに対応する. いま,  $\Sigma$  の上での **shift** 写像を  $\varphi$  で表す.

ここで, 分割した領域が生成分割であるとは, 分割の数 (すなわち **alphabet** の文字数) が有限個であり,  $\Phi$  と  $\varphi$  が位相共役的であることである. すなわち,  $\Phi$  と  $\varphi$  という 2 つの写像が式 (2.3) のように同相写像で結びつくということであり, 相空間の異なる点から同一の記号列が割当てられず, かつ任意の記号列を与えたとき, 対応する相空間上の点が存在するか否かを判定できるということである. したがって, 生成分割を発見すれば, その力学系の振る舞いを完全に記述できたことになる. 双曲型 **torus** 自己同型が定める力学系においては, **Markov** 分割という手法により, 写像の生成分割を見出だすことができるケースがある [6]. しかし本研究においては, 記号列を用いて軌道や島を分析しているが, 写像が一様双曲的ではないため **Markov** 分割を用いることが難しく, 生成分割を見つけることは叶わなかった.

しかし, これから記号力学系を定義していく過程から, “島と記号列” との間に, 1 対 1 の対応が自然に得られることがわかる. 区分線型化によってもたらされるこの事実は, 島の解析を格段に容易としている. 島が無限個存在する事の証明も, この事実を前提としている.

### 4.2 $F_1$ に対する記号力学系の定義

写像 (3.4) をさらに解析しやすくするために,  $\text{mod}1$  という平行移動, つまり **Affine** 写像を使わずに書き表すことを考える. まず, 定義域を  $[-1/2, 1/2]^2 \subset \mathbb{R}^2$  に限定する. このとき, 像空間も  $[-1/2, 1/2]^2 \subset \mathbb{R}^2$  となるように写像を定義すれば, 力学系の議論が可能となる.  $\text{mod}1$  による整数差は, 位置方向も運動量方向も, 一意の値を決める事ができるから,

$$(4.1) \quad F(\mathbf{x}) := \begin{cases} F_f(\mathbf{x}) = M_f \mathbf{x} - V_f & \mathbf{x} \in \overline{\mathcal{D}_f} \\ F_e(\mathbf{x}) = M_e \mathbf{x} - V_e & \mathbf{x} \in \overline{\mathcal{D}_e} \\ F_d(\mathbf{x}) = M_d \mathbf{x} - V_d & \mathbf{x} \in \overline{\mathcal{D}_d} \\ F_c(\mathbf{x}) = M_c \mathbf{x} - V_c & \mathbf{x} \in \overline{\mathcal{D}_c} \\ F_b(\mathbf{x}) = M_b \mathbf{x} - V_b & \mathbf{x} \in \overline{\mathcal{D}_b} \\ F_a(\mathbf{x}) = M_a \mathbf{x} - V_a & \mathbf{x} \in \overline{\mathcal{D}_a} \end{cases}$$

と表す. ただし

$$(4.2) \quad M_f = M_e = M_d = M_c := M_+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad M_b = M_a := M_- = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(4.3) \quad V_f = \begin{pmatrix} 0 \\ 9/4 \end{pmatrix}, \quad V_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 5/4 \end{pmatrix}, \quad V_d = V_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/4 \end{pmatrix}, \quad V_c = V_a = \begin{pmatrix} 0 \\ -3/4 \end{pmatrix},$$

であり, 領域それぞれに  $a, \dots, f$  の **label** を付け,

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \mathcal{D}_a &:= \{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_- \mid 4x - 4y > 1\}, & \mathcal{D}_b &:= \{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_- \mid 4x - 4y < 1\}, \\ \mathcal{D}_c &:= \{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_+ \mid 4x - 12y > 1\}, & \mathcal{D}_d &:= \{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_+ \mid -3 < 4x - 12y < 1\}, \\ \mathcal{D}_e &:= \{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_+ \mid -7 < 4x - 12y < -3\}, & \mathcal{D}_f &:= \{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_+ \mid 4x - 12y < -7\} \end{aligned}$$



としている.  $\text{mod1}$  により分割される定義域の境界線は式 (4.4) に示した通り線型不等式で書けるから,  $\mathbb{T}^2$  は Fig.14 のように 6 つの凸多角形に分割される. そして, 連続な写像 (3.4) を書き直したただけであるから, 隣接する領域同士の各境界の点は, そこで定義されている 2 つの写像でうつすと,  $\mathbb{R}^2$  上で同じ点か, 座標成分がちょうど 1 だけずれた点へ写される. したがって, いずれにせよ  $\mathbb{T}^2$  上では同じ点へと写される.

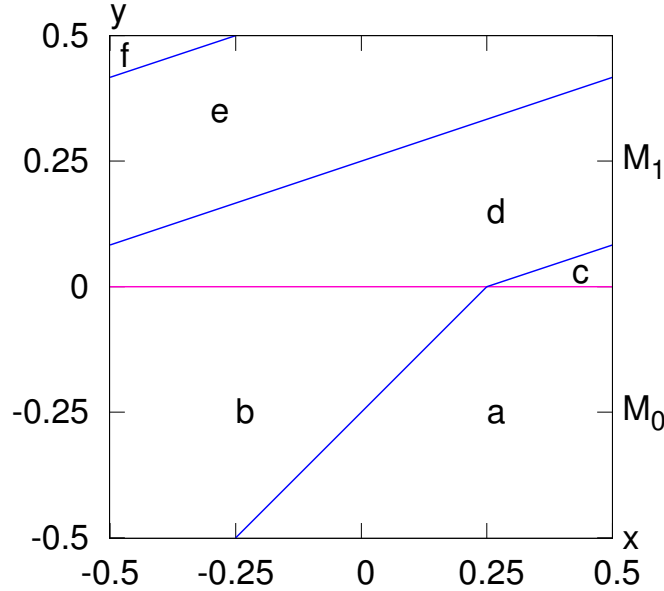


Fig.14  $F$  の定義域分割 (4.4)

このように label をつけると, 軌道に対応する記号列を定義できる. たとえば, 初期座標が  $\overline{\mathcal{D}}_a$  にあり, 1 回写像させると  $\overline{\mathcal{D}}_e$  へうつる場合, その前方軌道に対して  $ae$  から始まる片側無限列を割当てることができる. すると,  $p$  周期の軌道は  $p$  桁の記号列の無限回繰返しによって表現することができる. このとき, 複数の領域同士の境界を通る点については, いずれの側の写像も定義されているので, 対応する記号の定義の方法は任意とする.

この定義の下では, 一般によく知られている記号力学系とは違い, 異なる 2 つの軌道があったときに, それらが異なる記号列を持つとは限らない. しかし, 後に述べる通り, 同じ島に属する点を初期点とする 2 つの軌道は, 必ず同じ記号列を持つ. このことは, 島が形作られていく **mechanism** を追っていくことで理解できる.

### 4.3 $F_1$ における島の定義

ここから, 書き直した写像 (4.1) における “島” という言葉を定義していく. これは, 島の形成過程から自然に導かれる.

まず, 軌道に割当てられる記号列全体の空間を考える. 定義域の label 全体

$$(4.5) \quad \Sigma = \{a, \dots, f\}$$

を alphabet とする. 議論の形式として, 空記号列, すなわち長さ 0 の記号列を  $\varepsilon$  とおく. すると,  $n$ -step の前方軌道を表す記号列を  $\sigma_n = s_0 \cdots s_{n-1}$  ( $s_i \in \Sigma$ ) と表す.  $\sigma_n$  は記号空間

$$(4.6) \quad \Sigma^* := \bigcup_{n=1}^{\infty} \{a, \dots, f\}^n \cup \{\varepsilon\}$$

の中に含まれる. また, 後の議論で用いる文法として, 記号列に自然数の冪乗をつけたものはその指数の回数だけの反復を, 上線をつけたものは反転を表すものとする. つまり,

$$(4.7) \quad (\sigma_n)^2 = (s_0 \cdots s_{n-1})^2 := s_0 \cdots s_{n-1} s_0 \cdots s_{n-1}, \quad \overline{\sigma_n} = \overline{s_0 \cdots s_{n-1}} := s_{n-1} \cdots s_0$$

である. さらに, 記号空間  $\Sigma^*$  上の作用として, 記号列を 1 字ずらす  $\varphi$  という写像を導入する. すなわち,

$$(4.8) \quad \varphi(s_0 \cdots s_{n-1}) = s_1 \cdots s_{n-1} s_0$$

である. 明らかに,  $n$  文字の記号列  $\sigma_n \in \Sigma^*$  に対し,

$$(4.9) \quad \varphi^n(\sigma_n) = \sigma_n$$

である.

ここから, ある 1 つの記号列  $\sigma_n$  を前方軌道として持つような点全体の集合  $\overline{\mathcal{D}_{\sigma_n}}$  を定義していく.

区分線型写像 (4.1) の 2 倍写像を考える. すなわち, **torus** 面上の点  $\mathbf{x}$  を, 区分線型写像 (4.1) で 2 回うつす写像  $F^2(\mathbf{x}) := F \circ F(\mathbf{x})$  のことであり, 以下のように書き下すことができる.

$$(4.10) \quad F^2(\mathbf{x}) = \begin{cases} F(F_f(\mathbf{x})) & \text{where } \mathbf{x} \in \overline{\mathcal{D}_f} \\ \vdots \\ F(F_a(\mathbf{x})) & \text{where } \mathbf{x} \in \overline{\mathcal{D}_a} \end{cases} = \begin{cases} \begin{cases} F_f(F_f(\mathbf{x})) & \text{where } F_f(\mathbf{x}) \in \overline{\mathcal{D}_f} \\ \vdots \\ F_a(F_f(\mathbf{x})) & \text{where } F_f(\mathbf{x}) \in \overline{\mathcal{D}_a} \end{cases} & \text{where } \mathbf{x} \in \overline{\mathcal{D}_f} \\ \vdots \\ \begin{cases} F_f(F_a(\mathbf{x})) & \text{where } F_a(\mathbf{x}) \in \overline{\mathcal{D}_f} \\ \vdots \\ F_a(F_a(\mathbf{x})) & \text{where } F_a(\mathbf{x}) \in \overline{\mathcal{D}_a} \end{cases} & \text{where } \mathbf{x} \in \overline{\mathcal{D}_a} \end{cases}$$

このように, はじめ 6 通りの場合分けで定義された写像が,  $6^2 = 36$  通りの場合分けとなっている. つまり 2 倍写像とは, **torus** 面上の定義域をより細かく分割し, 分割された領域それぞれで別の写像が定義されているものと考えることができる. このとき, 分割された領域もまた全て凸多角形なので, やはり線型不等式だけで書き表すことができる. ここで,  $s_0, s_1 \in \Sigma$  に対し,

$$(4.11) \quad \mathcal{D}_{s_0 s_1} := \mathcal{D}_{s_0} \cap \{\mathbf{x} \mid F_{s_0}(\mathbf{x}) \in \mathcal{D}_{s_1}\}$$

と定義し, 写像 (4.10) を領域  $\overline{\mathcal{D}_{s_0 s_1}}$  上に制限した写像を  $F_{s_0 s_1}$  と表すと,

$$(4.12) \quad F_{s_0 s_1} \equiv F_{s_1} \circ F_{s_0} \equiv M_{s_1}(M_{s_0} \bullet + V_{s_0}) + V_{s_1}$$

となる. すなわち,

$$(4.13) \quad F^2(\mathbf{x}) = \begin{cases} F_f \circ F_f(\mathbf{x}) & \text{where } \mathbf{x} \in \overline{\mathcal{D}_f}, F_f(\mathbf{x}) \in \overline{\mathcal{D}_f} \\ \vdots \\ F_a \circ F_f(\mathbf{x}) & \text{where } \mathbf{x} \in \overline{\mathcal{D}_f}, F_f(\mathbf{x}) \in \overline{\mathcal{D}_a} \\ \vdots \\ F_f \circ F_a(\mathbf{x}) & \text{where } \mathbf{x} \in \overline{\mathcal{D}_a}, F_a(\mathbf{x}) \in \overline{\mathcal{D}_f} \\ \vdots \\ F_a \circ F_a(\mathbf{x}) & \text{where } \mathbf{x} \in \overline{\mathcal{D}_a}, F_a(\mathbf{x}) \in \overline{\mathcal{D}_a} \end{cases} = \begin{cases} F_{ff}(\mathbf{x}) & \text{where } \mathbf{x} \in \overline{\mathcal{D}_{ff}} \\ \vdots \\ F_{fa}(\mathbf{x}) & \text{where } \mathbf{x} \in \overline{\mathcal{D}_{fa}} \\ \vdots \\ F_{af}(\mathbf{x}) & \text{where } \mathbf{x} \in \overline{\mathcal{D}_{af}} \\ \vdots \\ F_{aa}(\mathbf{x}) & \text{where } \mathbf{x} \in \overline{\mathcal{D}_{aa}} \end{cases}$$

(場合分けの順序は等号の前後で不変) である. 明らかではあるが, 一般に  $\overline{\mathcal{D}_{s_0 s_1}} = \mathcal{D}_{\overline{s_0 s_1}}$  は成立たないことに注意されたい.

ここで, 非常に重要な注意を述べる. 式 (4.11) から判るように, 凸多角形  $\mathcal{D}_{s_0}$  を規定する線型不等式群と, 同じく凸多角形  $\{\mathbf{x} \mid F_{s_0}(\mathbf{x}) \in \mathcal{D}_{s_1}\}$  を規定する線型不等式群とは全く無関係である. したがって,  $s_0, s_1$  の組合せによっては  $\mathcal{D}_{s_0 s_1}$  が必ずしも存在するとは限らない. Fig.15 を見ればわかるように, 例えば  $\mathcal{D}_{aa} = \emptyset$  である. また,

$$(4.14) \quad \overline{\mathcal{D}_{s_0 s_1}} := (\overline{\mathcal{D}_{s_0} \cap \{\mathbf{x} \mid F_{s_0}(\mathbf{x}) \in \mathcal{D}_{s_1}\}}) \subset \overline{\mathcal{D}_{s_0}} \cap \overline{\{\mathbf{x} \mid F_{s_0}(\mathbf{x}) \in \mathcal{D}_{s_1}\}} = \overline{\mathcal{D}_{s_0}} \cap \{\mathbf{x} \mid F_{s_0}(\mathbf{x}) \in \overline{\mathcal{D}_{s_1}}\}$$

である. 最後の等号は,  $F$  の同相性より従う.

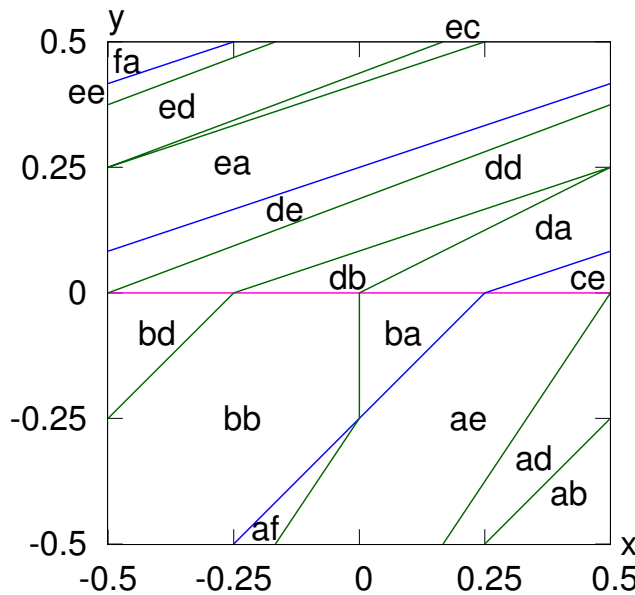


Fig.15 2倍写像  $F^2$  の定義域分割.  $\sigma_2 = aa, ac, bc, be, bf, \dots$  などのときは  $\mathcal{D}_{\sigma_2} = \emptyset$  となる.

写像をさらに繰返すときも, それぞれの定義域を式 (4.11) のように, 対応する写像を式 (4.12) のように, 共に合成して表すことができる. すなわち, 任意の  $\sigma_n \in \Sigma^*$  と任意の  $s_n \in \Sigma$  に対して,  $\sigma_{n+1} := \sigma_n s_n$  として,

$$(4.15) \quad \begin{aligned} \mathcal{D}_{\sigma_{n+1}} &:= \mathcal{D}_{\sigma_n} \cap \{\mathbf{x} \mid F_{\sigma_n}(\mathbf{x}) \in \mathcal{D}_{s_n}\} \\ &= \mathcal{D}_{s_0} \cap \{\mathbf{x} \mid F_{s_0}(\mathbf{x}) \in \mathcal{D}_{s_1}\} \cap \{\mathbf{x} \mid F_{s_0 s_1}(\mathbf{x}) \in \mathcal{D}_{s_2}\} \cap \dots \cap \{\mathbf{x} \mid F_{s_0 \dots s_{n-1}}(\mathbf{x}) \in \mathcal{D}_{s_n}\} \\ &= \left\{ \mathbf{x} \mid \begin{array}{l} \mathbf{x} \in \mathcal{D}_{s_0} \\ F_{s_0}(\mathbf{x}) \in \mathcal{D}_{s_1} \\ \vdots \\ F_{s_0 \dots s_{n-1}}(\mathbf{x}) \in \mathcal{D}_{s_n} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$(4.16) \quad F_{\sigma_{n+1}} \equiv F_{s_n} \circ F_{\sigma_n} \equiv F_{s_n} \circ \dots \circ F_{s_0}$$

と帰納的に定義する. ただし,

$$(4.17) \quad \mathcal{D}_\varepsilon := \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)^2, \quad F_\varepsilon := \text{id}$$

とする.  $\mathcal{D}_{\sigma_{n+1}}$  は, 言い換えれば, “ $F_{\sigma_n}$  の定義域  $\overline{\mathcal{D}_{\sigma_n}}$  の内部にあり, 写像したら  $\mathcal{D}_{s_n}$  へとうつるような点の集合” である. むろん,  $(n+1)$  倍写像の定義域の場合分けは, 定義域が  $\emptyset$  となるものも含めて  $6^{n+1}$  通り存在する.

この表記を用いて、島を定義する。 $\sigma_n$  の組合せによっては、写像  $F_{\sigma_n}$  が恒等写像になることがある。もしその定義域  $\overline{\mathcal{D}_{\sigma_n}}$  が  $\emptyset$  でなければ、この定義域  $\overline{\mathcal{D}_{\sigma_n}}$  を “ $n$  周期の島” と呼ぶことにする。

以上の方法により、写像の繰返しを有限回だけ行うことで、島を見つけることができる。しかし、写像を無限回行わないと、島の形が定まらないような場合がある。ここで意図しているものは、式 (3.3) で定義される折線  $\mathcal{J}$  である。ここでは、相空間上の安定領域全てを、島として定義したい。そこで、次の方法で定義されるものを含めて “島” であると認めることにする。

$\overline{\mathcal{D}_{\sigma_n}}$  の  $\emptyset$  でない連結な閉集合  $\mathcal{R} \subset \overline{\mathcal{D}_{\sigma_n}}$  に対して、 $F_{\sigma_n}$  の像：

$$(4.18) \quad F_{\sigma_n}(\mathcal{R}) := \{F_{\sigma_n}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{R}\}$$

すなわち領域  $\mathcal{R}$  の点すべてを写像させた行先全体を考える。 $F_{\sigma_n}$  が恒等写像でなくとも、うつした像が集合として完全に一致する、つまり

$$(4.19) \quad F_{\sigma_n}(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$$

となるような  $\sigma_n$  は存在する。このような  $\mathcal{R}$  も、有限回繰返した写像に対する不変集合となるのでやはり島と呼びたい。しかし一方で、chaos 領域に稠密に分布する双曲型周期点それぞれも、この条件を満たしてしまう。これらを明確に区別することを考える。

そこで、条件 (4.19) の下で、写像  $F_{\sigma_n}$  が楕円的または放物的のとき (すなわち、式 (4.12) のように書き下したときの行列部分の安定性が楕円的 (固有値が複素数) または放物的 (固有値が  $\pm 1$ ) であるかどうかを調べればよい)、その定義域 (すなわち像)  $\mathcal{R}$  を “島” と呼ぶものと定義する。同時に、島  $\mathcal{R}$  についての安定性という概念を、対応する写像  $F_{\sigma_n}$  の安定性により定義する。

例えば、折線  $\mathcal{J}$  をなす 6 つの線分は、それぞれ  $F_{\text{ead}}, F_{\text{ade}}, F_{\text{dea}}, F_{\text{dae}}, F_{\text{eda}}, F_{\text{aed}}$  に対して不変な集合である。この 6 つの写像は放物的である。

このように定義した “島” は、定義される有限回の繰返し写像に対して不変で、かつその写像が安定であることにより定義され、写像が恒等であるかどうかや、定義域の有限回の分割によって島の形が定まるかどうかは問題としないのである。

ただし、この定義に従うことで、島の場所や形の見当があらかじめついている時に、それを島であるかどうかを判定することはできるが、島を 1 つずつ数え上げることは難しい。むしろ、写像の有限回だけの繰返しによって形が定まるような島は、その形成過程を愚直にそのまま追う事で探索することができるのである。実際にこの方法で、写像の定義域をどんどん細かく切り分けていくことで、短い周期を持つ島から順番に、記号列を対応付けながら島を探索した。

#### 4.4 $F_1$ における島の性質

島の探索結果を述べる前に、以上の定義から導かれる事実を確認する。

式 (4.1), (4.2), (4.3) の通り、用いている写像の係数は全て有理数である。また、写像の定義域も、式 (4.4) から判るように、整数を係数とする線型不等式で表せる。従って、相空間を細かく切り分けることで得られる  $\mathcal{D}_{\sigma_n}$  もまた、整数を係数とする線型不等式で表すことができるので、頂点が存在すればそれは必ず有理数の座標を持つ。

そして、 $\mathcal{D}_{\sigma_n}$  が正の測度を持つとすれば、それは凸多角形となる。例えば、 $\overline{\mathcal{D}_{\text{ab}}}$  と  $\overline{\mathcal{D}_{\text{ad}}}$  の境界をなす直線は、 $\overline{\mathcal{D}_{\text{b}}}$  と  $\overline{\mathcal{D}_{\text{d}}}$  の境界をなす直線を  $F_{\text{a}}^{-1}$  で引き戻すことで得られる。このように、元々の定義域  $\mathcal{D}_{s_0}$  ( $s_0 \in \Sigma$ ) が、多角形の一辺の逆像によって細かく切り分けられていく。写像 (4.1) は連続であったから、領域と記号列



との対応が 1 対 1 であることが得られる. また, 用いている写像は連続な区分線型であるため, 直線は直線へとうつるから, 有限回の切り分けを行い得られる領域もまた多角形をなす.

逆に, 凸多角形をなさない  $\mathcal{I}$  のような島は, 無限回の切り分けを実行する事で得られる. 定義に従えば, ある島の要素がただ 1 つであれば, それは放物型周期点に他ならない. しかし  $F$  の相空間上で, そのような島 (点) は (存在するかもしれないが) 発見できなかった. 逆に, 周期点であっても, 双曲型周期点 (不安定周期点) は “島” と呼ばないが, 双曲型周期点は  $\mathcal{I}_1$  の chaos 領域にも  $\mathcal{I}_2$  の chaos 領域にも, 無数の島同士の微小な隙間までいたるところ稠密に存在している.

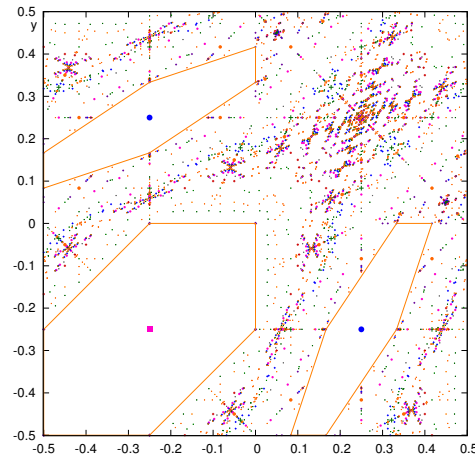


Fig.16  $F_1$  の 14 周期までの軌道. 孤立した周期点は [4] の付録 A の方法で探索することができる.

また, ある記号列  $\sigma_n = s_0 \dots s_{n-1}$  に対応する島  $\overline{\mathcal{D}_{\sigma_n}}$  が存在するとする. この島を  $F_{s_0}$  でうつすことを考える. 島の定義から  $F_{\sigma_n}(\mathcal{D}_{\sigma_n}) = \mathcal{D}_{\sigma_n}$  であり,  $F_{\sigma_n}$  は式 (4.16) で定義されるから,

$$(4.20) \quad F_{s_0}(\mathcal{D}_{\sigma_n}) = F_{s_0} \circ F_{\sigma_n}(\mathcal{D}_{\sigma_n}) = F_{s_0} \circ F_{s_{n-1}} \circ \dots \circ F_{s_1} \circ F_{s_0}(\mathcal{D}_{\sigma_n})$$

となり, 領域  $F_{s_0}(\mathcal{D}_{\sigma_n})$  は  $F_{s_0} \circ F_{s_{n-1}} \circ \dots \circ F_{s_1}$  に対して不変である.

$$(4.21) \quad F_{s_0} \circ F_{s_{n-1}} \circ \dots \circ F_{s_1} \equiv F_{s_0} \circ F_{\sigma_n} \circ F_{s_0}^{-1}$$

であるから, 位相共役性 (2.3) より  $F_{s_0} \circ F_{s_{n-1}} \circ \dots \circ F_{s_1}$  の行列部分の安定性は,  $F_{\sigma_n}$  のそれと同一である. したがって,  $\overline{F_{s_0}(\mathcal{D}_{\sigma_n})}$  は島である. 対応する記号列は,  $\sigma_n = s_0 \dots s_{n-1}$  を, 式 (4.8) で定義した記号列の shift 写像  $\varphi$  によって 1 文字ずらした  $\varphi(\sigma_n) = s_1 \dots s_{n-1}s_1$  である. すなわち,

$$(4.22) \quad F_{\varphi(\sigma_n)}(\overline{F_{s_0}(\mathcal{D}_{\sigma_n})}) = \overline{F_{s_0}(\mathcal{D}_{\sigma_n})}$$

である. 同様に,  $\sigma_n$  を  $2, \dots, (n-1)$  回ずらした記号列について, それぞれ対応する領域がすべて島となる. このことから, 相空間に  $n$  周期の島が存在する場合, 重複を許して  $n$  個の島が存在する.

さらに, 付録 B で述べるように,  $F$  は, 直線  $x = y$  に対して対称であるため, 反転させて右から左に読んだ記号列に対応する島もまた, 同様に存在する.

## 4.5 相空間上での島の探索

以上の方法を用いて, 短い周期の島を探索した.

まず, 既に述べているように,  $\mathcal{I}_1$  上に  $\sigma_6 = \mathbf{b}^6$  (記号列の冪乗は繰返しである.) に対応する 6 周期点が集まった 6 角形の島をただ 1 つだけ見つけた. この島の中心には不動点  $(-1/4, 1/4)$  があり, 島の上での写像

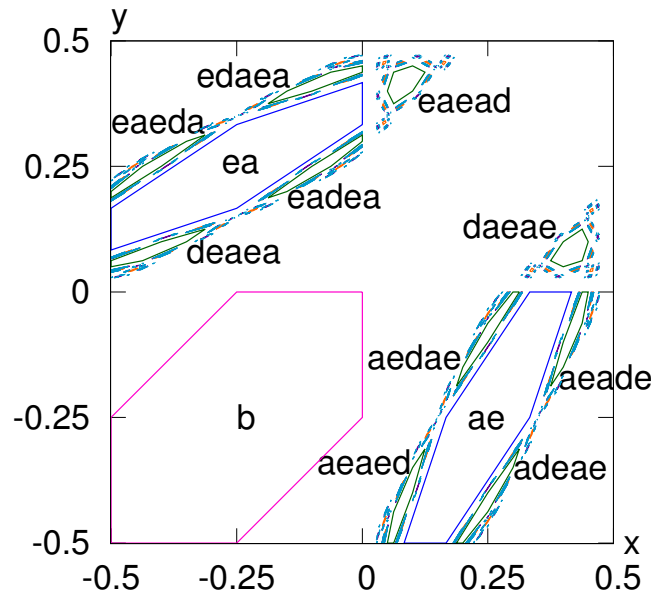


Fig.17 69 周期までの島 (記号列の繰返し回数は省略)

は, 不動点を中心に頂点・辺を反時計回りに隣の頂点・辺へとうつす. また, 島の内部の点も同様に, 不動点の周りを角度  $\pi/3$  ずつ回転するような周期軌道となっている.

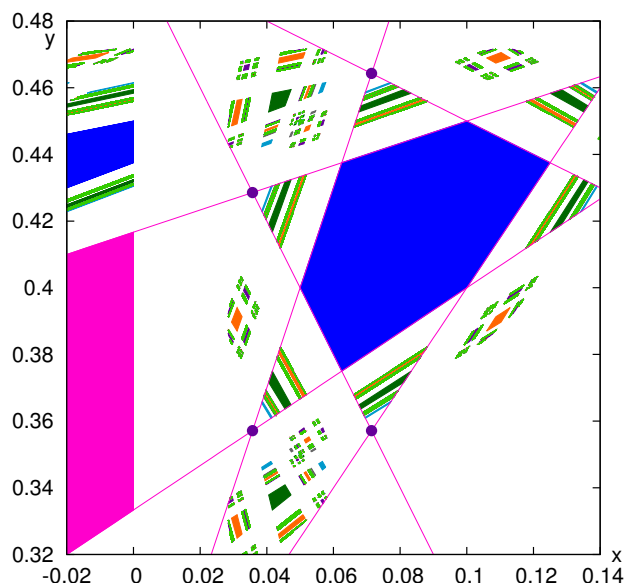
次に,  $\mathcal{I}_2$  上で最も周期が短く, かつ測度の大きい島である,  $\sigma_{12} = (ae)^6, (ea)^6$  に対応する 12 周期点が集まった 6 角形の島が 2 つ存在した. この 2 つの島に属する点は, 写像するごとに互いを行き来する. そして, それぞれの島では 2 倍写像  $F_{ae}, F_{ea}$  によって,  $b^6$  と同じように, 中心の 2 周期点の周りを角度  $\pi/3$  ずつ回転するような周期軌道となっている.

さらに, 12 周期の島を取り囲むように, 15 周期点が集まった 6 角形の島が 10 個存在した. 記号列は  $\sigma_{15} = (eaead)^3, (aeade)^3, (eadea)^3, (adeae)^3, (deaea)^3$  と, これらを右から左へ逆向きに読んだもので, 計 10 個である. これらの島の上の軌道は, この 2 組のうちのどちらか 5 つだけを通るような周期軌道である.  $\overline{\mathcal{D}_{(eaead)^3}}$  上のある点は, 写像をさせるごとに,  $\overline{\mathcal{D}_{(aeade)^3}}, \overline{\mathcal{D}_{(eadea)^3}}, \overline{\mathcal{D}_{(adeae)^3}}, \overline{\mathcal{D}_{(deaea)^3}}$  の順に移動し, さらに 5 回目の写像で  $\overline{\mathcal{D}_{(eaead)^3}}$  の別の点に移動する. 具体的には, 中心の 5 周期点の周りを角度  $2\pi/3$  だけ回転させた点である. そしてそこからさらに 10 回写像させることで, 元の初期点へ戻る周期軌道となっている.

15 周期以下の島はこれが全てである. なお,  $\mathcal{I}$  という 3 周期の島も存在するが, これまでに議論した通り, この島は写像の定義域を切り分ける方法では発見できない. 一方, 15 周期より長い周期を持つ島は, これまでとは様子が違っていた. 次に見つかるのは 33 周期の島であり, いままでと同様に 15 周期の島の周りを取り囲んでいた. しかし, 写像させるごとに 33 個の島を順番にうつっていくような, 33 周期点の集まりであり, 島の中にはそれよりも短い周期をもつ周期点は存在していなかった. そして, 島の形も 6 角形ではなく 4 角形であった.

さらに長い周期の島として, 周期の長さが, 51, 69, 84, 87, 105, 120, 123, ... の島も存在しており, これらもその島の点の周期は全て同じ長さであり, 島の形は 4 角形となっていた.

島の周期長にもう少し注目すると, 2 つの等差数列が見える. 実際, 島の定義に従った手続きによる数値計算を行うことで 200 周期以下の範囲で調べると,  $15 + 18m$  ( $m = 0, 1, \dots$ ) という長さの周期を持つ島が,  $m \leq 10$  の範囲において, また  $84 + 36m$  ( $m = 0, 1, \dots$ ) という長さの周期を持つ島が,  $m \leq 3$  の範囲において, それぞれ全て見つかった. この規則性について, 記号列を調べることで深く考察する.

Fig.18 195 周期までの島 ( $A^3$  の島のまわりを拡大)

#### 4.6 島を表す記号列

Table 1, Table 2 は, 発見した島の記号列を列挙したものである. ここで, 先に述べたように, ある記号列に対応する島が存在すれば, 記号列を **shift** したり反転したりして得られる記号列に対応する島も存在するので, 代表させる記号列をとり, それら全てを 1 つにまとめて表現することにする. そして記号列は, いくつかの決まった **pattern** の組合せで表現されていたので, 今後はそのような定型語をまとめて,  $A := \text{eaead}$ ,  $B := \text{ead}$ ,  $C := \text{ec}$  とし, さらに  $X := BAB$  と表現することにする.

15 周期以降は, 短い周期の島の記号列を規則的に置換えることで, 長い周期の島の記号列を表すことができる. 具体的には, 記号列に含まれる特定の位置の “A” を “XAAC” へ置換える. 特に, 33 周期以上の島の記号列については, 置換えるべき “A” の位置の特定も含めた置換え方法が, Table 1 において赤色と青色で mark したように,

規則 I 記号列に含まれる XAAC という部分を,  $(XA)^2AC^2$  に置換える

規則 II 記号列に含まれる XAAC という部分を,  $X^2A(AC)^2$  に置換える.

という 2 通りの規則のいずれかとなる. どちらの規則も, 元の **alphabet**  $a, \dots, f$  の文字数で数えると, 18 文字増やす手続きである. 組合せ方によって, 島の記号列にはたくさんの枝分かれが生じる.

また, Table 2 に示した,  $(84 + 36m)$  周期をもつ島に関しても, それらの記号列は, 84 周期の島の記号列へ, 規則 I, II とは異なる別の置換え方を施すことによって生成される.

いずれの場合についても, 同じ周期の島をひとまとまりに考え, 周期の違いに対して “階層性” という概念を導入する. すなわち, 15 周期・84 周期の島を “親” と考えそれぞれ第 0 層とし, 置換えを 1 回施した 33 周期・120 周期の島を “子” の第 1 層, 置換えを 2 回施した 51 周期・156 周期の島を “孫” の第 2 層と考える. 同様に, 置換えを  $m$  回施した周期の島を, 第  $m$  層と考える.

ここで十分に注意せねばならないことを述べる. 発見した島の中には, その記号列を, 別の島の記号列の一部を置換えることで表現できるものが存在するのであって, 見つけた任意の島に対して, その記号列へさらに

周期	記号列 (冪乗は反復を意味する)
3	B
6	$b^6$
12	$(eaeaea)^2$
15	$A^3$
33	$A^2XAAC$
51	$A^2XAXACC, A^2XXAACAC$
69	$A^2(XA)^3AC^3, A^2(XA)X^2A(AC)^2C, A^2X(XA)^2AC^2(AC), A^2X^3A(AC)^3$
87	$A^2(XA)^4AC^4, A^2(XA)^2X^2A(AC)^2C^2, A^2(XA)X^3A(AC)^3C,$ $A^2X(XA)^3AC^3(AC), A^2X(XA)X^2A(AC)^2C(AC), A^2X^2(XA)^2AC^2(AC)^2, A^2X^4A(AC)^4$
105	$A^2(XA)^5AC^5, A^2(XA)^3X^2A(AC)^2C^3, A^2(XA)^2X^3A(AC)^3C^2,$ $A^2(XA)X^2(XA)^2AC^2(AC)^2C, A^2(XA)X^4A(AC)^4C$ $A^2X(XA)^4AC^4(AC), A^2X(XA)^2X^2A(AC)^2C^2(AC), A^2X(XA)X^3A(AC)^3C(AC),$ $A^2X^2(XA)^3AC^3(AC)^2, A^2X^2(XA)X^2A(AC)^2C(AC)^2, A^2X^3(XA)^2AC^2(AC)^3, A^2X^5A(AC)^5$
123	$A^2(XA)^6AC^6, A^2(XA)^4X^2A(AC)^2C^4, A^2(XA)^3X^3A(AC)^3C^3,$ $A^2(XA)^2X^2(XA)^2AC^2(AC)^2C^2, A^2(XA)^2X^4A(AC)^4C^2,$ $A^2(XA)X^2(XA)^3AC^3(AC)^2C, A^2(XA)X^2(XA)X^2A(AC)^2C(AC)^2C,$ $A^2(XA)X^3(XA)^2AC^2(AC)^3C, A^2(XA)X^5A(AC)^5C,$ $A^2X(XA)^5AC^5(AC), A^2X(XA)^3X^2A(AC)^2C^3(AC), A^2X(XA)^2X^3A(AC)^3C^2(AC),$ $A^2X(XA)X^2(XA)^2AC^2(AC)^2C(AC), A^2X(XA)X^4A(AC)^4C(AC),$ $A^2X^2(XA)^4AC^4(AC)^2, A^2X^2(XA)^2X^2A(AC)^2C^2(AC)^2, A^2X^2(XA)X^3A(AC)^3C(AC)^2,$ $A^2X^3(XA)^3AC^3(AC)^3, A^2X^3(XA)X^2A(AC)^2C(AC)^3, A^2X^4(XA)^2AC^2(AC)^4, A^2X^6A(AC)^6$
141	… (省略)

Table 1 3 周期, 6 周期, 12 周期と,  $15 + 18m$  ( $m = 0, 1, \dots$ ) という長さの周期を持つ島の記号列. 15 周期以上に関しては, すべて定型語だけで表現できている. 色の違いには, 後の議論を意図した可読性以上の意味はない.

周期	記号列 (上線は反転を意味する)
84	$A^2(XA)BA^2CecCA^2B(AX)A^2$
120	$A^2(XA)^2BA^2CecCA^2B(AX)^2A^2$
156	$A^2(XA)^3BA^2CecCA^2B(AX)^3A^2$
192	$A^2(XA)^4BA^2CecCA^2B(AX)^4A^2$

Table 2  $84 + 36m$  ( $m = 0, 1, \dots$ ) という長さの周期を持つ島の記号列.  $(15 + 18m)$  周期の島と同様, 規則的な置換えを施す事で, より長い周期の島の記号列を表現できる.

規則 I または規則 II を適用して新しい記号列を作ったとき, 対応する島が存在するかどうかはわからない. したがって, 第 1 層の “ $A^2XAAC$ ” 以降に対して, 各階層にはそれぞれ 2 通りの置換え方が存在するので, 第  $m$  層の記号列の variation は  $2^{m-1}$  通り存在するのに対し, 意味のある, すなわち対応する島するような記号列は  $2^{m-1}$  通りよりも少なくなる. たとえば, 第 4 層の記号列は  $2^3 = 8$  通り作ることができるが, 対応する 87 周期の島は, Table 1 に示したように 7 通りしか存在しなかった. ここで生じる疑問は, “どの記号列に対応す

る島が存在し, どの記号列に対応する島が存在しないのか.” ということである. すなわち, このように記号列が意味を持たなくなる “pruning” が起こる条件は, 調査を行っていない深い階層において, 他にも存在する可能性もあるのだ. この疑問に答えることこそが, 記号力学系を導入した系における最終目標であり, 生成分割を見つけることによって導くことができる. しかし一般に生成分割の発見は困難であり, 本研究においても見つけることはできなかった.

それでも, 島が無数個存在することを証明するにあたって, このような記号列の機械的な生成方法を見出せたことが, 大きな鍵となる. その前に, ここで定義した階層性が, 相空間上でどのように反映されているかを観察する.

#### 4.7 相空間上での階層性

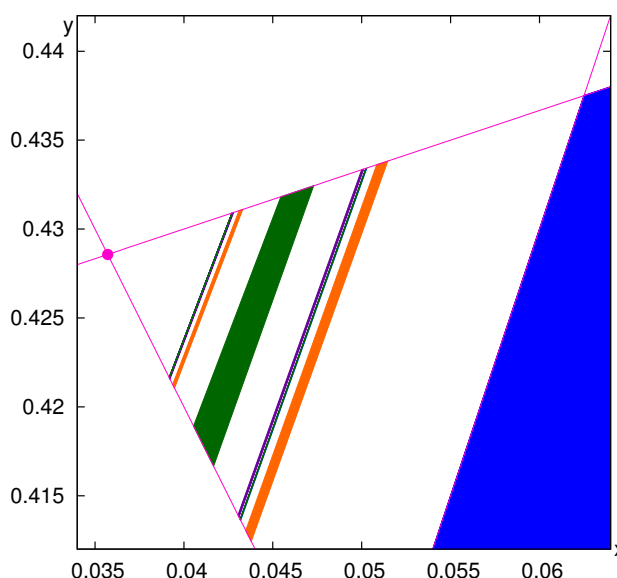


Fig.19  $A^3, A^2(XA)^m AC^m, A^2 X^m A(AC)^m$  ( $m \leq 3$ ) と, その shift の島の辺を延長した様子 (拡大)

いま, 33 周期の島の記号列  $A^2XAAC$  に, 規則 I だけを 0 回以上繰返し適用して得られる記号列を考える. これは一般に,  $A^2(XA)^m AC^m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) という記号列で表される. このような記号列に対応する島を探すと, Fig.19 に表したように, 各々の島の四角形の向い合う 2 辺がそれぞれ共通の直線上に存在し, 周期が長くなるごとに, 一定の方向へと島が並ぶ様子が見られた. さらに, その 2 直線の交点は, 双曲型の周期点となっていた.

つぎに,  $A^2XAAC$  に, 規則 II だけを 0 回以上繰返し適用して得られる記号列を考える. これは一般に,  $A^2 X^m A(AC)^m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) と表せる. この場合も, 規則 I だけのときと同様に, 四角形の島の向い合う 2 辺は, 共通の直線に存在していた. しかし, 階層の深さ  $m$  が奇数の島は, 第  $(m-1)$  層の島よりも双曲型周期点に近い側に存在したものの,  $m$  が偶数の島は, 第  $(m-1)$  層の島よりも双曲型周期点から遠い側に存在した. つまり, 階層が深くなるにつれて, 島の並び方は, ある場所に向かって近づきながら振動するような振る舞いを見せた.

さらに, 規則 I と規則 II を組合せて適用した記号列に対応する島に関しても, 似た傾向が見られた. つまり, 第  $m$  層の島に規則 I を適用すると, 島が (存在する場合は), 第  $m$  層を基準に第  $(m-1)$  層と反対側に位置し, 規則 II を適用すると, 島が (存在する場合は) 第  $m$  層を基準に第  $(m-1)$  層と同じ側に位置した. ただし,

Fig.20 に表したように, 四角形の 2 辺が必ずしも他の島の辺の延長線上に存在しない場合がある. また, 既に議論したように, そもそも対応する島が存在しない場合もある.

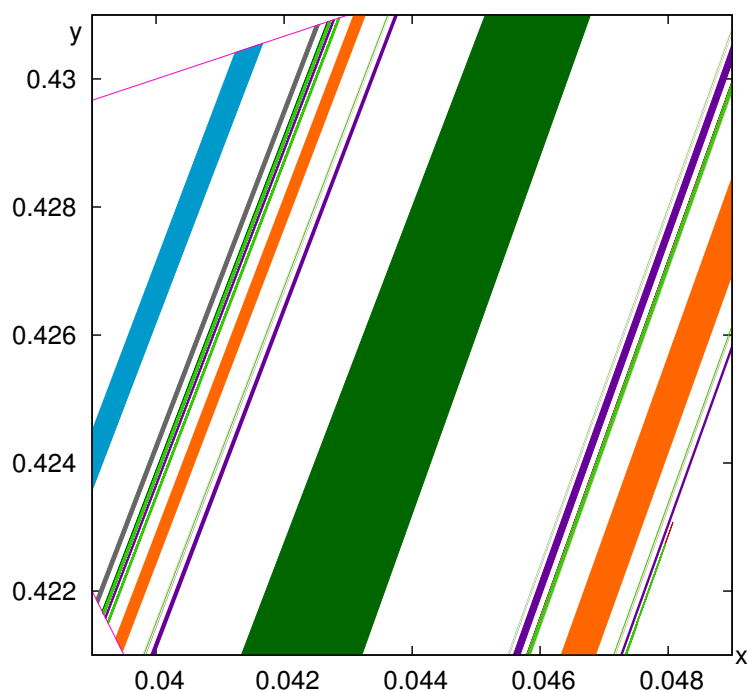


Fig.20 195 周期までの島を描き,  $A^2XAAC$  の島のまわりを拡大した様子.  $(0.048, 0.423)$  付近で, 島の辺が“途切れている”様子がわかる.

このように,  $A^2XAAC$  へ規則 I と規則 II を組合せて適用した記号列は, 一方の規則だけを繰り返し適用して得られる記号列に比べ, 相空間上の島の並び方も複雑になる. そこで, 単一の規則だけを繰り返し適用して得られる記号列についてより深く考察した. その結果, 最終的に島が無限に存在することを証明するに至った.

## 5 島が無限に存在することの証明

### 5.1 証明の概略

本章では,  $F$  が無限に島を作ることの証明する. 具体的な主張は次の通りである.

**Thm.5-1]** 任意の  $m = 1, 2, \dots$  に対して,  $F_{A^2(XA)^m AC^m}$  と  $F_{A^2 X^m A(AC)^m}$  が恒等写像となり, これらの定義域  $\overline{\mathcal{D}_{A^2(XA)^m AC^m}}$  と  $\overline{\mathcal{D}_{A^2 X^m A(AC)^m}}$  が正の測度を持つ.

つまり, 第 1 層の 33 周期の島  $\overline{\mathcal{D}_{A^2 X A A C}}$  を親として, 記号列に規則 I または規則 II のいずれかを任意回の繰返しを施して生み出される子が, 親が持つ 2 つの性質: 恒等写像であることと, 正の測度を持つことを受継いでいることを示せばよい. ここでは, 規則 I のみについて証明を行うが, 規則 II に関しても全く同様の議論によって示される.

写像  $F_{A^2(XA)^m AC^m}$  と  $F_{A^2 X^m A(AC)^m}$  の恒等性は, 比較的容易に得られる. ところが, これらの定義域が測度を失わないかどうかは容易ではない. 写像の定義域は, 式 (4.15) の通り, 帰納的に多角形領域の共通部分をとって定義される. 共通部分をとるべき多角形領域の個数は, 記号列の長さと同じであるから, 任意の  $m$  に対し, 第  $m$  層の写像の定義域は,  $(15 + 18m)$  個の多角形の共通部分であり, 容易に求められないのだ.

しかし, 記号列の階層性を用いれば, 第  $m$  層の写像の定義域をなす  $(15 + 18m)$  個の多角形と, 第  $(m + 1)$  層の定義域をなす  $(15 + 18(m + 1))$  個の多角形とを対応づけることができる. さらに, 記号列の置換えに対応する Affine 変換を用いれば, 第  $m$  層の多角形を定義する不等式群と, 第  $(m + 1)$  層のそれとを対応付けることができる. さらに, この対応付けに規則性を見出だすことで,  $(15 + 18m)$  個の多角形のうち, 島の形成に関与する本質的な 4 つだけを特定できる. それにより, 無数の不等式の中から, 島の四角形の辺をなす 4 つを見極め, 無限個の島の存在を, 有限回の手続きによって示すことを目指す.

ただし,  $(15 + 18m)$  個の多角形と,  $(15 + 18(m + 1))$  個の多角形の対応付けを確立したとしても, 共通部分をとったときに領域の測度を失わないことを確かめねばならないのだ. 確かに, 各々の多角形同士の対応付けにおいて用いているのは Affine 変換であり, 平面上の多角形を多角形にうつす性質, ひいては位置関係を保持性質を持っている. だが, 第  $m$  層の島を第  $(m + 1)$  層の島へ直接うつす変換を直接求めている訳ではない. 実際, 第  $m$  層の島をなす共通部分と, 第  $(m + 1)$  層の島をなす共通部分とで, 測度や辺のなす角度などは異なっており, そのような変換は Affine 変換ではない.

そこで, 共通部分をとる前に,  $m \rightarrow \infty$  の極限を考える. それは Affine 変換の無限回繰返しであり, Affine 変換の双曲性を用いることで, 島が集積する極限の存在とその性質を知ることができる. さらに, 第 1 層の島と, 第 2 層の島の存在を仮定に加えることで, 任意の階層において, 共通部分をとる操作によって島の測度が失われないことを確かめていく.

このような, 任意の階層の島と, 前の階層の島とを結ぶ一定の対応付けを見出したことが, 今回の証明の本質である. このことを, 証明の最後に, Thm.5-1] の主張をより強めた命題に対する反例を与えることによって考察する.

### 5.2 同次座標系を用いた, 写像の恒等性の証明

証明に向けた準備として,  $(2 + 1)$  次元の同次座標系を導入する.  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  の 3 次元の空間を考え, 同値関係  $\sim$  を

$$(5.1) \quad (x, y, z) \sim c(x, y, z) \quad \text{where } c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$



で導入する. すなわち, 定数倍して一致すれば同じ点とみなす. そのような点たちは  $\mathbb{R}^3$  の 1 次元直線上にあり, 平面  $z = -1$  との交点を考えることで, 元の 2 次元平面に戻る.

平面上の **Affine** 変換は, 3 次元空間上における線型変換として表現できるため, 議論が容易となる. つまり, 写像  $F$  の定義式は (4.1) であったから,  $s \in \Sigma = \{\mathbf{a}, \dots, \mathbf{f}\}$  として,  $\mathbf{x} \in \overline{\mathcal{D}_s}$  に対して

$$(5.2) \quad F_s \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} M_s & V_s \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix}$$

と表せる. なお, 行列表現が  $\begin{bmatrix} M & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$  であれば平面上の線型変換に,  $\begin{bmatrix} M & V \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$  であれば平面上の **Affine** 変換に,

$\begin{bmatrix} M & V \\ W & 1 \end{bmatrix}$  (ただし  $W$  は横 **vector**) であれば平面上の射影変換に, それぞれ対応する.

以下,  $\sigma = s_0 \dots s_{n-1}$ ,  $\tau = t_0 \dots t_{n-1}$  ( $s_i, t_i \in \Sigma = \{\mathbf{a}, \dots, \mathbf{f}\}$ ) をそれぞれ任意の記号列とする. 合成写像の線型変換部分を

$$(5.3) \quad M_\sigma := M_{s_{n-1}} \cdots M_{s_0}$$

と表し, 合成写像の平行移動部分を

$$(5.4) \quad V_\sigma := M_{s_{n-1}} (M_{s_{n-2}} (\cdots (M_{s_1} V_{s_0} + V_{s_1}) + \cdots) + V_{s_{n-2}}) + V_{s_{n-1}}$$

と表す.

**Lem.5-2]** 任意の  $\sigma \in \Sigma^*$  と任意の  $\tau \in \Sigma^*$  に対して, 以下が成立つ.

1. 合成写像の線型変換部分:  $M_{\sigma\tau} = M_\tau M_\sigma$
2. 合成写像の平行移動部分:  $V_{\sigma\tau} = M_\tau V_\sigma + V_\tau$
3. 合成写像:  $F_{\sigma\tau} \equiv F_\tau \circ F_\sigma$

**Proof]**

1. 行列の積は結合律が成立つので従う.
2.  $\tau$  が 1 字から成るときは, 定義より従う.  $\tau = t_0 t_1$  のとき,

$$(5.5) \quad V_{\sigma\tau} = M_{t_1} (M_{t_0} V_\sigma + V_{t_0}) + V_{t_1} = (M_{t_1} M_{t_0}) V_\sigma + (M_{t_1} V_{t_0} + V_{t_1}) = M_\tau V_\sigma + V_\tau.$$

3. 任意の  $\mathbf{x}$  に対して, 1, 2 より,

$$\begin{aligned} F_{\sigma\tau} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} M_{\sigma\tau} & V_{\sigma\tau} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} M_\tau M_\sigma & M_\tau V_\sigma + V_\tau \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} M_\tau & V_\tau \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_\sigma & V_\sigma \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

つぎに, 記号列の延長を定義し, 写像の合成とを対応づける.

**Def.]** (記号列に対する prefix/suffix operator)

記号空間  $\Sigma^*$  上で, prefix operator すなわち接頭辞  $\sigma$  を追加する作用  $L_\sigma$  を

$$(5.6) \quad L_\sigma(\tau) := \sigma\tau, \quad L_{\sigma^{-1}}(\sigma\tau) := L_\sigma^{-1}(\sigma\tau) = \tau$$



とし, **suffix operator** すなわち接尾辞  $\tau$  を追加する作用  $R_\tau$  を

$$(5.7) \quad R_\tau(\sigma) := \sigma\tau, \quad R_{\tau^{-1}}(\sigma\tau) := R_\tau^{-1}(\sigma\tau) = \sigma$$

とおく. ただし,  $\sigma$  で始まらない記号列  $\tau$  に対する  $L_\sigma^{-1}(\tau)$ , ならびに  $\tau$  で終わらない記号列  $\sigma$  に対する  $R_\tau^{-1}(\sigma)$  は未定義とする.

(5.6) と (5.7) の式だけを見ると, 例えば  $L_\sigma^{-1} \equiv R_\sigma$  のように見えるかもしれないが, 全く正しくないことに注意する.

**Def.] (写像に対する prefix/suffix operator)**

これらの作用は, 相空間上の写像に対する作用として,

$$(5.8) \quad L_\sigma(M_\tau) := M_{L_\sigma(\tau)} = M_\tau M_\sigma, \quad L_\sigma(V_\tau) := V_{L_\sigma(\tau)} = M_\tau V_\sigma + V_\tau,$$

$$(5.9) \quad R_\tau(M_\sigma) := M_{R_\tau(\sigma)} = M_\tau M_\sigma, \quad R_\tau(V_\sigma) := V_{R_\tau(\sigma)} = M_\tau V_\sigma + V_\tau,$$

$$(5.10) \quad L_\sigma(F_\tau) := F_{L_\sigma(\tau)} = F_\tau \circ F_\sigma, \quad R_\tau(F_\sigma) := F_{R_\tau(\sigma)} \equiv F_\tau \circ F_\sigma$$

のように, 自然に拡張できる.

この作用を用いると, 望んでいる **Thm.5-1]** の前半は

**Thm.5-3]**  $R_C \circ L_{A^2XA^{-1}}$  と  $R_{AC} \circ L_{A^2XA^{-2}}$  の任意の 組合せ から成る作用は, 写像  $F_{A^2XAAC}$  を不変に保つ.

を示せば得られる. なぜなら,

$$(5.11) \quad (R_C \circ L_{A^2XA^{-1}})^m (A^2XAAC) = A(AX)^m AAC^m = A^2(XA)^m AC^m$$

$$(5.12) \quad (R_{AC} \circ L_{A^2XA^{-2}})^m (A^2XAAC) = A^2X^m A(AC)^m$$

であるからだ. そして **Thm.5-1]** の後半は

**Thm.5-4]**  $R_C \circ L_{A^2XA^{-1}}$  または  $R_{AC} \circ L_{A^2XA^{-2}}$  どちらかだけの, 任意回数の 反復 から成る作用は, 写像  $F_{A^2XAAC}$  の定義域に対して測度を失わせない.

である. これからこの 2 つの定理を順番に示すが, **Thm.5-3]** では, 元の **Thm.5-1]** の前半での主張を強めているのに対し, **Thm.5-4]** は **Thm.5-1]** の後半そのままである点に注意したい.

まず **Thm.5-3]** のための補題を示す.

**Lem.5-5]**  $F_{A^3} = \text{id}$ ,  $F_{AAXAAC} = \text{id}$

**Proof]**  $M_{A^3} = M_{AAXAAC} = I$  と  $V_{A^3} = V_{AAXAAC} = \mathbf{0}$  が, 成分の具体的な値を計算することにより確かめられる. ■

この **Lem.5-5]** よりただちに

$$\text{Cor.5-6]} \quad M_{A^2} = M_A^{-1}, \quad V_{A^2} = -V_A, \quad M_A = M_{XAAC}, \quad V_A = V_{XAAC}$$

も得られる. その結果, **Thm.5-3]** も従う.

**Proof]** (**Thm.5-3]**)

**Cor.5-6]** より,  $R_C \circ L_{A^2XA^{-1}}(F_{A^3}) \equiv R_{AC} \circ L_{A^2XA^{-2}}(F_{A^3}) \equiv F_{A^2XAAC} \equiv \text{id}$ . ■

ここまでは容易である.

しかし, まだ記号列を置換えた写像が恒等であるかどうかを議論したに過ぎず, そもそも写像が定義域を持たなければ何の意味もない. 実際, Thm.5-3] で主張したのは,  $R_C \circ L_{A^2XA^{-1}}$  と  $R_{AC} \circ L_{A^2XA^{-2}}$  の任意の組合せであり, 例えば, 定義域となる島が存在しないような記号列

$$(5.13) \quad (R_{AC} \circ L_{A^2XA^{-2}} \circ R_C \circ L_{A^2XA^{-1}})^2 (A^2XAAC) = A^2(X(XA))^2(XA)AC(C(AC))^2$$

に関しても, 対応する写像だけを考えれば恒等になるのである. そこで, 写像の定義域を規定する線型不等式を, 詳しく考察する.

### 5.3 線型不等式を用いた, 写像の定義域が正の測度を持つことの証明

ここから Thm.5-4] の証明を目指していく. まず, 1 つの補題を述べる.

Lem.5-7] “記号列の延長による領域の分割” という手続きは結合的である.

Proof]  $\sigma = s_0 \cdots s_{n-1}$ ,  $\tau = t_0 \cdots t_{n-1}$  とおくと, 式 (4.15) と Lem.5-2] より,

$$(5.14) \quad \{x \mid F_\sigma(x) \in \mathcal{D}_\tau\} = \left\{ x \mid \begin{array}{l} F_\sigma(x) \in \mathcal{D}_{t_0} \\ F_{t_0} \circ F_\sigma(x) \in \mathcal{D}_{t_1} \\ \vdots \\ F_{t_0 \cdots t_{n-2}} \circ F_\sigma(x) \in \mathcal{D}_{t_{n-1}} \end{array} \right\}$$

であるから,

$$(5.15) \quad \begin{aligned} \mathcal{D}_{\sigma\tau} &= \left\{ x \mid \begin{array}{l} x \in \mathcal{D}_{s_0} \\ F_{s_0}(x) \in \mathcal{D}_{s_1} \\ \vdots \\ F_{s_0 \cdots s_{n-2}}(x) \in \mathcal{D}_{s_{n-1}} \\ F_\sigma(x) \in \mathcal{D}_{t_0} \\ F_{t_0} \circ F_\sigma(x) \in \mathcal{D}_{t_1} \\ \vdots \\ F_{t_0 \cdots t_{n-2}} \circ F_\sigma(x) \in \mathcal{D}_{t_{n-1}} \end{array} \right\} \\ &= \left\{ x \mid \begin{array}{l} x \in \mathcal{D}_{s_0} \\ F_{s_0}(x) \in \mathcal{D}_{s_1} \\ \vdots \\ F_{s_0 \cdots s_{n-2}}(x) \in \mathcal{D}_{s_{n-1}} \end{array} \right\} \cap \left\{ x \mid \begin{array}{l} F_\sigma(x) \in \mathcal{D}_{t_0} \\ F_{t_0} \circ F_\sigma(x) \in \mathcal{D}_{t_1} \\ \vdots \\ F_{t_0 \cdots t_{n-2}} \circ F_\sigma(x) \in \mathcal{D}_{t_{n-1}} \end{array} \right\} \\ &= \mathcal{D}_\sigma \cap \{x \mid F_\sigma(x) \in \mathcal{D}_\tau\} \end{aligned}$$

が成り立つ. ■

Def.] (記号に対応する領域を定義する不等式)

領域に点が含まれることを, 具体的に定式化する.  $s_0 \in \Sigma$  とする. Affine 写像  $F_{s_0}$  の定義域  $\mathcal{D}_{s_0}$  は  $p$  個の辺を持つ多角形だから,  $p$  個の不等式

$$(5.16) \quad \left\{ J_{s_0}^{(1)} \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} > 0, \dots, J_{s_0}^{(p)} \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} > 0 \right\}$$

で表せる. それぞれの不等式は, 整数成分の 3 次元横 vector  $J_{s_0}^{(k)}$  を用いて書く. たとえば,

$$(5.17) \quad \mathcal{D}_e = \left\{ \mathbf{x} \mid \begin{array}{l} (2 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} > 0, (-4 \ 12 \ -3) \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} > 0, (-2 \ 0 \ -1) \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} > 0, \\ (0 \ -2 \ 1) \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} > 0, (4 \ -12 \ 7) \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} > 0 \end{array} \right\}$$

であるから,  $J_e^{(1)} = (2 \ 0 \ 1), \dots, J_e^{(5)} = (4 \ -12 \ 7)$  などと書ける. 添字  $k = 1, \dots, p$  は任意に決めてよいが, 今この時点で Table 3 の通りに固定する.

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$
$J_f^{(k)}$	$(2 \ 0 \ 1)$	$(-4 \ 12 \ -7)$	$(0 \ -2 \ 1)$		
$J_e^{(k)}$	$(2 \ 0 \ 1)$	$(-4 \ 12 \ -3)$	$(-2 \ 0 \ 1)$	$(0 \ -2 \ 1)$	$(4 \ -12 \ 7)$
$J_d^{(k)}$	$(2 \ 0 \ 1)$	$(0 \ 1 \ 0)$	$(-4 \ 12 \ 1)$	$(-2 \ 0 \ 1)$	$(4 \ -12 \ 3)$
$J_c^{(k)}$	$(4 \ -12 \ -1)$	$(0 \ 1 \ 0)$	$(-2 \ 0 \ 1)$		
$J_b^{(k)}$	$(2 \ 0 \ 1)$	$(0 \ 2 \ 1)$	$(-4 \ 4 \ 1)$	$(0 \ -1 \ 0)$	
$J_a^{(k)}$	$(4 \ -4 \ -1)$	$(0 \ 2 \ 1)$	$(-2 \ 0 \ 1)$	$(0 \ -1 \ 0)$	

Table 3 不等式の係数を表す vector.

Def.] (記号列に対応する領域を定義する不等式)

次に,  $F_{s_0 s_1} = F_{s_1} \circ F_{s_0}$  の定義域  $\mathcal{D}_{s_0 s_1}$  を考える. 定義域  $\mathcal{D}_{s_0 s_1}$  は

$$(5.18) \quad \mathcal{D}_{s_0 s_1} = \mathcal{D}_{s_0} \cap \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid F_{s_0}(\mathbf{x}) \in \mathcal{D}_{s_1} \}$$

で定義される. ここで  $\mathcal{D}_{s_0 s_1}$  を定めるにあたって,  $F_{s_0}$  の定義域を, 本来の  $\overline{\mathcal{D}_{s_0}}$  から  $\mathbb{R}^2$  に拡張した. いま,  $q$  を多角形領域  $\mathcal{D}_{s_1}$  の辺の数として, 不等式  $J_{s_0 s_1}^{(1)}, \dots, J_{s_0 s_1}^{(q)}$  を

$$(5.19) \quad \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid J_{s_0 s_1}^{(1)} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} > 0, \dots, J_{s_0 s_1}^{(q)} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} > 0 \right\} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid F_{s_0}(\mathbf{x}) \in \mathcal{D}_{s_1} \}$$

が成立つように定義する (Fig.21). そのためには

$$(5.20) \quad J_{s_0 s_1}^{(l)} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} := J_{s_1}^{(l)} F_{s_0} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} = J_{s_1}^{(l)} \begin{bmatrix} M_{s_0} & V_{s_0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} > 0$$

とすればよい. すると,

$$(5.21) \quad \mathcal{D}_{s_0 s_1} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid J_{s_0}^{(1)} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} > 0, \dots, J_{s_0}^{(p)} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} > 0, J_{s_0 s_1}^{(1)} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} > 0, \dots, J_{s_0 s_1}^{(q)} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} > 0 \right\}$$

となる. 同様にして, 任意の記号列に対する領域を

$$(5.22) \quad \mathcal{D}_{\sigma_n s_n} = \mathcal{D}_{\sigma_n} \cap \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid F_{\sigma_n}(\mathbf{x}) \in \mathcal{D}_{s_n} \}$$

として順番に定義する.

このようにすると, 不等式に関しても, 任意の部分で記号列を分割して計算できる.

Lem.5-8] 任意の  $\sigma, \tau \in \Sigma^*$  に対して,  $\tau = \tau_n t_n$  のとき,  $\mathcal{D}_{t_n}$  の辺の番号を  $l = 1, \dots, q$  とすると,

$$(5.23) \quad J_{\sigma\tau}^{(l)} = J_{\tau}^{(l)} \begin{bmatrix} M_{\sigma} & V_{\sigma} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

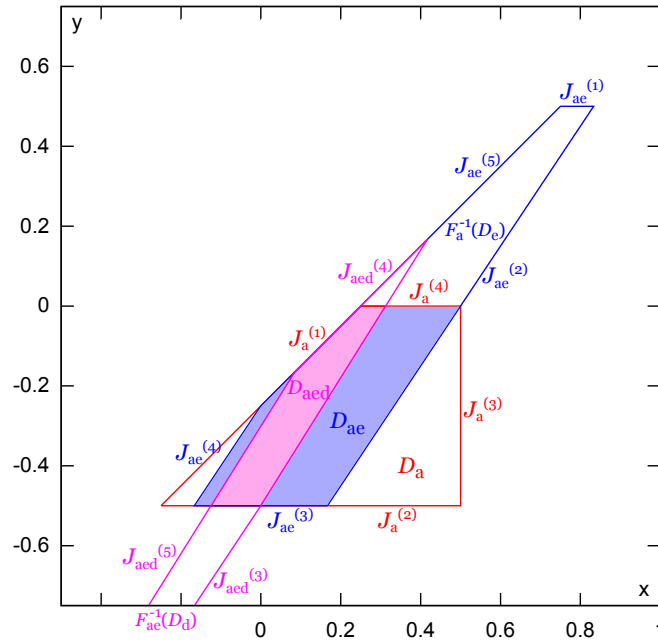


Fig.21  $\mathbb{R}^2$  上で、領域が切り分けられていく様子. 桃色で塗りつぶした  $\mathcal{D}_{aed}$  と、不等式  $J_a^{(1)\top}(\mathbf{x}, -1) > 0, \dots, J_a^{(4)\top}(\mathbf{x}, -1) > 0, J_{ae}^{(1)\top}(\mathbf{x}, -1) > 0, \dots, J_{ae}^{(5)\top}(\mathbf{x}, -1) > 0, J_{aed}^{(1)\top}(\mathbf{x}, -1) > 0, \dots, J_{aed}^{(5)\top}(\mathbf{x}, -1) > 0$  の関係 ( $J_a^{(1)}, J_a^{(2)}$  の定める直線は描画範囲外にある). まず  $J_a^{(1)}, \dots, J_a^{(5)}$  は,  $F_a^{-1}(\mathcal{D}_e)$  の辺を定め,  $\mathcal{D}_a$  との共通部分をとることで,  $\mathcal{D}_{ae}$  (水色または桃色で塗りつぶした領域) が出来上がる. 最終的に五角形  $\mathcal{D}_{ae}$  の辺をなすのは,  $J_a^{(4)}, J_{ae}^{(2)}, J_{ae}^{(3)}, J_{ae}^{(4)}, J_a^{(1)} = J_{ae}^{(5)}$  がつくる直線である.  $\mathcal{D}_{ead}$  の形成過程についても同様である.

**Proof]**  $\tau$  が 1 字のときは定義から従う.  $(n+1)$  字のとき,

$$(5.24) \quad J_\tau^{(l)} = J_{t_n}^{(l)} \begin{bmatrix} M_{\tau_n} & V_{\tau_n} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

であり, Lem.5-2] より

$$(5.25) \quad J_{\sigma\tau}^{(l)} = J_{t_n}^{(l)} \begin{bmatrix} M_{\sigma\tau_n} & V_{\sigma\tau_n} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = J_{t_n}^{(l)} \begin{bmatrix} M_{\tau_n} & V_{\tau_n} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_\sigma & V_\sigma \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = J_\tau^{(l)} \begin{bmatrix} M_\sigma & V_\sigma \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}. \blacksquare$$

Thm.5-4] を示すためには、島の領域  $\mathcal{D}_\sigma$  に対する,  $L, R$  の作用を定義する必要がある.  $L$  については Lem.5-8] よりすぐに得られる.

**Cor.5-9]** 領域を定義するような任意の不等式  $J_\tau^{(l)}$  に対して,

$$(5.26) \quad L_\sigma(J_\tau^{(l)}) = J_{\sigma\tau}^{(l)}$$

を満たすような変換  $L_\sigma$  の表現となる行列は,  $\begin{bmatrix} M_\sigma & V_\sigma \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$  である. また, 任意の不等式  $J_{\sigma\tau}^{(l)}$  に対して,

$$(5.27) \quad L_{\sigma^{-1}}(J_{\sigma\tau}^{(l)}) = J_\tau^{(l)}$$

を満たすような逆変換  $L_{\sigma^{-1}} = L_\sigma^{-1}$  の表現となる行列は,  $\begin{bmatrix} M_\sigma^{-1} & -M_\sigma^{-1}V_\sigma \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$  である.

**Proof]** 任意の  $\sigma, \tau \in \Sigma^*$  と任意の  $l$  に対し, **Lem.5-8]** が成立つ.  $M_\sigma$  は可逆であるから,

$$(5.28) \quad J_\tau^{(l)} = J_{\sigma\tau}^{(l)} \begin{bmatrix} M_\sigma & V_\sigma \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}^{-1} = J_{\sigma\tau}^{(l)} \begin{bmatrix} M_\sigma^{-1} & -M_\sigma^{-1}V_\sigma \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

も成立つ. ■

しかし, 任意の記号列  $\sigma$  に対し,

$$(5.29) \quad R_\tau^{(k \rightarrow l)}(J_\sigma^{(k)}) = J_{\sigma\tau}^{(l)}$$

を満たすような  $R$  の表現については, それほど簡単にはいかない. たとえすべての  $k \rightarrow l$  の組合せを列挙したとしてもである.

また別の問題もある. いま, 領域に対して, 関係式:

$$(5.30) \quad R_\tau(\mathcal{D}_\sigma) = L_\sigma(\mathcal{D}_\tau) = \mathcal{D}_{\sigma\tau}$$

が成立つような  $R$  と  $L$  の作用を定義したいのである. ところが, そのような領域の合成は **Lem.5-7]** より

$$(5.31) \quad \mathcal{D}_{\sigma\tau} = \mathcal{D}_\sigma \cap \{\mathbf{x} \mid F_\sigma \mathbf{x} \in \mathcal{D}_\tau\} \subset \left\{ \mathbf{x} \mid L_\sigma \left( J_\tau^{(1)} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} > 0, \dots, L_\sigma \left( J_\tau^{(q)} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} > 0 \right\}$$

を満たすのだから,  $L(J)$  や  $R(J)$  を計算できたとしても, すべての不等式の共通部分を取り, どの不等式が領域の辺をなしていて, どの不等式が無駄なのかを判断せねばならない.

ここからの目標は, これらの問題にうまく対応して,

$$(5.32) \quad (R_C \circ L_{A^2XA^{-1}})^m(\mathcal{D}_{A^2XAAC}) = \mathcal{D}_{A^2(XA)^mAC^m}$$

$$(5.33) \quad (R_{AC} \circ L_{A^2XA^{-2}})^m(\mathcal{D}_{A^2XAAC}) = \mathcal{D}_{A^2X^m A(AC)^m}$$

が正の測度を持つことを示すことである. なお, 記号列や写像に対する作用としての  $L$  と  $R$  は可換

$$(5.34) \quad R_\tau \circ L_\rho(\sigma) = L_\rho \circ R_\tau(\sigma), \quad R_\tau \circ L_\rho(F_\sigma) = L_\rho \circ R_\tau(F_\sigma)$$

であったが, これ以後 (5.30) の式のように領域への作用を考えていく場合には, 一般に非可換となる. 第 3 層までの島の辺をなす不等式を具体的に計算すると, **Table 4, Table 5** のようになる. そして, 相空間上での並び方は **Fig.19** のようになる. この計算結果から, ただちに **Table 6, Table 7** のような予想を得る.

**Table 6, Table 7** の不等式 (そして領域の頂点) の正確な値は, **Cor.5-9]** より,  $L_{A^2XA^{-1}}$  と  $L_{A^2XA^{-2}}$  の行列表現を用いれば, それぞれ得られる. そこでいま明らかにせねばならないのは, **Table 6, Table 7** の不等式が本当に領域の辺をなし, 無駄な式でないかどうかの確認である. したがって, **Thm.5-4]** で示すべき問題は次のように表される.

**Prop.5-10]** **Table 6, Table 7** に示した不等式が定める四角形が, それぞれ  $\mathcal{D}_{A^2(XA)^mAC^m}$ ,  $\mathcal{D}_{A^2X^m A(AC)^m}$  に一致する.

まず, 証明の流れを記す.  $\mathcal{D}_{A^2(XA)^mAC^m}$  についてのみ具体的な証明を記すが,  $\mathcal{D}_{A^2X^m A(AC)^m}$  についてもほぼ同様にして示される.

1. 第 1 層の島  $\mathcal{D}_{A^2XAAC}$  の辺をなす不等式を求める.

島	辺の不等式の係数			
$A^2XAAC$	$J_{ea}^{(4)}$	$J_{Aea}^{(4)}$	$J_{A^2X_{eae}}^{(2)}$	$J_{A^2XA_{eae}}^{(2)}$
$A^2(XA)^2AC^2$	$J_{ea}^{(4)}$	$J_{Aea}^{(4)}$	$J_{A(AX)^2_{eae}}^{(2)}$	$J_{A^2(XA)^2_{eae}}^{(2)}$
$A^2(XA)^3AC^3$	$J_{ea}^{(4)}$	$J_{Aea}^{(4)}$	$J_{A(AX)^3_{eae}}^{(2)}$	$J_{A^2(XA)^3_{eae}}^{(2)}$

Table 4  $A^2(XA)^m AC^m$  ( $m \leq 3$ ) の辺をなす不等式. 各行の始めの 2 辺  $J_{ea}^{(4)}, J_{Aea}^{(4)}$  と, 後の 2 辺  $J_{A(AX)^m_{eae}}^{(2)}, J_{A^2(XA)^m_{eae}}^{(2)}$  が, 四角形の向い合う 2 辺をなす.

島	辺の不等式の係数			
$A^2XAAC$	$J_{ea}^{(4)}$	$J_{Aea}^{(4)}$	$J_{A^2X_{eae}}^{(2)}$	$J_{A^2XA_{eae}}^{(2)}$
$A^2X^2A(AC)^2$	$J_{ea}^{(4)}$	$J_{Aea}^{(4)}$	$J_{A^2X^2_{eae}}^{(2)}$	$J_{A^2X^2A_{eae}}^{(2)}$
$A^2X^3A(AC)^3$	$J_{ea}^{(4)}$	$J_{Aea}^{(4)}$	$J_{A^2X^3_{eae}}^{(2)}$	$J_{A^2X^3A_{eae}}^{(2)}$

Table 5  $A^2X^mA(AC)^m$  ( $m \leq 3$ ) の辺をなす不等式. 各行の始めの 2 辺  $J_{ea}^{(4)}, J_{Aea}^{(4)}$  と, 後の 2 辺  $J_{A^2X^m_{eae}}^{(2)}, J_{A^2X^mA_{eae}}^{(2)}$  が, 四角形の向い合う 2 辺をなす.

島	辺の不等式の係数			
$A^2(XA)^m AC^m$	$J_{ea}^{(4)}$	$J_{Aea}^{(4)}$	$J_{A(AX)^m_{eae}}^{(2)}$	$J_{A^2(XA)^m_{eae}}^{(2)}$

Table 6 一般の  $m$  について,  $A^2(XA)^m AAC^m$  の辺をなすと予想される不等式

島	辺の不等式の係数			
$A^2X^mA(AC)^m$	$J_{ea}^{(4)}$	$J_{Aea}^{(4)}$	$J_{A^2X^m_{eae}}^{(2)}$	$J_{A^2X^mA_{eae}}^{(2)}$

Table 7 一般の  $m$  について,  $A^2X^mA(AC)^m$  の辺をなすと予想される不等式

- (Lem.5-11) 第  $m$  層の島  $\mathcal{D}_{A^2(XA)^m AC^m}$  を定義する不等式と, 第  $(m+1)$  層の島  $\mathcal{D}_{A^2(XA)^{m+1} AC^{m+1}}$  を定義する不等式を,  $m$  によらない一定の Affine 変換  $F_{A^2XAA}$  を用いて対応付ける. それにより, 第  $m$  層の島を  $(2m+2)$  個の多角形領域の共通部分として表現する.
- (Lem.5-12) 領域に対する無限回の Affine 変換  $\lim_{m \rightarrow \infty} F_{A^2XAA}$  の極限が存在することを確認する.
- (Lem.5-13) 極限の存在を用いて,  $(2m+2)$  個の多角形領域それぞれを定義する不等式のうち, 各々の多角形領域の辺をなす本質的な不等式を見極める. さらに,  $(2m+2)$  個の多角形領域全ての共通部分についても, 辺をなす本質的な不等式を特定する. これにより, 第  $m$  層の島を 3 つの多角形領域の共通部分として表現する.
- (Prop.5-10) 3 つの多角形領域の共通部分をとったときに辺をなす不等式, すなわち島の辺をなす 4 つの不等式を得る.

第 1 層の島の辺をなす不等式は既に得られているので, 第  $m$  層の島を定義する不等式を求めていく. 記号列 “ $A^2XAAC$ ” と “ $A^2(XA)^2AC^2$ ” の先頭の 28 文字分

$$(5.35) \quad A^2XAea = (eaead)^2 ead eaead ead eaead ea$$

は共通であるから,  $\mathcal{D}_{A^2XAAC}$  を定義する不等式群のうちいくつかは  $\mathcal{D}_{A^2(XA)^2AC^2}$  のそれと共通である. しかし,  $n \geq 29$  に対し, “ $A^2XAAC$ ” の先頭の  $n$  文字  $\sigma_n$  と, “ $A^2(XA)^2AC^2$ ” の先頭の  $n$  文字  $\tau_n$  が異なる. だからこの  $\sigma_n$  について,  $\mathcal{D}_{A^2XAAC}$  を定義する不等式である  $J_{\sigma_n}^{(k)} \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} > 0$  は,  $\mathcal{D}_{A^2(XA)^2AC^2}$  を定義する不等式になるとは限らない. したがって,  $\mathcal{D}_{A^2XAAC}$  を定義する不等式と,  $\mathcal{D}_{A^2(XA)^2AC^2}$  を定義する不等式との関係を, 記号列ごと

に細かく調べる必要がある.

以下の図式 (5.36), (5.37) を描くことが, これからの証明における基本的な idea である.

$$\begin{array}{ccccccc}
 e & \xrightarrow{R_{\text{aead}}} & A & \xrightarrow{R_e} & Ae & \xrightarrow{R_{\text{aeadXAAc}}} & \boxed{A^2XAAc} \\
 & & & & \downarrow L_{A^2XA-1} & & \downarrow L_{A^2XA-1} \\
 (5.36) \quad e & \xrightarrow{R_{\text{aeade}}} & Ae & \xrightarrow{R_{\text{aeadXe}}} & A^2Xe & \xrightarrow{R_{\text{aeadXAAc}}} & A^2(XA)^2AC \xrightarrow{R_C} \boxed{A^2(XA)^2AC^2} \\
 & & \downarrow L_{A^2XA-1} & & \downarrow L_{A^2XA-1} & & \downarrow L_{A^2XA-1} \\
 e & \xrightarrow{R_{\text{aeadAXe}}} & A^2Xe & \xrightarrow{R_{\text{aeadXe}}} & A(AX)^2e & \xrightarrow{R_{\text{aeadXAAc}}} & A^2(XA)^3AC \xrightarrow{R_C} A^2(XA)^3AC^2 \xrightarrow{R_C} \boxed{A^2(XA)^3AC^3}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 e & \xrightarrow{R_{\text{aeadA}}} & A^2 & \xrightarrow{R_e} & A^2e & \xrightarrow{R_{\text{adABAAC}}} & \boxed{A^2XAAc} \\
 & & & & \downarrow L_{A^2XA-2} & & \downarrow L_{A^2XA-2} \\
 (5.37) \quad e & \xrightarrow{R_{\text{aeadAe}}} & A^2e & \xrightarrow{R_{\text{aeadXe}}} & A^2Xe & \xrightarrow{R_{\text{adABAAC}}} & A^2X^2AAC \xrightarrow{R_{AC}} \boxed{A^2X^2A(AC)^2} \\
 & & \downarrow L_{A^2XA-2} & & \downarrow L_{A^2XA-2} & & \downarrow L_{A^2XA-2} \\
 e & \xrightarrow{R_{\text{aeadAXe}}} & A^2Xe & \xrightarrow{R_{\text{adABe}}} & A^2X^2e & \xrightarrow{R_{\text{adABAAC}}} & A^2X^3AAC \xrightarrow{R_{AC}} A^2X^3A(AC)^2 \xrightarrow{R_{AC}} \boxed{A^2X^3A(AC)^3}
 \end{array}$$

まず横方向に注目しよう.  $m$  段目が, それぞれ第  $m$  層の島を定義する不等式群の記号列である. 各段とも, 本当は

$$(5.38) \quad e \xrightarrow{R_a} ea \xrightarrow{R_e} eae \xrightarrow{R_a} eaea \xrightarrow{R_d} A \xrightarrow{R_e} \dots$$

と, 1 文字ずつ増やしてゆくのだが, 紙面の都合上で, 代表的な記号列のみ記している. 右端の囲みの記号列が島に対応する. 左端が元の (1 倍) 写像の定義域 (4.4) であり, 右に進んで文字数が増えるごとに, 対応する領域の定義域が式 (4.15) に従って細かくなっていく. すなわち,

$$(5.39) \quad \mathcal{D}_e \supseteq \mathcal{D}_{ea} \supseteq \mathcal{D}_{eae} \supseteq \mathcal{D}_{eaea} \supseteq \mathcal{D}_A \supseteq \dots$$

となる.

次に縦方向に注目する. 矢印で結んでいる部分は, 第  $m$  層の記号列の前半を **prefix operator**  $L$  で置換えることにより, 第  $(m+1)$  層の記号列に対応付けられる部分である. だからこの部分では, **Cor.5-9**] によって, 第  $m$  層の記号列に対応する不等式  $J_\sigma^{(k)}$  も  $L$  によりうつしたとき, 第  $(m+1)$  層の島を定義する不等式となるかどうかを検証する.

しかし, 縦方向と違って横方向は, **suffix operator**  $R$  による対応付けであり, 式 (5.29) を満たすような  $R$  の表現は得られていないままである. しかも  $R$  に対応する記号列はばらばらである.

ところが, 規則的な記号列の階層性を用いれば,  $R$  を用いる必要はなくなり, 次の補題が得られる.

**Lem.5-11]** 第  $m$  層の島は次のように表せる.

$$\begin{aligned}
 (5.40) \quad \mathcal{D}_{A^2(XA)^m AC^m} = \mathcal{D}_{A^2ea} & \cap \left( \bigcap_{i=0}^{m-1} (L_{A^2XA-1}^i(F_{A^2ea}))^{-1} (\mathcal{D}_{\text{dABAea}}) \cap (L_{A^2XA-1}^i(F_{A^2XAA}))^{-1} (\mathcal{D}_C) \right) \\
 & \cap \left( L_{A^2XA-1}^m(F_{A^2ea}) \right)^{-1} (\mathcal{D}_{\text{ead}})
 \end{aligned}$$

**Proof]** 1 段目の記号列に対応する不等式を満たすような点全体が, 第 1 層の島  $\mathcal{D}_{A^2XAAC}$  の定義であった.

$$(5.41) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}_{A^2XAAC}, \forall \sigma \in \{\mathbf{e}, \mathbf{ea}, \dots, \mathbf{eaea}, \mathbf{A}, \mathbf{Ae}, \dots, \mathbf{A^2XAAe}, \mathbf{A^2XAAC}\}, \forall k, J_{\sigma}^{(k)} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} > 0$$

したがって,

$$(5.42) \quad \begin{aligned} \mathcal{D}_{A^2XAAC} &= \mathcal{D}_{A^2ea} \cap \left\{ \mathbf{x} \left| \begin{array}{ccc} J_{A^2ead}^{(1)} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} > 0 & J_{A^2eade}^{(1)} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} > 0 & J_{A^2XAea}^{(1)} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} > 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ J_{A^2ead}^{(5)} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} > 0 & J_{A^2eade}^{(5)} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} > 0 & J_{A^2XAea}^{(4)} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} > 0 \end{array} \right\} \\ &\cap \left\{ \mathbf{x} \left| \begin{array}{ccc} J_{A^2XAeae}^{(1)} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} > 0 & J_{A^2XAeaea}^{(1)} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} > 0 & J_{A^2XAA}^{(1)} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} > 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ J_{A^2XAeae}^{(5)} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} > 0 & J_{A^2XAeaea}^{(4)} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} > 0 & J_{A^2XAA}^{(5)} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} > 0 \end{array} \right\} \\ &\cap \left\{ \mathbf{x} \left| \begin{array}{cc} J_{A^2XAAe}^{(1)} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} > 0 & J_{A^2XAAC}^{(1)} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} > 0 \\ \vdots & \vdots \\ J_{A^2XAAe}^{(5)} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} > 0 & J_{A^2XAAC}^{(3)} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} > 0 \end{array} \right\} \\ &= \mathcal{D}_{A^2ea} \cap \{ \mathbf{x} \mid F_{A^2ea}(\mathbf{x}) \in \mathcal{D}_{dABAea} \} \\ &\quad \cap \{ \mathbf{x} \mid F_{A^2XAea}(\mathbf{x}) \in \mathcal{D}_{ead} \} \\ &\quad \cap \{ \mathbf{x} \mid F_{A^2XAA}(\mathbf{x}) \in \mathcal{D}_C \} \\ &= \mathcal{D}_{A^2ea} \cap F_{A^2ea}^{-1}(\mathcal{D}_{dABAea}) \cap F_{A^2XAea}^{-1}(\mathcal{D}_{ead}) \cap F_{A^2XAA}^{-1}(\mathcal{D}_C) \\ &= \mathcal{D}_{A^2ea} \cap F_{A^2ea}^{-1}(\mathcal{D}_{dABAea}) \cap (\mathbf{L}_{A^2XA}^{-1}(F_{A^2ea}))^{-1}(\mathcal{D}_{ead}) \cap F_{A^2XAA}^{-1}(\mathcal{D}_C) \end{aligned}$$

となる. 不等式  $J_{\sigma}^{(k)}$  の添字  $k$  が走る範囲は, 式 (5.19) の定義からわかるように,  $\sigma$  の最後の文字に依存することに注意したい.

第  $(m+1)$  層の島に関しては, 次の 3 つの事実を用いる. 実際に **Lem.5-11]** の証明に必要となるのは 3 番目の事実だけであるが, 第  $m$  層の島と第  $(m+1)$  層の島の関係を理解するために全て記述する.

**事実 1** 第  $(m+1)$  層の島の点はすべて,  $(m+1)$  段目の序盤の記号列  $\mathbf{e}, \dots, \mathbf{A^2(XA)^m ea}$  に対応する不等式を満たす. これらの記号列  $\mathbf{e}, \dots, \mathbf{A^2(XA)^m ea}$  は,  $m$  段目にも現れるから, 次が成立つ.

$$(5.43) \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}_{A^2(XA)^{m+1}AC^{m+1}}, \forall \alpha \in \{\mathbf{e}, \dots, \mathbf{A^2(XA)^m ea}\}, \forall k, J_{\alpha}^{(k)} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ -1 \end{pmatrix} > 0$$

**事実 2** 第  $(m+1)$  層の島の点はすべて,  $(m+1)$  段目の中盤の記号列  $\mathbf{A^2Xe}, \dots, \mathbf{A^2(XA)^{m+1}AC^m}$  に対応する不等式も満たす.

$$(5.44) \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}_{A^2(XA)^{m+1}AC^{m+1}}, \forall \sigma \in \{\mathbf{A^2Xe}, \dots, \mathbf{A^2(XA)^{m+1}AC^m}\}, \forall k, J_{\sigma}^{(k)} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ -1 \end{pmatrix} > 0$$

ここで, 記号列  $\mathbf{A^2Xe}, \dots, \mathbf{A^2(XA)^{m+1}AC^m}$  は,  $m$  段目の記号列  $\mathbf{Ae}, \dots, \mathbf{A^2(XA)^m AC^m}$  を  $\mathbf{L}_{A^2XA}^{-1}$  でうつしたものであるから, 次が成立つ.

$$(5.45) \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}_{A^2(XA)^{m+1}AC^{m+1}}, \forall \beta \in \{\mathbf{Ae}, \dots, \mathbf{A^2(XA)^m AC^m}\}, \forall k, \left( \mathbf{L}_{A^2XA}^{-1} \left( J_{\beta}^{(k)} \right) \right) \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ -1 \end{pmatrix} > 0$$

**事実 3** 第  $(m+1)$  層の島の点はすべて,  $(m+1)$  段目の終盤の記号列  $\mathbf{A^2(XA)^{m+1}AC^m e}, \mathbf{A^2(XA)^{m+1}AC^{m+1}}$  に対応する不等式も満たす.

$$(5.46) \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}_{A^2(XA)^{m+1}AC^{m+1}}, \forall \sigma \in \{\mathbf{A^2(XA)^{m+1}AC^m e}, \mathbf{A^2(XA)^{m+1}AC^{m+1}}\}, \forall k, J_{\sigma}^{(k)} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ -1 \end{pmatrix} > 0$$



(○) ここで,  $(m+1)$  段目の記号列  $A^2(XA)^{m+1}AC^me, A^2(XA)^{m+1}AC^{m+1}$  は,  $m$  段目の記号列  $A^2(XA)^mAC^{m-1}e, A^2(XA)^mAC^m$  を  $L_{A^2XA^{-1}}$  でうつし, 対応する記号列の末尾  $\omega \in \{e, C\}$  を  $R_{\omega^{-1}C\omega}$  で置換えたものであるから, 次が成立つ.

$$(5.47) \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}_{A^2(XA)^{m+1}AC^{m+1}}, \forall \gamma \in \{A^2(XA)^mAC^{m-1}e, A^2(XA)^mAC^m\}, \forall k, \\ \left( R_{\omega^{-1}C\omega} \circ L_{A^2XA^{-1}} \left( J_{\gamma}^{(k)} \right) \right) \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ -1 \end{pmatrix} > 0$$

いま, 唯一残っている suffix operator である, 事実 3 に含まれる各々の  $\sigma$  の末尾  $\omega \in \{e, C\}$  についてそれぞれ,  $R_{\omega^{-1}C\omega}$  の表現を求める必要がある. しかし, 先に述べた通り, 式 (5.29) を満たすような  $R$  の表現を, 任意の記号列に対して求めることは難しい.

だが, ここで行いたい操作は, 記号列  $L_{A^2XA^{-1}}(\gamma) \in \{A^2(XA)^{m+1}A^{\check{}}C^{m-1}e, A^2(XA)^{m+1}A^{\check{}}C^m\}$  に対し,  $\check{}$  を入れた位置に定型語 “C” を挿入する操作である. いま,  $\{A^2(XA)^{m+1}AC^{m-1}e, A^2(XA)^{m+1}AC^m\}$  はすべて同じ接頭辞  $A^2(XA)^{m+1}A$  から始まるので, suffix operator  $R$  を prefix operator  $L$  へと書き換えられる. つまり, 任意の  $L_{A^2XA^{-1}}(\gamma) \in \{A^2(XA)^{m+1}AC^{m-1}e, A^2(XA)^{m+1}AC^m\}$  に対して,

$$(5.48) \quad \begin{aligned} R_{\omega^{-1}C\omega} \circ L_{A^2XA^{-1}}(\gamma) &= L_{(A^2(XA)^{m+1}A)C(A^2(XA)^{m+1}A)^{-1}} \circ L_{A^2XA^{-1}}(\gamma) \\ &= L_{A^2XA^{-1}} \circ L_{(A^2(XA)^mA)C(A^2(XA)^mA)^{-1}} \circ L_{A^2XA^{-1}}^{-1} \circ L_{A^2XA^{-1}}(\gamma) \\ &= L_{A^2XA^{-1}} \circ L_{(A^2(XA)^mA)C(A^2(XA)^mA)^{-1}}(\gamma) \end{aligned}$$

となる. したがって, 事実 3 は以下のように,  $R$  を用いず  $L$  だけで表すことができる.

$$(5.49) \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}_{A^2(XA)^{m+1}AC^{m+1}}, \forall \gamma \in \{A^2(XA)^mAC^{m-1}e, A^2(XA)^mAC^m\}, \forall k, \\ \left( L_{A^2XA^{-1}} \circ L_{(A^2(XA)^mA)C(A^2(XA)^mA)^{-1}} \left( J_{\gamma}^{(k)} \right) \right) \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ -1 \end{pmatrix} > 0$$

さらに, Cor.5-9] を使って,  $L_{A^2XA^{-1}} \circ L_{(A^2(XA)^mA)C(A^2(XA)^mA)^{-1}} \left( J_{\gamma}^{(k)} \right)$  を具体的に計算できる. Cor.5-6], Lem.5-2] も用いると,

$$(5.50) \quad \begin{aligned} &L_{A^2XA^{-1}} \circ L_{(A^2(XA)^mA)C(A^2(XA)^mA)^{-1}} \left( J_{\gamma}^{(k)} \right) \\ &= J_{\gamma}^{(k)} \begin{bmatrix} M_{(A^2(XA)^mA)C(A^2(XA)^mA)^{-1}} & V_{(A^2(XA)^mA)C(A^2(XA)^mA)^{-1}} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{A^2XAA} & V_{A^2XAA} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \\ &= J_{\gamma}^{(k)} \begin{bmatrix} M_{(A^2(XA)^mA)C(A^2(XA)^mA)^{-1}C} & V_{(A^2(XA)^mA)C(A^2(XA)^mA)^{-1}C} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{A^2XAA} & V_{A^2XAA} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \\ &= J_{\gamma}^{(k)} \begin{bmatrix} M_C & V_C \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_C^{-1} & V_C^{-1} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = J_{\gamma}^{(k)} \end{aligned}$$

となり, 事実 3 は

$$(5.51) \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}_{A^2(XA)^{m+1}AC^{m+1}}, \forall \gamma \in \{A^2(XA)^mAC^{m-1}e, A^2(XA)^mAC^m\}, \forall k, J_{\gamma}^{(k)} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ -1 \end{pmatrix} > 0$$

と, 事実 1 と同じ形になる. (●)

さらに, (○) から (●) までの手続きを繰返すと

$$(5.52) \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}_{A^2(XA)^{m+1}AC^{m+1}}, \forall \gamma' \in \{A^2XAAe, A^2XAAC\}, \forall k, J_{\gamma'}^{(k)} \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ -1 \end{pmatrix} > 0$$

も成立つ.

以上の 3 つの事実から,

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{A^2(XA)^{m+1}AC^{m+1}} &= \mathcal{D}_{A^2ea} \cap \left\{ \mathbf{x} \left| \begin{array}{cc} J_{A^2ead}^{(1)} \left( \begin{smallmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{smallmatrix} \right) > 0 & J_{A^2XAea}^{(1)} \left( \begin{smallmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{smallmatrix} \right) > 0 \\ \vdots & \vdots \\ J_{A^2ead}^{(5)} \left( \begin{smallmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{smallmatrix} \right) > 0 & J_{A^2XAea}^{(4)} \left( \begin{smallmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{smallmatrix} \right) > 0 \end{array} \right. \right\} \\
&\cap \cdots \cap \left\{ \mathbf{x} \left| \begin{array}{cc} J_{A^2(XA)^m ead}^{(1)} \left( \begin{smallmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{smallmatrix} \right) > 0 & J_{A^2(XA)^{m+1} ea}^{(1)} \left( \begin{smallmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{smallmatrix} \right) > 0 \\ \vdots & \vdots \\ J_{A^2(XA)^m ead}^{(5)} \left( \begin{smallmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{smallmatrix} \right) > 0 & J_{A^2(XA)^{m+1} ea}^{(4)} \left( \begin{smallmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{smallmatrix} \right) > 0 \end{array} \right. \right\} \\
&\cap \left\{ \mathbf{x} \left| \begin{array}{cc} J_{A^2(XA)^{m+1} eae}^{(1)} \left( \begin{smallmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{smallmatrix} \right) > 0 & J_{A^2(XA)^{m+1} A}^{(1)} \left( \begin{smallmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{smallmatrix} \right) > 0 \\ \vdots & \vdots \\ J_{A^2(XA)^{m+1} eae}^{(5)} \left( \begin{smallmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{smallmatrix} \right) > 0 & J_{A^2(XA)^{m+1} A}^{(5)} \left( \begin{smallmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{smallmatrix} \right) > 0 \end{array} \right. \right\} \\
&\cap \left\{ \mathbf{x} \left| \begin{array}{cc} J_{A^2(XA)^{m+1} Ae}^{(1)} \left( \begin{smallmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{smallmatrix} \right) > 0 & J_{A^2(XA)^{m+1} AC}^{(1)} \left( \begin{smallmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{smallmatrix} \right) > 0 \\ \vdots & \vdots \\ J_{A^2(XA)^{m+1} Ae}^{(5)} \left( \begin{smallmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{smallmatrix} \right) > 0 & J_{A^2(XA)^{m+1} AC}^{(3)} \left( \begin{smallmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{smallmatrix} \right) > 0 \end{array} \right. \right\} \\
&\cap \cdots \cap \left\{ \mathbf{x} \left| \begin{array}{cc} J_{A^2(XA)^{m+1} AC^m e}^{(1)} \left( \begin{smallmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{smallmatrix} \right) > 0 & J_{A^2(XA)^{m+1} AC^{m+1}}^{(1)} \left( \begin{smallmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{smallmatrix} \right) > 0 \\ \vdots & \vdots \\ J_{A^2(XA)^{m+1} AC^m e}^{(5)} \left( \begin{smallmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{smallmatrix} \right) > 0 & J_{A^2(XA)^{m+1} AC^{m+1}}^{(3)} \left( \begin{smallmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{smallmatrix} \right) > 0 \end{array} \right. \right\} \\
&= \mathcal{D}_{A^2ea} \cap F_{A^2ea}^{-1}(\mathcal{D}_{dABAea}) \cap \cdots \cap F_{A^2(XA)^m ea}^{-1}(\mathcal{D}_{dABAea}) \\
&\cap F_{A^2(XA)^{m+1} ea}^{-1}(\mathcal{D}_{ead}) \\
&\cap \left\{ \mathbf{x} \left| \begin{array}{cc} J_{A^2(XA)^{m+1} Ae}^{(1)} \left( \begin{smallmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{smallmatrix} \right) > 0 & J_{A^2(XA)^{m+1} AC}^{(1)} \left( \begin{smallmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{smallmatrix} \right) > 0 \\ \vdots & \vdots \\ J_{A^2(XA)^{m+1} Ae}^{(5)} \left( \begin{smallmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{smallmatrix} \right) > 0 & J_{A^2(XA)^{m+1} AC}^{(3)} \left( \begin{smallmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{smallmatrix} \right) > 0 \end{array} \right. \right\} \\
&\cap \cdots \cap \left\{ \mathbf{x} \left| \begin{array}{cc} J_{A^2XAAe}^{(1)} \left( \begin{smallmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{smallmatrix} \right) > 0 & J_{A^2XAAC}^{(1)} \left( \begin{smallmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{smallmatrix} \right) > 0 \\ \vdots & \vdots \\ J_{A^2XAAe}^{(5)} \left( \begin{smallmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{smallmatrix} \right) > 0 & J_{A^2XAAC}^{(3)} \left( \begin{smallmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{smallmatrix} \right) > 0 \end{array} \right. \right\} \\
&= \mathcal{D}_{A^2ea} \cap F_{A^2ea}^{-1}(\mathcal{D}_{dABAea}) \cap \cdots \cap \left( L_{A^2XA-1}^m(F_{A^2ea}) \right)^{-1}(\mathcal{D}_{dABAea}) \\
&\cap \left( L_{A^2XA-1}^{m+1}(F_{A^2ea}) \right)^{-1}(\mathcal{D}_{ead}) \\
&\cap F_{A^2(XA)^{m+1} A}^{-1}(\mathcal{D}_C) \cap \cdots \cap F_{A^2XAA}^{-1}(\mathcal{D}_C) \\
&= \mathcal{D}_{A^2ea} \cap \left( \bigcap_{i=0}^m (L_{A^2XA-1}^i(F_{A^2ea}))^{-1}(\mathcal{D}_{dABAea}) \right) \\
&\cap \left( L_{A^2XA-1}^{m+1}(F_{A^2ea}) \right)^{-1}(\mathcal{D}_{ead}) \\
&\cap \left( L_{A^2XA-1}^m(F_{A^2XAA}) \right)^{-1}(\mathcal{D}_C) \cap \cdots \cap F_{A^2XAA}^{-1}(\mathcal{D}_C) \\
&= \mathcal{D}_{A^2ea} \cap \left( \bigcap_{i=0}^m (L_{A^2XA-1}^i(F_{A^2ea}))^{-1}(\mathcal{D}_{dABAea}) \right) \\
&\cap \left( L_{A^2XA-1}^{m+1}(F_{A^2ea}) \right)^{-1}(\mathcal{D}_{ead}) \\
&\cap \left( \bigcap_{i=0}^m (L_{A^2XA-1}^i(F_{A^2XAA}))^{-1}(\mathcal{D}_C) \right)
\end{aligned}$$

(5.53)

となる. 2 番目の等号において, 事実 3 を用いた. そして,  $L_{A^2XA^{-1}}^i(F_\sigma)$  は同相写像であるから,

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{D}_{A^2(XA)^{m+1}AC^{m+1}} \\
 &= \mathcal{D}_{A^2ea} \cap \left( \bigcap_{i=0}^m (L_{A^2XA^{-1}}^i(F_{A^2ea}))^{-1} (\mathcal{D}_{dABAea}) \right) \\
 & \quad \cap \left( L_{A^2XA^{-1}}^{m+1}(F_{A^2ea}) \right)^{-1} (\mathcal{D}_{ead}) \\
 (5.54) \quad & \quad \cap \left( \bigcap_{i=0}^m (L_{A^2XA^{-1}}^i(F_{A^2XAA}))^{-1} (\mathcal{D}_C) \right) \\
 &= \mathcal{D}_{A^2ea} \cap \left( \bigcap_{i=0}^m \left\{ (L_{A^2XA^{-1}}^i(F_{A^2ea}))^{-1} (\mathcal{D}_{dABAea}) \cap (L_{A^2XA^{-1}}^i(F_{A^2XAA}))^{-1} (\mathcal{D}_C) \right\} \right) \\
 & \quad \cap \left( L_{A^2XA^{-1}}^{m+1}(F_{A^2ea}) \right)^{-1} (\mathcal{D}_{ead})
 \end{aligned}$$

を得る. ■

Lem.5-11] より, 第 1 層の島  $\mathcal{D}_{A^2XAA}$  を定義する不等式群に  $L_{A^2XA^{-1}}$  を 0 回から  $(m-1)$  回まで繰返し作用して得られる不等式群だけが, 第  $m$  層の島  $\mathcal{D}_{A^2(XA)^mAC^m}$  を定義することがわかる. そして, 第  $m$  層の島を定義する不等式群の大部分, すなわち

$$(5.55) \quad \mathcal{D}_{A^2ea} \cap \bigcap_{i=0}^{m-1} \left( (L_{A^2XA^{-1}}^i(F_{A^2ea}))^{-1} (\mathcal{D}_{dABAea}) \cap (L_{A^2XA^{-1}}^i(F_{A^2XAA}))^{-1} (\mathcal{D}_C) \right)$$

という領域を定義する不等式群は, 第  $(m-1)$  層のそれと共通であり, しかも第  $(m+1)$  層以降の島の定義にも寄与しているのである. そして, 残る  $(L_{A^2XA^{-1}}^m(F_{A^2ea}))^{-1} (\mathcal{D}_{ead})$  という領域を定義する不等式群が, 第  $m$  層の島を決定づけているのである.

式 (5.40) の各項を詳しく考察する前に,  $\lim_{m \rightarrow \infty} F_{A^2XAA}^{\pm m}$  の極限を考える. まず, Cor.5-9] より, 不等式に対する  $L_{A^2XA^{-1}}$  の作用は, Affine 変換  $F_{A^2XAA}$  に等価であった. そして, Lem.5-5] より,

$$(5.56) \quad F_{A^2XAA}^{-1} \equiv F_C$$

であり, 次の補題が成立つ.

Lem.5-12] 実数成分の 3 次元横 vector  $J_{A^2(XA)^\infty A}$ ,  $J_{C^\infty}$  が, 式 (5.1) で定義される同値関係  $\sim$  の下でそれぞれただ 1 つずつ存在し, 任意の不等式  $J_\sigma^{(k)} \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} > 0$  に対し,

$$(5.57) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} F_{A^2XAA}^m \left( \left\{ x \mid J_\sigma^{(k)} \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} > 0 \right\} \right) = \left\{ x \mid J_{A^2(XA)^\infty A} \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$(5.58) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} F_{A^2XAA}^{-m} \left( \left\{ x \mid J_\sigma^{(k)} \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} > 0 \right\} \right) = \left\{ x \mid J_{C^\infty} \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

が成立つ.

**Proof]** 写像 (5.56) の固有値は 2 つとも実数で, 一方が 1 より大きく他方が 1 より小さく, 対応する固有 vector も実数を成分に持つ. そのため写像 (5.56) は双曲型不動点  $h$  をただ 1 つ持ち, 写像 (2.4) と位相共役的である. したがって, 不動点  $h$  を原点となるように座標変換すれば, 写像 (5.56) を線型写像に書き直すことができる. そして,  $\mathbb{R}^2$  平面を, 一方の (1 より大きい固有値に付随する) 固有 vector の方向に固有値倍に拡大し, 他方の (1 より小さい固有値に付随する) 固有 vector の方向に固有値倍に縮小する. その結果, 平面上

の任意の点は, 無限回の写像によって,  $h$  を通る拡大方向の固有 **vector** の張る直線上に, 無限回の逆写像によって,  $h$  を通る縮小方向の固有 **vector** の張る直線上に, それぞれうつされる.

$J_{A^2(XA)^\infty A}$ ,  $J_{C^\infty}$  は, 2 つの固有 **vector** にそれぞれ直交する **vector** であり,  $\sim$  の下でただ 1 つに定まる. ■

この Lem.5-12] は, 第  $\infty$  層の島が, 存在するとすれば直線上にあり, 測度を持たないことを意味する. これを用いて, 式 (5.40) の各項について考える. 重要なのは, 式 (5.40) のように表した時の各項がそれぞれ, 何らかの多角形領域を形作っており, それぞれの領域に個別に注目したとき, それを定義する不等式がいくつあろうと, 意味のある不等式は各々の多角形の辺の個数分しかないということである. そして,  $F_{A^2XAA}$  は Affine 変換であったから, すべての不等式を一斉に  $F_{A^2XAA}$  でうつしても, 不等式の redundancy (冗長さ) は不変, すなわち, 各領域の多角形の辺をなす不等式は  $F_{A^2XAA}$  でうつしてもやはり多角形の辺をなし, 辺をなさない不等式はうつしてもやはり辺をなさない不等式にしかならないということである.

しかし, 大きな問題がある. Lem.5-11] で示した通り,  $F_{A^2XAA}$  でうつすのは, 領域を定義する不等式のうち一部分だけであるということである. そのときの不等式の redundancy は,  $F_{A^2XAA}$  でうつす前の redundancy からはただちに得られず, 改めて確認する必要がある. ここが証明の核であり, “領域の redundancy” に関する次の補題が成立つ.

Lem.5-13] 第  $(m+1)$  層の島をなす領域について,

$$(5.59) \quad \mathcal{D}_{A^2ea} \cap \left( L_{A^2XA^{-1}}^m (F_{A^2ea}) \right)^{-1} (\mathcal{D}_{dABAea}) \subset \mathcal{D}_{A^2ea} \cap \left( L_{A^2XA^{-1}}^m (F_{A^2XAA}) \right)^{-1} (\mathcal{D}_C)$$

$$(5.60) \quad \mathcal{D}_{A^2ea} \cap \left( L_{A^2XA^{-1}}^m (F_{A^2ea}) \right)^{-1} (\mathcal{D}_{dABAea}) \subset \mathcal{D}_{A^2ea} \cap \left( L_{A^2XA^{-1}}^{m-1} (F_{A^2ea}) \right)^{-1} (\mathcal{D}_{dABAea})$$

が成立ち, 第  $m$  層の島は以下のように表せる.

$$(5.61) \quad \mathcal{D}_{A^2(XA)^m AC^m} = \mathcal{D}_{A^2ea} \cap \left( L_{A^2XA^{-1}}^{m-1} (F_{A^2ea}) \right)^{-1} (\mathcal{D}_{dABAea}) \cap \left( L_{A^2XA^{-1}}^m (F_{A^2ea}) \right)^{-1} (\mathcal{D}_{ead})$$

つまり, 第  $m$  層の島は Lem.5-11] に記したように本来  $(2m+2)$  個の多角形領域の共通部分であったが, 本質的にはわずか 3 つの多角形領域の共通部分を考えるだけで得られるというのが, Lem.5-13] の主張である.

Def.] (不等式群が定義する領域を表す省略記法)

今後, 不等式群が定める領域を表す際に

$$(5.62) \quad \langle J_1, \dots, J_p \rangle := \left\{ x \mid J_1 \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} > 0, \dots, J_p \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} > 0 \right\}$$

のように省略して表記する.

Proof] (Lem.5-13)

$m = 0, 1$  ならびに  $m \rightarrow \infty$  の場合について, 各項の領域を定義する不等式の係数を, 愚直に全て具体的な数値を計算し, 付録 C の手続きに従って, 領域の辺をなす不等式を求めていく. それにより,  $m = 1$  の場合における (5.59), (5.60) の式を得られる. さらにその結果と Lem.5-12] を用いて, 任意の  $m$  について これら 2 式が成立つことを示す. これら 2 式と Lem.5-11] の系が式 (5.61) である.

準備として,

$$(5.63) \quad \begin{aligned} \mathcal{D}_{A^2ea} &= \left\langle J_{ea}^{(4)}, J_{eae}^{(2)}, J_{Aea}^{(4)}, J_{Aeae}^{(2)}, J_{A^2ea}^{(4)} \right\rangle \\ &= \left\{ x \mid J_{ea}^{(4)} \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} > 0, J_{eae}^{(2)} \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} > 0, J_{Aea}^{(4)} \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} > 0, J_{Aeae}^{(2)} \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} > 0, J_{A^2ea}^{(4)} \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} > 0 \right\} \end{aligned}$$

$$(5.64) \quad F_{A^2ea}^{-1}(\mathcal{D}_{dABaAe}) = \left\langle J_{A^2Bea}^{(4)}, J_{A^2Beae}^{(2)}, J_{A^2Xea}^{(4)}, J_{A^2Xeae}^{(2)} \right\rangle$$

$$(5.65) \quad F_{A^2XAA}^{-1}(\mathcal{D}_C) = \left\langle J_{A^2XAe}^{(4)}, J_{A^2XAC}^{(1)}, J_{A^2XAC}^{(2)} \right\rangle$$

を, 不等式の係数を計算して得る. 次に,  $\left(L_{A^2XA}^m F_{A^2ea}\right)^{-1}(\mathcal{D}_{dABaAe})$  は  $F_{A^2ea}^{-1}(\mathcal{D}_{dABaAe})$  を定義する全ての不等式を, **Affine** 変換  $F_{A^2XAA}$  で  $m$  回うつした不等式が定義する. このとき, すべての不等式を同じ **Affine** 変換でうつすのだから, **redundancy** は **Affine** 変換の前後で不変であり,  $F_{A^2ea}^{-1}(\mathcal{D}_{dABaAe})$  の辺をなす不等式を **Affine** 変換でうつしたものが, そのまま  $\left(L_{A^2XA}^m F_{A^2ea}\right)^{-1}(\mathcal{D}_{dABaAe})$  の辺をなす. したがって,

$$(5.66) \quad \begin{aligned} & \left(L_{A^2XA}^m F_{A^2ea}\right)^{-1}(\mathcal{D}_{dABaAe}) \\ &= \left\langle F_{A^2XAA}^m \left(J_{A^2Bea}^{(4)}\right), F_{A^2XAA}^m \left(J_{A^2Beae}^{(2)}\right), F_{A^2XAA}^m \left(J_{A^2Xea}^{(4)}\right), F_{A^2XAA}^m \left(J_{A^2Xeae}^{(2)}\right) \right\rangle \end{aligned}$$

が成立ち,  $\left(L_{A^2XA}^m F_{A^2XAA}\right)^{-1}(\mathcal{D}_C)$  も同様に,

$$(5.67) \quad \left(L_{A^2XA}^m F_{A^2XAA}\right)^{-1}(\mathcal{D}_C) = \left\langle F_{A^2XAA}^m \left(J_{A^2XAe}^{(4)}\right), F_{A^2XAA}^m \left(J_{A^2XAC}^{(1)}\right), F_{A^2XAA}^m \left(J_{A^2XAC}^{(2)}\right) \right\rangle$$

となる.

次にこれらの共通部分をとったものを地道に計算していく. 共通部分をとったときに **redundant** になる不等式, すなわち領域の辺をなさない式を灰色で表記する. まず,

$$(5.68) \quad \begin{aligned} \mathcal{D}_{A^2ea} \cap F_{A^2ea}^{-1}(\mathcal{D}_{dABaAe}) &= \left\langle J_{ea}^{(4)}, J_{eae}^{(2)}, J_{Aea}^{(4)}, J_{Aeae}^{(2)}, J_{A^2ea}^{(4)} \right\rangle \cap \left\langle J_{A^2Bea}^{(4)}, J_{A^2Beae}^{(2)}, J_{A^2Xea}^{(4)}, J_{A^2Xeae}^{(2)} \right\rangle \\ &= \left\langle J_{ea}^{(4)}, J_{Aea}^{(4)}, J_{A^2Xea}^{(4)}, J_{A^2Xeae}^{(2)} \right\rangle \end{aligned}$$

であり,

$$(5.69) \quad \begin{aligned} & \mathcal{D}_{A^2ea} \cap \left(L_{A^2XA}^{-1} F_{A^2ea}\right)^{-1}(\mathcal{D}_{dABaAe}) \\ &= \left\langle J_{ea}^{(4)}, J_{eae}^{(2)}, J_{Aea}^{(4)}, J_{Aeae}^{(2)}, J_{A^2ea}^{(4)} \right\rangle \\ & \cap \left\langle F_{A^2XAA} \left(J_{A^2Bea}^{(4)}\right), F_{A^2XAA} \left(J_{A^2Beae}^{(2)}\right), F_{A^2XAA} \left(J_{A^2Xea}^{(4)}\right), F_{A^2XAA} \left(J_{A^2Xeae}^{(2)}\right) \right\rangle \\ &= \left\langle J_{ea}^{(4)}, J_{Aea}^{(4)}, F_{A^2XAA} \left(J_{A^2Xea}^{(4)}\right), F_{A^2XAA} \left(J_{A^2Xeae}^{(2)}\right) \right\rangle \end{aligned}$$

となる. 一方,

$$(5.70) \quad \begin{aligned} F_{A^2ea}^{-1}(\mathcal{D}_{dABaAe}) \cap F_{A^2XAA}^{-1}(\mathcal{D}_C) &= \left\langle J_{A^2Bea}^{(4)}, J_{A^2Beae}^{(2)}, J_{A^2Xea}^{(4)}, J_{A^2Xeae}^{(2)} \right\rangle \cap \left\langle J_{A^2XAe}^{(4)}, J_{A^2XAC}^{(1)}, J_{A^2XAC}^{(2)} \right\rangle \\ &= \left\langle J_{A^2Beae}^{(2)}, J_{A^2Xea}^{(4)}, J_{A^2Xeae}^{(2)}, J_{A^2XAC}^{(1)} \right\rangle \end{aligned}$$

であるから,

$$(5.71) \quad \begin{aligned} & \mathcal{D}_{A^2ea} \cap \left(F_{A^2ea}^{-1}(\mathcal{D}_{dABaAe}) \cap F_{A^2XAA}^{-1}(\mathcal{D}_C)\right) \\ &= \left\langle J_{ea}^{(4)}, J_{eae}^{(2)}, J_{Aea}^{(4)}, J_{Aeae}^{(2)}, J_{A^2ea}^{(4)} \right\rangle \cap \left\langle J_{A^2Beae}^{(2)}, J_{A^2Xea}^{(4)}, J_{A^2Xeae}^{(2)}, J_{A^2XAC}^{(1)} \right\rangle \\ &= \left\langle J_{ea}^{(4)}, J_{Aea}^{(4)}, J_{A^2Xea}^{(4)}, J_{A^2Xeae}^{(2)} \right\rangle \\ &= \mathcal{D}_{A^2ea} \cap F_{A^2ea}^{-1}(\mathcal{D}_{dABaAe}) \end{aligned}$$

となり, さらに

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{D}_{A^2ea} \cap \left( (L_{A^2XA}^{-1} F_{A^2ea})^{-1} (\mathcal{D}_{dABAea}) \cap (L_{A^2XA}^{-1} F_{A^2XAA})^{-1} (\mathcal{D}_C) \right) \\
 &= \left\langle J_{ea}^{(4)}, J_{eae}^{(2)}, J_{Aea}^{(4)}, J_{Aeae}^{(2)}, J_{A^2ea}^{(4)} \right\rangle \\
 (5.72) \quad & \cap \left\langle F_{A^2XAA} \left( J_{A^2Beae}^{(2)} \right), F_{A^2XAA} \left( J_{A^2Xea}^{(4)} \right), F_{A^2XAA} \left( J_{A^2Xeae}^{(2)} \right), F_{A^2XAA} \left( J_{A^2XAC}^{(1)} \right) \right\rangle \\
 &= \left\langle J_{ea}^{(4)}, J_{Aea}^{(4)}, F_{A^2XAA} \left( J_{A^2Xea}^{(4)} \right), F_{A^2XAA} \left( J_{A^2Xeae}^{(2)} \right) \right\rangle \\
 &= \mathcal{D}_{A^2ea} \cap (L_{A^2XA}^{-1} F_{A^2ea})^{-1} (\mathcal{D}_{dABAea})
 \end{aligned}$$

である. したがって,

$$(5.73) \quad \mathcal{D}_{A^2ea} \cap (L_{A^2XA}^{-1} F_{A^2ea})^{-1} (\mathcal{D}_{dABAea}) \subset \mathcal{D}_{A^2ea} \cap (L_{A^2XA}^{-1} F_{A^2XAA})^{-1} (\mathcal{D}_C)$$

となり,  $m = 1$  のときの式 (5.59) が得られる. さらに,

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{D}_{A^2ea} \cap \left( F_{A^2ea}^{-1} (\mathcal{D}_{dABAea}) \cap (L_{A^2XA}^{-1} F_{A^2ea})^{-1} (\mathcal{D}_{dABAea}) \right) \\
 &= \left( \mathcal{D}_{A^2ea} \cap F_{A^2ea}^{-1} (\mathcal{D}_{dABAea}) \right) \cap \left( \mathcal{D}_{A^2ea} \cap (L_{A^2XA}^{-1} F_{A^2ea})^{-1} (\mathcal{D}_{dABAea}) \right) \\
 (5.74) \quad &= \left\langle J_{ea}^{(4)}, J_{Aea}^{(4)}, J_{A^2Xea}^{(4)}, J_{A^2Xeae}^{(2)} \right\rangle \cap \left\langle J_{ea}^{(4)}, J_{Aea}^{(4)}, F_{A^2XAA} \left( J_{A^2Xea}^{(4)} \right), F_{A^2XAA} \left( J_{A^2Xeae}^{(2)} \right) \right\rangle \\
 &= \left\langle J_{ea}^{(4)}, J_{Aea}^{(4)}, F_{A^2XAA} \left( J_{A^2Xea}^{(4)} \right), F_{A^2XAA} \left( J_{A^2Xeae}^{(2)} \right) \right\rangle \\
 &= \mathcal{D}_{A^2ea} \cap (L_{A^2XA}^{-1} F_{A^2ea})^{-1} (\mathcal{D}_{dABAea})
 \end{aligned}$$

であるから,

$$(5.75) \quad \mathcal{D}_{A^2ea} \cap (L_{A^2XA}^{-1} F_{A^2ea})^{-1} (\mathcal{D}_{dABAea}) \subset \mathcal{D}_{A^2ea} \cap F_{A^2ea}^{-1} (\mathcal{D}_{dABAea})$$

となり,  $m = 1$  のときの式 (5.60) が得られる.

(☆) 問題は, 任意の  $m$  における  $\mathcal{D}_{A^2ea} \cap \left( L_{A^2XA}^m F_{A^2ea} \right)^{-1} (\mathcal{D}_{dABAea})$  の redundancy である. まず,  $m = 0, 1$  の場合は (5.68), (5.69) の式で既に確かめている.  $m = 1$  の場合である式 (5.69) をなす全ての不等式を  $F_{A^2XAA}^{-1}$  でうつした

$$\begin{aligned}
 & F_{A^2XAA} \left( \mathcal{D}_{A^2ea} \cap (L_{A^2XA}^{-1} F_{A^2ea})^{-1} (\mathcal{D}_{dABAea}) \right) \\
 &= F_{A^2XAA} (\mathcal{D}_{A^2ea}) \cap F_{A^2ea}^{-1} (\mathcal{D}_{dABAea}) \\
 (5.76) \quad &= \left\langle F_{A^2XAA}^{-1} \left( J_{ea}^{(4)} \right), F_{A^2XAA}^{-1} \left( J_{eae}^{(2)} \right), F_{A^2XAA}^{-1} \left( J_{Aea}^{(4)} \right), F_{A^2XAA}^{-1} \left( J_{Aeae}^{(2)} \right), F_{A^2XAA}^{-1} \left( J_{A^2ea}^{(4)} \right) \right\rangle \\
 & \cap \left\langle J_{A^2Beae}^{(4)}, J_{A^2Beae}^{(2)}, J_{A^2Xea}^{(4)}, J_{A^2Xeae}^{(2)} \right\rangle \\
 &= \left\langle F_{A^2XAA}^{-1} \left( J_{ea}^{(4)} \right), F_{A^2XAA}^{-1} \left( J_{Aea}^{(4)} \right), J_{A^2Xea}^{(4)}, J_{A^2Xeae}^{(2)} \right\rangle
 \end{aligned}$$

もただちに成立つ. しかし, 式 (5.69) や式 (5.76) の  $L_{A^2XA}^{-1}, F_{A^2XAA}$  をそれぞれ  $L_{A^2XA}^m, F_{A^2XAA}^m$  に置換えた式が成立つかどうかは 自明ではない.

ここで,  $m \rightarrow \infty$  の極限を考える. ただし, 全ての共通部分をとってから  $\lim_{m \rightarrow \infty} F_{A^2XAA}^m$  でうつすのではな

く, まず  $F_{A^2XAA}^m$  でうつす部分だけの極限をとり, 残りの領域との共通部分をとる. [Lem.5-12] より,

$$\begin{aligned}
 (5.77) \quad & \left( \lim_{m \rightarrow \infty} F_{A^2XAA}^m (\mathcal{D}_{A^2ea}) \right) \cap F_{A^2ea}^{-1} (\mathcal{D}_{dABAea}) \\
 &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\langle F_{A^2XAA}^{-m} \left( J_{ea}^{(4)} \right), F_{A^2XAA}^{-m} \left( J_{eae}^{(2)} \right), F_{A^2XAA}^{-m} \left( J_{Aea}^{(4)} \right), F_{A^2XAA}^{-m} \left( J_{Aeae}^{(2)} \right), F_{A^2XAA}^{-m} \left( J_{A^2ea}^{(4)} \right) \right\rangle \\
 &\quad \cap \left\langle J_{A^2Bea}^{(4)}, J_{A^2Beae}^{(2)}, J_{A^2Xea}^{(4)}, J_{A^2Xeae}^{(2)} \right\rangle \\
 &= \left\{ \mathbf{x} \mid J_{C^\infty} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \right\} \cap \left\langle J_{A^2Bea}^{(4)}, J_{A^2Beae}^{(2)}, J_{A^2Xea}^{(4)}, J_{A^2Xeae}^{(2)} \right\rangle
 \end{aligned}$$

であり, やはり係数の具体的な数値を計算することで,

$$\begin{aligned}
 (5.78) \quad & \left( \lim_{m \rightarrow \infty} F_{A^2XAA}^m (\mathcal{D}_{A^2ea}) \right) \cap F_{A^2ea}^{-1} (\mathcal{D}_{dABAea}) \\
 &= \left\{ \mathbf{x} \mid J_{C^\infty} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} = 0, \right\} \cap \left\langle J_{A^2Bea}^{(4)}, J_{A^2Beae}^{(2)}, J_{A^2Xea}^{(4)}, J_{A^2Xeae}^{(2)} \right\rangle \\
 &= \left\{ \mathbf{x} \mid J_{C^\infty} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} = 0, J_{A^2Xea}^{(4)} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} > 0, J_{A^2Xeae}^{(2)} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} > 0 \right\}
 \end{aligned}$$

が確かめられる.

式 (5.68) は,  $J_{ea}^{(4)} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} = 0, J_{Aea}^{(4)} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} = 0$  という 2 直線と, 多角形  $F_{A^2ea}^{-1} (\mathcal{D}_{dABAea})$  を定義する 4 つの直線とが交差する順序を与えている. 式 (5.76) は,  $J_{ea}^{(4)} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} = 0, J_{Aea}^{(4)} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} = 0$  を, Affine 変換  $F_{A^2XAA}^{-1}$  でそれぞれ 1 回ずつうつした 2 直線と, 多角形  $F_{A^2ea}^{-1} (\mathcal{D}_{dABAea})$  を定義する 4 つの直線とが交差する順序を与えている. さらに, 式 (5.78) は,  $J_{ea}^{(4)} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} = 0, J_{Aea}^{(4)} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} = 0$  を, Affine 変換  $F_{A^2XAA}^{-1}$  でそれぞれ無限回うつした 2 直線 ([Lem.5-12] より, それらは共に直線  $J_{C^\infty} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} = 0$  に一致する) と, 多角形  $F_{A^2ea}^{-1} (\mathcal{D}_{dABAea})$  を定義する 4 つの直線とが交差する順序を与えている. 交差する順序がわかることはすなわち, この 3 つの式いずれにおいても,  $F_{A^2ea}^{-1} (\mathcal{D}_{dABAea})$  を定義する 4 つの不等式のうちの  $J_{A^2Xea}^{(4)} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} > 0, J_{A^2Xeae}^{(2)} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} > 0$  が, 平面上の集合を定義する式となっており, 他の 2 つの不等式  $J_{A^2Bea}^{(4)} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} > 0, J_{A^2Beae}^{(2)} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} > 0$  が redundant であるということである.

そして,  $F_{A^2XAA}^{-1}$  は Affine 変換であるから, 任意の  $m$  において,  $J_{ea}^{(4)} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} = 0, J_{Aea}^{(4)} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} = 0$  を, Affine 変換  $F_{A^2XAA}^{-1}$  でそれぞれ  $m$  回ずつうつした 2 直線と, 多角形  $F_{A^2ea}^{-1} (\mathcal{D}_{dABAea})$  を定義する 4 つの不等式とが交差する順序も, 以上の 3 式 (5.68), (5.76), (5.78) の場合と同様となる. すなわち,

$$\begin{aligned}
 (5.79) \quad & F_{A^2XAA}^m \left( \mathcal{D}_{A^2ea} \cap \left( L_{A^2XA}^m F_{A^2ea} \right)^{-1} (\mathcal{D}_{dABAea}) \right) \\
 &= F_{A^2XAA}^m (\mathcal{D}_{A^2ea}) \cap F_{A^2ea}^{-1} (\mathcal{D}_{dABAea}) \\
 &= \left\langle F_{A^2XAA}^{-m} \left( J_{ea}^{(4)} \right), F_{A^2XAA}^{-m} \left( J_{eae}^{(2)} \right), F_{A^2XAA}^{-m} \left( J_{Aea}^{(4)} \right), F_{A^2XAA}^{-m} \left( J_{Aeae}^{(2)} \right), F_{A^2XAA}^{-m} \left( J_{A^2ea}^{(4)} \right) \right\rangle \\
 &\quad \cap \left\langle J_{A^2Bea}^{(4)}, J_{A^2Beae}^{(2)}, J_{A^2Xea}^{(4)}, J_{A^2Xeae}^{(2)} \right\rangle \\
 &= \left\langle F_{A^2XAA}^{-m} \left( J_{ea}^{(4)} \right), F_{A^2XAA}^{-m} \left( J_{Aea}^{(4)} \right), J_{A^2Xea}^{(4)}, J_{A^2Xeae}^{(2)} \right\rangle
 \end{aligned}$$

が成立つ. さらに, この式 (5.79) 全体を  $F_{A^2XAA}^{-m}$  でうつせば,

$$\begin{aligned}
 (5.80) \quad & \mathcal{D}_{A^2ea} \cap \left( L_{A^2XA}^m F_{A^2ea} \right)^{-1} (\mathcal{D}_{dABAea}) \\
 &= \left\langle J_{ea}^{(4)}, J_{eae}^{(2)}, J_{Aea}^{(4)}, J_{Aeae}^{(2)}, J_{A^2ea}^{(4)} \right\rangle \\
 &\quad \cap \left\langle F_{A^2XAA}^m \left( J_{A^2Bea}^{(4)} \right), F_{A^2XAA}^m \left( J_{A^2Beae}^{(2)} \right), F_{A^2XAA}^m \left( J_{A^2Xea}^{(4)} \right), F_{A^2XAA}^m \left( J_{A^2Xeae}^{(2)} \right) \right\rangle \\
 &= \left\langle J_{ea}^{(4)}, J_{Aea}^{(4)}, F_{A^2XAA}^m \left( J_{A^2Xea}^{(4)} \right), F_{A^2XAA}^m \left( J_{A^2Xeae}^{(2)} \right) \right\rangle
 \end{aligned}$$



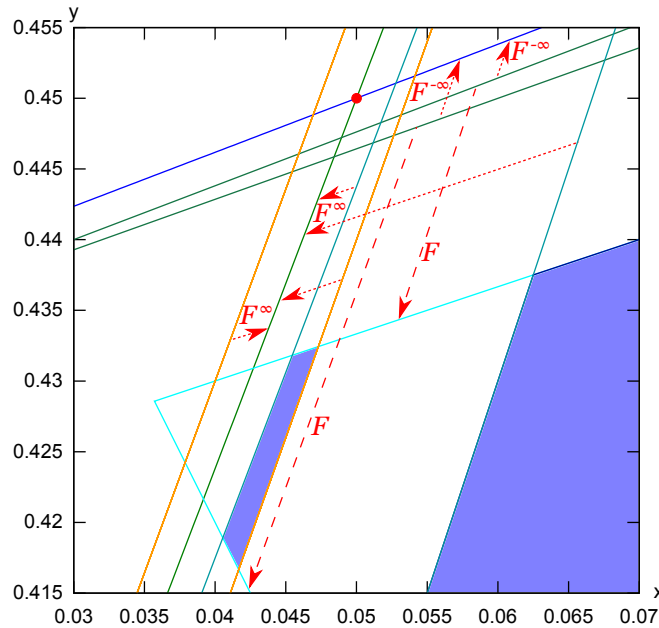


Fig.22  $\mathbb{R}^2$  上で,  $\mathcal{D}_{A^2(XA)^m AC^m}$  の形成に関する直線が交差する様子. 塗りつぶした領域が右から順に  $\mathcal{D}_{A^3}$ ,  $\mathcal{D}_{A^2 XAAC}$  である. 縦方向にひいた直線 (実線) は, 右から順に  $J_{A^2 XAe}^{(4)T}(x, -1) > 0$ ,  $J_{A^2 Xeae}^{(2)T}(x, -1) > 0$ ,  $J_{A^2 XAeae}^{(2)T}(x, -1) > 0$ ,  $J_{A^2(XA)^\infty A}^T(x, -1) = 0$ ,  $J_{A^2 Xea}^{(4)T}(x, -1) > 0$  をなす. 横方向にひいた直線 (実線) は, 下から順に  $\mathcal{D}_{Aea}^{(4)T}(x, -1) > 0$ ,  $\mathcal{D}_{Aea}^{(4)T}(x, -1) > 0$ ,  $F_{A^2 XAA}^{-1}(J_{Aea}^{(4)T}(x, -1) > 0$ ,  $F_{A^2 XAA}^{-1}(J_{ea}^{(4)T}(x, -1) > 0$ ,  $J_{C^\infty}^T(x, -1) = 0$  をなす. 赤く印をつけた点が,  $F_{A^2 XAA}$  の不動点である.

が得られる. そして, 領域 (5.78) が正の 1 次元測度を持った線分となることから, 領域 (5.79) と領域 (5.80) も, 正の 2 次元測度を持つ. (★)

また, (☆) から (★) までの議論は, (5.72), (5.74) の式に対しても,  $\mathcal{D}_{A^2 ea}$  以外の部分だけを  $F_{A^2 XAA}^{-1}$  で 1 回うつした領域と,  $\mathcal{D}_{A^2 ea}$  の部分だけを  $F_{A^2 XAA}$  で無限回うつした領域について, 各々不等式の係数を具体的に計算することで, それぞれ全く同様に成立つことが確認でき,

$$\begin{aligned}
 (5.81) \quad & \mathcal{D}_{A^2 ea} \cap \left( \left( L_{A^2 XA}^m F_{A^2 ea} \right)^{-1} (\mathcal{D}_{dABea}) \cap \left( L_{A^2 XA}^m F_{A^2 XAA} \right)^{-1} (\mathcal{D}_C) \right) \\
 &= \left\langle J_{ea}^{(4)}, J_{Aea}^{(4)}, F_{A^2 XAA}^m \left( J_{A^2 Xea}^{(4)} \right), F_{A^2 XAA}^m \left( J_{A^2 Xeae}^{(2)} \right) \right\rangle \\
 &= \mathcal{D}_{A^2 ea} \cap \left( L_{A^2 XA}^m F_{A^2 ea} \right)^{-1} (\mathcal{D}_{dABea})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5.82) \quad & \mathcal{D}_{A^2 ea} \cap \left( \left( L_{A^2 XA}^{m-1} F_{A^2 ea} \right)^{-1} (\mathcal{D}_{dABea}) \cap \left( L_{A^2 XA}^m F_{A^2 ea} \right)^{-1} (\mathcal{D}_{dABea}) \right) \\
 &= \left\langle J_{ea}^{(4)}, J_{Aea}^{(4)}, F_{A^2 XAA}^m \left( J_{A^2 Xea}^{(4)} \right), F_{A^2 XAA}^m \left( J_{A^2 Xeae}^{(2)} \right) \right\rangle \\
 &= \mathcal{D}_{A^2 ea} \cap \left( L_{A^2 XA}^m F_{A^2 ea} \right)^{-1} (\mathcal{D}_{dABea})
 \end{aligned}$$

が得られる (なお,  $m = 0$  の場合の式 (5.81) は, 式 (5.71) である). そして, 式 (5.81) から式 (5.59) が, 式

(5.82) から式 (5.60) が, それぞれ従う. ただちに Lem.5-11] は

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_{A^2(XA)^m AC^m} &= \mathcal{D}_{A^2 ea} \cap \left( \bigcap_{i=0}^{m-1} \left\{ (L_{A^2 XA}^i(F_{A^2 ea}))^{-1} (\mathcal{D}_{dABAea}) \cap (L_{A^2 XA}^i(F_{A^2 XAA}))^{-1} (\mathcal{D}_C) \right\} \right) \\
 (5.83) \quad &\cap \left( L_{A^2 XA}^m(F_{A^2 ea})^{-1} (\mathcal{D}_{ead}) \right) \\
 &= \mathcal{D}_{A^2 ea} \cap \left( \bigcap_{i=0}^{m-1} (L_{A^2 XA}^i(F_{A^2 ea}))^{-1} (\mathcal{D}_{dABAea}) \right) \cap \left( L_{A^2 XA}^m(F_{A^2 ea})^{-1} (\mathcal{D}_{ead}) \right) \\
 &= \mathcal{D}_{A^2 ea} \cap \left( L_{A^2 XA}^{m-1}(F_{A^2 ea})^{-1} (\mathcal{D}_{dABAea}) \cap \left( L_{A^2 XA}^m(F_{A^2 ea})^{-1} (\mathcal{D}_{ead}) \right) \right)
 \end{aligned}$$

と書き直される. 2 つ目の等号で式 (5.59) を, 3 つ目の等号で式 (5.60) を, それぞれ用いた. ■

Lem.5-13] の証明において最も本質的なのは, (☆) から (★) までの議論であり,

$$(5.84) \quad \mathcal{Q}_1 := \left\langle J_{A^2 XAe}^{(4)}, J_{Aea}^{(4)}, \lim_{m \rightarrow \infty} F_{A^2 XAA}^m \left( J_{A^2 Xea}^{(4)} \right), \lim_{m \rightarrow \infty} F_{A^2 XAA}^{-m} \left( J_{Aea}^{(4)} \right) \right\rangle$$

という四角形領域が Affine 変換  $F_{A^2 XAA}$  の不動点を含まず, この四角形領域  $\mathcal{Q}_1$  で交差しない 2 直線は,  $F_{A^2 XAA}$  でそれぞれうつしてもやはり交差しないことに基づいている. そして, 式 (5.59), (5.60) の各項の多角形領域の辺すべてが, たまたま  $\mathcal{Q}_1$  に交点を持っていないことから, 補題が成立っているのである.

なお,  $F_{A^2 XA}$  に関しては, 不動点の周りで角度  $\pi$  の回転を含む線型変換となるので, 相空間上での直線の交わり方は Fig.22 と少し異なる. しかし, 数式の上では同じことが成立つ. また, 相空間上で Fig.22 と似た描像を得るには,  $F_{A^2 XAA}$  の代わりに,  $F_{A^2 XA}^2$  を用いて議論を進めればよい.

この部分こそがそのまま望んでいる命題 Prop.5-10] の証明においても核心となる.

**Proof] (Prop.5-10)**

まず, Lem.5-13] より,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_{A^2(XA)^m AC^m} &= \mathcal{D}_{A^2 ea} \cap \left( \bigcap_{i=0}^{m-1} (L_{A^2 XA}^i(F_{A^2 ea}))^{-1} (\mathcal{D}_{dABAea}) \cap (L_{A^2 XA}^i(F_{A^2 XAA}))^{-1} (\mathcal{D}_C) \right) \\
 (5.85) \quad &\cap \left( L_{A^2 XA}^m(F_{A^2 ea})^{-1} (\mathcal{D}_{ead}) \right) \\
 &= \mathcal{D}_{A^2 ea} \cap \left( L_{A^2 XA}^{m-1}(F_{A^2 ea})^{-1} (\mathcal{D}_{dABAea}) \cap \left( L_{A^2 XA}^m(F_{A^2 ea})^{-1} (\mathcal{D}_{ead}) \right) \right)
 \end{aligned}$$

である. Lem.5-13] で考察していない, 最後の項が示す領域の辺を  $m = 1$  の場合について計算すると,

$$\begin{aligned}
 (5.86) \quad &(L_{A^2 XA}^{-1} F_{A^2 ea})^{-1} (\mathcal{D}_{ead}) \\
 &= \left\langle F_{A^2 XAA} \left( J_{A^2 eae}^{(2)} \right), F_{A^2 XAA} \left( J_{A^2 eae}^{(4)} \right), F_{A^2 XAA} \left( J_{A^2 A}^{(2)} \right), F_{A^2 XAA} \left( J_{A^2 A}^{(5)} \right) \right\rangle
 \end{aligned}$$

であり,  $F_{A^2 ea}^{-1} (\mathcal{D}_{dABAea})$  との共通部分をとると,

$$\begin{aligned}
 (5.87) \quad &F_{A^2 ea}^{-1} (\mathcal{D}_{dABAea}) \cap (L_{A^2 XA}^{-1} F_{A^2 ea})^{-1} (\mathcal{D}_{ead}) \\
 &= \left\langle J_{A^2 Bea}^{(4)}, J_{A^2 Beae}^{(2)}, J_{A^2 Xea}^{(4)}, J_{A^2 Xeae}^{(2)} \right\rangle \\
 &\cap \left\langle F_{A^2 XAA} \left( J_{A^2 eae}^{(2)} \right), F_{A^2 XAA} \left( J_{A^2 eae}^{(4)} \right), F_{A^2 XAA} \left( J_{A^2 A}^{(2)} \right), F_{A^2 XAA} \left( J_{A^2 A}^{(5)} \right) \right\rangle \\
 &= \left\langle J_{A^2 Beae}^{(2)}, J_{A^2 Xeae}^{(2)}, F_{A^2 XAA} \left( J_{A^2 eae}^{(2)} \right) \right\rangle
 \end{aligned}$$

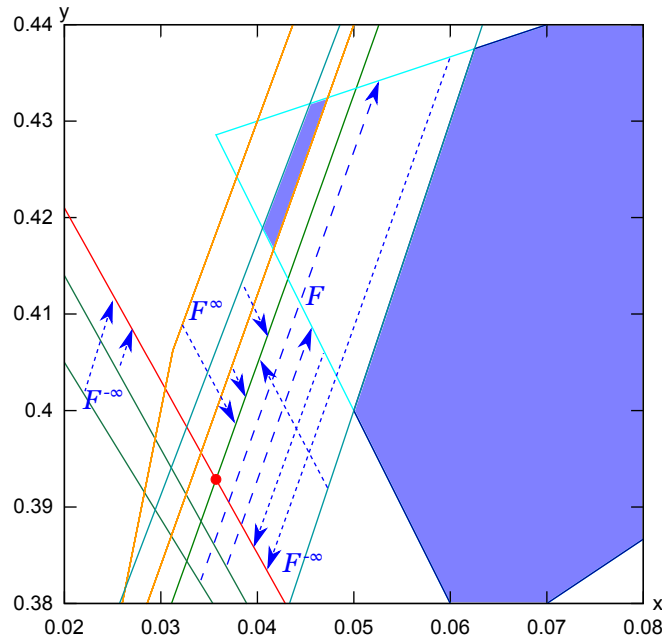


Fig.23  $\mathbb{R}^2$  上で,  $\mathcal{D}_{A^2X^m A(AC)^m}$  の形成に関係する直線が交差する様子. 塗りつぶした領域が右から順に  $\mathcal{D}_{A^3}$ ,  $\mathcal{D}_{A^2XAAC}$  である. 縦方向にひいた直線 (実線) は, 右から順に  $J_{A^2XAe}^{(4)\top}(\mathbf{x}, -1) > 0$ ,  $J_{A^2X\infty A}^{(4)\top}(\mathbf{x}, -1) = 0$ ,  $J_{A^2Xeae}^{(2)\top}(\mathbf{x}, -1) > 0$ ,  $J_{A^2XAeae}^{(2)\top}(\mathbf{x}, -1) > 0$ ,  $J_{A^2Xea}^{(4)\top}(\mathbf{x}, -1) > 0$  をなす. 横方向にひいた直線 (実線) は, 下から順に  $F_{A^2XA}^{-1}(J_{ea}^{(4)})^\top(\mathbf{x}, -1) > 0$ ,  $F_{A^2XA}^{-1}(J_{Aea}^{(4)})^\top(\mathbf{x}, -1) > 0$ ,  $J_{(AC)^\infty}^\top(\mathbf{x}, -1) = 0$ ,  $\mathcal{D}_{Aea}^{(4)\top}(\mathbf{x}, -1) > 0$ ,  $\mathcal{D}_{ea}^{(4)\top}(\mathbf{x}, -1) > 0$  をなす. 赤く印をつけた点が,  $F_{A^2XA}$  の不動点である.

となる. さらに  $\mathcal{D}_{A^2ea}$  との共通部分を取り,

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{D}_{A^2ea} \cap \left( F_{A^2ea}^{-1}(\mathcal{D}_{dABAea}) \cap (L_{A^2XA}^{-1} F_{A^2ea})^{-1}(\mathcal{D}_{ead}) \right) \\
 (5.88) \quad &= \left\langle J_{ea}^{(4)}, J_{eae}^{(2)}, J_{Aea}^{(4)}, J_{Aeae}^{(2)}, J_{A^2ea}^{(4)} \right\rangle \cap \left\langle J_{A^2Beae}^{(2)}, J_{A^2Xeae}^{(2)}, F_{A^2XAA} \left( J_{A^2eae}^{(2)} \right) \right\rangle \\
 &= \left\langle J_{ea}^{(4)}, J_{Aea}^{(4)}, J_{A^2Xeae}^{(2)}, F_{A^2XAA} \left( J_{A^2eae}^{(2)} \right) \right\rangle
 \end{aligned}$$

を得る. これについても (☆) から (★) までの議論が成立ち,

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{D}_{A^2ea} \cap \left( \left( L_{A^2XA}^{m-1} F_{A^2ea} \right)^{-1}(\mathcal{D}_{dABAea}) \cap \left( L_{A^2XA}^m F_{A^2ea} \right)^{-1}(\mathcal{D}_{ead}) \right) \\
 &= \left\langle J_{ea}^{(4)}, J_{eae}^{(2)}, J_{Aea}^{(4)}, J_{Aeae}^{(2)}, J_{A^2ea}^{(4)} \right\rangle \\
 (5.89) \quad & \cap \left\langle F_{A^2XAA}^{m-1} \left( J_{A^2Beae}^{(2)} \right), F_{A^2XAA}^{m-1} \left( J_{A^2Xeae}^{(2)} \right), F_{A^2XAA}^m \left( J_{A^2eae}^{(2)} \right) \right\rangle \\
 &= \left\langle J_{ea}^{(4)}, J_{Aea}^{(4)}, F_{A^2XAA}^{m-1} \left( J_{A^2Xeae}^{(2)} \right), F_{A^2XAA}^m \left( J_{A^2eae}^{(2)} \right) \right\rangle \\
 &= \left\langle J_{ea}^{(4)}, J_{Aea}^{(4)}, F_{A^2XAA}^m \left( J_{Aeae}^{(2)} \right), F_{A^2XAA}^m \left( J_{A^2eae}^{(2)} \right) \right\rangle
 \end{aligned}$$

が導かれる. 領域 (5.89) の辺は, Table 6 に示した不等式そのものである. ■

Prop.5-10] すなわち, Thm.5-4] が示され, Thm.5-1] の後半も得られた. ゆえに, 島は無限に存在する.

## 5.4 拡大した命題の否定による, 証明の正当性についての考察

$$\begin{array}{c}
 (5.90) \quad \begin{array}{ccccccc}
 e & \xrightarrow{R_{aead}} & A & \xrightarrow{R_e} & A^2 e & \xrightarrow{R_{adABAAC}} & \boxed{A^2 XAAC} \\
 & & & & \downarrow L_{A^2 XA-2} \circ L_{A^2 XA-1} & & \downarrow L_{A^2 XA-2} \circ L_{A^2 XA-1} \\
 e & \xrightarrow{R_{aeade}} & A^2 e & \xrightarrow{R_{adABXAe}} & A^2 X(XA)e & \xrightarrow{R_{adABAAC}} & A^2 X(XA)^2 AC \xrightarrow{R_{CAC}} \dots \\
 & & \downarrow L_{A^2 XA-2} \circ L_{A^2 XA-1} & & \downarrow L_{A^2 XA-2} \circ L_{A^2 XA-1} & & \downarrow L_{A^2 XA-2} \circ L_{A^2 XA-1} \\
 e & \xrightarrow{R_{aeadAXe}} & A^2 X(XA)e & \xrightarrow{R_{adABXAe}} & A^2 (X(XA))^2 e & \xrightarrow{R_{adABAAC}} & A^2 (X(XA))^2 (XA) AC \xrightarrow{R_{CAC}} \dots \\
 & & & & & & \downarrow R_{CAC} \\
 & & & & & & \boxed{A^2 X(XA)^2 AC^2 (AC)} \\
 & & & & & & \downarrow L_{A^2 XA-2} \circ L_{A^2 XA-1} \\
 & & & & & & \dots \xrightarrow{R_{CAC}} A^2 (X(XA))^2 (XA) AC^2 (AC) \xrightarrow{R_{CAC}} \boxed{A^2 (X(XA))^2 (XA) AC(C(AC))^2}
 \end{array}
 \end{array}$$

図式 (5.90) に沿って, これまで Thm.5-4] について行ってきたのと同様の議論を行うことで, 次の命題も成立ちそうに見える。

**Prop.5-14]**  $R_C \circ L_{A^2 XA-1} \circ R_{AC} \circ L_{A^2 XA-2}$  の任意回数の 反復 から成る作用は, 領域  $\mathcal{D}_{AAXAAC}$  に対して測度を失わせない。

しかし, 既に述べた通り, 記号列 (5.13) に対応する定義域が存在しない事が, この命題の反例を与える。より正確に述べると, 図式 (5.90) で灰色で記した記号列に対応する領域が全て存在しない。したがって, Thm.5-3] で主張した通り, 写像  $F_{A^2 XAAC}$  に対して,  $R_C \circ L_{A^2 XA-1}$  と  $R_{AC} \circ L_{A^2 XA-2}$  の任意の組合せを作用してきたのにも関わらず, Prop.5-14] を強めた次の主張も成立たない。

**Prop.5-15]**  $R_C \circ L_{A^2 XA-1}$  または  $R_{AC} \circ L_{A^2 XA-2}$  任意の 組合せ から成る作用は, 領域  $\mathcal{D}_{A^2 XAAC}$  に対して測度を失わせない。

問題は, Thm.5-4] と Prop.5-14] とで, 何が違いを生み出しているのかということである。結論を述べると,  $m$  回の繰返し作用を施した領域の辺を予想できるか否かが問題なのである。階層ごとに, 領域を定義する不等式群の redundancy が異なるため, その結果として, (☆) から (★) までの議論が成立たなくなるのだ。

$A^2 (X(XA))^2 (XA) AC (C(AC))^2$  に対応する領域は存在しないが, 領域が測度を失うまでの過程を詳しく見てみる。 $R_C \circ L_{A^2 XA-1}$  と  $R_{AC} \circ L_{A^2 XA-2}$  を別々にして図式を描くと,

$$\begin{array}{c}
 (5.91) \quad \begin{array}{ccccccc}
 \boxed{AAXAAC} & & & & & & \\
 \downarrow L_{A^2 XA-1} & & & & & & \\
 AA(XA)^2 AC & \xrightarrow{R_C} & \boxed{AA(XA)^2 AC^2} & & & & \\
 \downarrow L_{A^2 XA-2} & & \downarrow L_{A^2 XA-2} & & & & \\
 AAX(XA)^2 AC & \xrightarrow{R_C} & AAX(XA)^2 AC^2 & \xrightarrow{R_{AC}} & \boxed{AAX(XA)^2 AC^2 (AC)} & & \\
 \downarrow L_{A^2 XA-1} & & \downarrow L_{A^2 XA-1} & & \downarrow L_{A^2 XA-1} & & \\
 AAXAX(XA)^2 AC & \xrightarrow{R_C} & AAXAX(XA)^2 AC^2 & \xrightarrow{R_{AC}} & AAXAX(XA)^2 AC^2 (AC) & \xrightarrow{R_C} & AAXAX(XA)^2 AC^2 AC^2
 \end{array}
 \end{array}$$

のようになる. 3 段目までの島の四角形を計算すると, Table 8 のようになる. 2 段目までの島が共有していた 2 辺のうちの 1 つが, 3 段目で失われている. すなわち, 1 段目の島を定義する不等式の **redundancy** と, 3 段目のそれは全く異なるということである. だから, その先の階層の島についても, 不等式の **redundancy** を導くことが出来ず,  $\mathcal{D}_{AA(X(XA))^2(XA)AC(C(AC))^2}$  の辺が, 例えば Table 9 のようになるのかどうかすら自明ではなくなるのだ.

島	辺の不等式			
$A^2XAAC$	$J_{ea}^{(4)}$	$J_{Aea}^{(4)}$	$J_{A^2Xeae}^{(2)}$	$J_{A^2XAeae}^{(2)}$
$A^2(XA)^2AC^2$	$J_{ea}^{(4)}$	$J_{Aea}^{(4)}$	$J_{A(AX)^2eae}^{(2)}$	$J_{A^2(XA)^2eae}^{(2)}$
$A^2X(XA)^2AC^2(AC)$	$J_{AAXBeae}^{(2)}$	$J_{Aea}^{(4)}$	$J_{A^2X^2(AX)eae}^{(2)}$	$J_{AAX^2(AX)Aeae}^{(2)}$

Table 8 図式 (5.91) の 3 段目までの記号列に対応する島の辺

島	辺の不等式			
$AA(XA)X(XA)^2AC^2(AC)C$	$J_{AAXBeae}^{(2)}$	$J_{Aea}^{(4)}$	$J_{A^2(XA)X^2(AX)eae}^{(2)}$	$J_{AA(XA)X^2(AX)Aeae}^{(2)}$
$AA(X(XA))^2(XA)AC(C(AC))^2$	$J_{AAX(XA)XBeae}^{(2)}$	$J_{Aea}^{(4)}$	$J_{A^2(X(XA))^2Xeae}^{(2)}$	$J_{A^2(X(XA))^2(XA)eae}^{(2)}$

Table 9  $L_{A^2XA-2} \circ L_{A^2XA-1}$  を用いて予想した, Table 8 の続き

この反例は, 任意の階層の島の辺を予想するためには, 第 1 層の島と第 2 層の島との対応付けが仮定として不可欠であるということを示唆している. 逆に, それを仮定できたからこそ, Thm.5-4] を正しいと認めることができたのである.

## 6 再帰時間分布

### 6.1 一般の混合系における再帰時間分布の定義

再帰時間とは、混合系における **chaos** 軌道の遅い運動について、定量的な考察を行うために用いられる、1 つの統計量であることを、改めて確認する。そして、遅い運動の原因として、島の周りに **chaos** 軌道がへばりつく現象 “stickiness” が知られている。もう少し厳密な議論を行うために、再帰時間の定義を与える。

写像  $\Phi$  の定義域の中の点  $p$  をひとつ選ぶ。  $p$  から始まる軌道の再帰時間を、

$$(6.1) \quad \tau_{\mathcal{R}}(p) := \min\{i \geq 1 \mid \Phi^i(p) \in \mathcal{R}\}$$

として、点  $p$  から **map** を繰返し、初めて  $\mathcal{R}$  へ戻るまでの時間で定義する。この間の、長さ  $\tau_{\mathcal{R}}(p)$  の軌道それぞれを、特に “再帰軌道” と呼ぶことにする。すなわち、再帰軌道とは、**chaos** 軌道の一部を  $\mathcal{R}$  によって切り取ったものである。

いま、写像  $\Phi$  の定義域の中に、再帰領域  $\mathcal{R}$  を固定する。領域  $\mathcal{R}$  に対する時刻  $T$  で再帰する確率を式 (6.1) で定義される  $\tau_{\mathcal{R}}$  を用いて、

$$(6.2) \quad P_{\mathcal{R}}(T) := \frac{\mu(\{p \in \mathcal{R} \mid \tau_{\mathcal{R}}(p) = T\})}{\mu(\mathcal{R})}$$

で定義する。この上側累積分布:

$$(6.3) \quad Q_{\mathcal{R}}(T) := \sum_{T' \geq T} P_{\mathcal{R}}(T') = \frac{\mu(\{p \in \mathcal{R} \mid \tau_{\mathcal{R}}(p) \geq T\})}{\mu(\mathcal{R})}$$

すなわち、領域  $\mathcal{R}$  の中の点のうち、再帰時間が  $T$  以上となるような点の割合を調べるのである。

まず **stickiness** の原理について考察する。相空間が完全に **chaos** の海であれば、軌道はほとんど **random** に近い振る舞いをするため、再帰時間が長い軌道の割合は、再帰時間の長さに対して指数関数的に少なくなる。ところが、**chaos** の海に島が存在する場合、それは、放物型周期点の集合体であるから、その近傍で局所的に、軌道は Fig.4 と似た振る舞いをする。だから、ひとたび島の近傍に近づくと、しばらく島の周りを回り続けて、長い再帰時間を稼ぐのである。このとき獲得する時間は、**chaos** の海と違い、必ずしも **random** ではなく、例えば島の周りの全長や、軌道の島からの距離などによって、ある程度の影響を受ける。このことが、再帰時間分布に指数関数的ではない、冪的な分布をもたらすのである。

そのため、島の位置や大きさなどの解析は、混合系の遅い運動を調べる上で、きわめて意義が大きいのである。ところが、標準写像 (1.7) をはじめ、一般的な混合系における再帰時間の解析を困難としている大きな原因の 1 つは、その島がつくる階層構造が複雑すぎて手に負えないことである。しかし本研究では、島の位置や階層性を詳しく調べたことにより、再帰時間分布の考察に対して非常によい手がかりとなることが期待できる。具体的には、島が出現する正確な座標を計算する方法を得られたし、島の周期によって階層の違いを定義してきた。これらを用いて、さらに再帰軌道の分析を行った。

ただし、1 つの注意を述べる。ここまでで証明した事実は、あくまで “島が無限に存在する” という事実だけに過ぎない。したがって、非常に長い周期を持つ島に至るまで、その位置を全て列挙できていないのである。このことは、一般の系においても困難をもたらしている別の問題点を解決できていない。それは、再帰領域  $\mathcal{R}$  の決め方である。式 (6.2) の定義を見れば、 $\mathcal{R}$  の測度が正である限り、その大小は分布に影響を及ぼさないことがわかる。問題となるのは、 $\mathcal{R}$  の位置である。

もし,  $\mathcal{R}$  の中に島が存在したら, それがどんなに小さな島であっても, 再帰時間分布に対して致命的な影響を与えかねないことが, これまでの議論から容易にわかる. それでも, 本研究では島の位置を正確に計算可能できるので, 可能な限り島を探索した上で, それらを避けるように  $\mathcal{R}$  を注意深くとった.

また, 相空間から島を除いた領域において, 写像がすべて双曲型となることが調べられている [5]. そのため, その中で  $\mathcal{R}$  をどんな場所にとっても, 分布は不変である.

## 6.2 島が 1 つしかない区分線型写像の再帰時間分布

まず, 階層構造のない系における再帰時間分布について述べる. 式 (3.2) において  $n = 2$  のとき, parameter は  $A = 2$  となり,  $F_A$  の相空間上にはただ 1 つの四角形の島しか存在しない. したがって再帰領域  $\mathcal{R}$  も特別の注意を払うことなく定めることができるため, このときの再帰時間分布は [4] において調べられており, 累積分布 (6.3) は指数  $-2$  で冪的に減衰する. この場合の chaos 軌道の様子は Fig.24 の通りであり, 島の周囲にへばりついている.

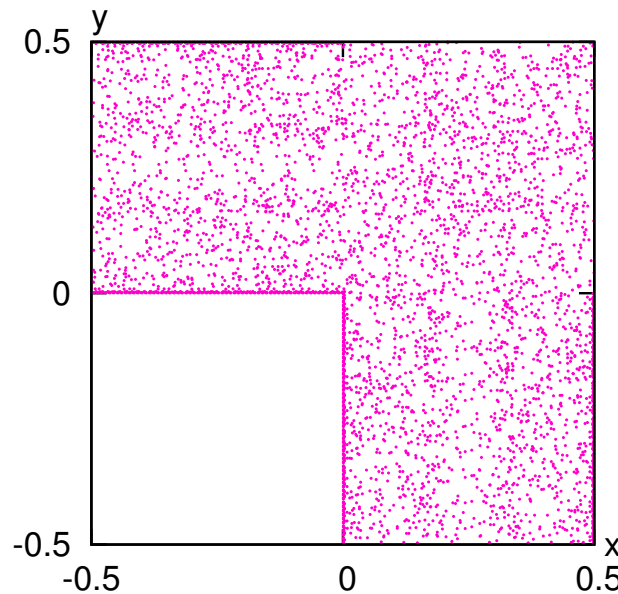


Fig.24  $F_2$  の 1 つの chaos 軌道. 5000step 分を plot している. 島の周囲にへばりついている様子がわかる.

## 6.3 島が無限に存在する区分線型写像の再帰時間分布

つぎに, 本研究で興味を持っている  $A = 1$  の場合である. まず, 相空間は 3 周期の島  $\mathcal{I} = \overline{\mathcal{I}_1} \cap \overline{\mathcal{I}_2}$  により分断されているので, 再帰領域  $\mathcal{R}_1$  を Fig.13 のように  $\mathcal{I}_1$  にとる場合を考える.  $F_2$  と同様, chaos 領域に階層は存在しないので, この場合も, 再帰領域  $\mathcal{R}$  は容易に定めることができる. 累積分布 (6.3) はやはり指数  $-2$  で冪的に減衰した. このとき, chaos 軌道は Fig.25 と Fig.26 に示したように,  $\mathcal{I}$  と, 記号列  $\mathbf{b}^6$  に対応する島  $\overline{\mathcal{Q}_{\mathbf{b}^6}}$  のどちらにも stick していた.

つまり, この場合の再帰軌道も, 島が 1 つしか存在しない  $F_2$  のそれと定性的に同じ振舞いをしている.

問題は  $\mathcal{I}_2$  での分布である. 200 周期以上の島の座標は計算していないが, 少なくとも見つかっている範囲の島は含まないように, 再帰領域を  $\mathcal{R}_2$  を Fig.13 に示した位置にとった. そして, このときの再帰時間分布が Fig.27 である. これまで見てきたほかの例と同じく, 指数  $-2$  での冪的減衰が観察できた.

冪の指数が同じなので, この場合も再帰軌道が島へ stick していることが, ただちに推測できる. 実際,



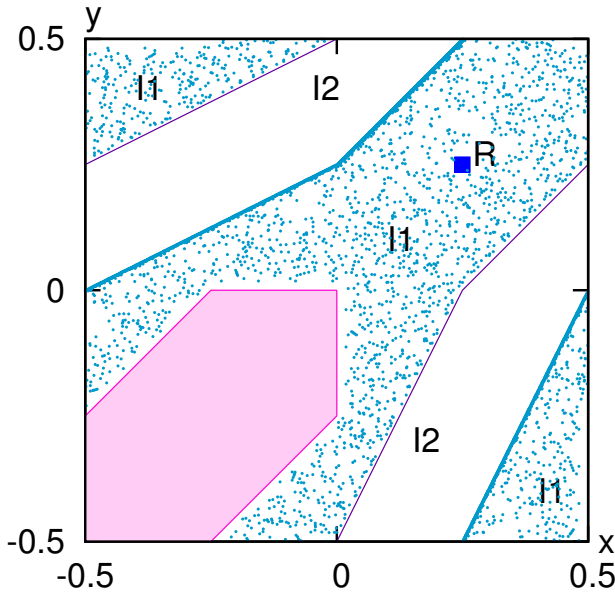


Fig.25  $\mathcal{J}_1$  上の 1 つの再帰軌道.  $\mathcal{J}$  をなす 2 本の折線のうち的一方にへばりついている. 別の初期点から始まり, 他方の折線にへばりつく再帰軌道も存在する.

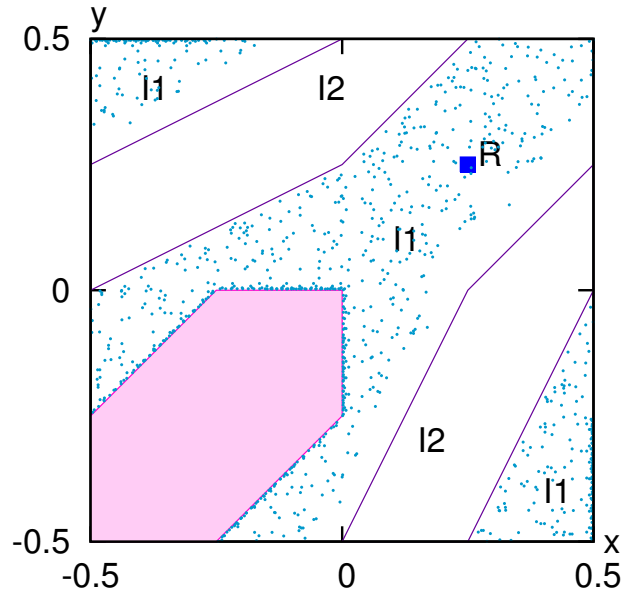


Fig.26  $\mathcal{J}_1$  上の 1 つの再帰軌道.  $\overline{\mathcal{D}_{b6}}$  にへばりついている.

Fig.28 のように, 折線  $\mathcal{J}$  に stick している様子がすぐに観察できるのである. そして, chaos 軌道は島の階層性を順に辿らず, 深い階層の島の周囲へ直接出入りしていることがわかる.

しかし, これまでと違って島が無限個存在し, さらに階層構造をなしているので, 指数  $-2$  での冪則となる理由が, 島への stick だけで説明できるかどうかは全く自明ではない. つまり, 階層構造があることによって, 冪則がもたらされ, 島同士の階層性が失われれば冪則が消滅する可能性も否定できないのである. 実際, 別の系においては, ある階層的な構造が冪則をもたらしことが知られている [7]. しかし, これからの議論では, この写像  $F$  における再帰時間分布の冪則の原因が, 階層構造の有無に無関係であることを明らかにする.

## 6.4 再帰軌道と無限に存在する島の関係

再帰時間分布と階層構造の関係を調べるためには, まずは再帰軌道がどの島に stick しているのかを区別する必要がある. そこで, 再帰時間分布をもたらす, 1 つずつの再帰軌道に着目する. それぞれの再帰軌道は,  $\mathcal{J}$  上の異なる点から始まる軌道であるから, 写像させるごとに通過する領域を, 写像の定義域を表す label (4.4) を用いて記号列として記録したとき, 軌道ごとに記号列が異なる. そのようにして, 再帰軌道が通過した領域を調べることができる. さらに, 得られる記号列を  $t$  文字ずつ細かく分割して, 出現した語の偏りを見た. これは, 相空間上で  $t$  倍写像  $F^t$  の定義域分割を行ったとき, 再帰軌道がどの領域を数多く通過しているかを調べることに他ならない. Fig.31 は, 5 文字ずつ区切った時の出現頻度である. 記号列ごとに, plot の印を変えている. ただちに, 領域ごとの通過回数に偏りがあることが見て取れる. しかしこれはまだ準備段階である. どの領域を数多く通過しているかを定性的に調べただけであり, どれくらいの割合で通過するのか, この graph から定量的に議論できるわけではない.

しかし語の出現頻度を計算することにより, 再帰確率の“分解”を与えるような, 次の通過確率を定義できる.  $\mathcal{J}_2$  の中に, 再帰領域  $\mathcal{R}_2$  を固定する.  $\mathcal{J}_2 \cap \mathcal{D}_{\sigma_t} \neq \emptyset$  となるような,  $t$  文字の記号列  $\sigma_t$  を固定する. 領域



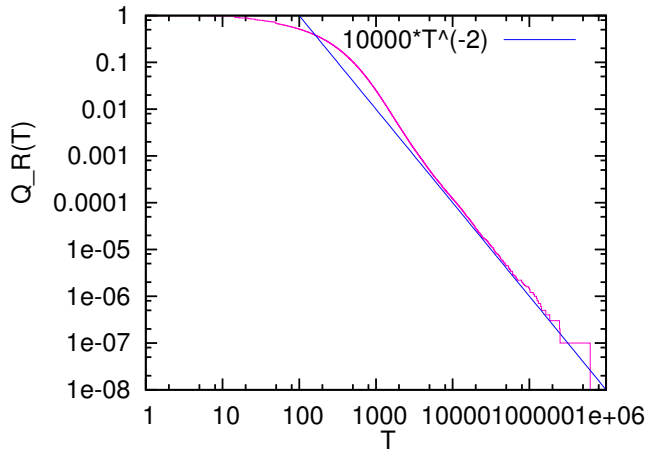


Fig.27 写像  $F$  の再帰確率の累積  $Q_{\mathcal{R}}(T)$ .

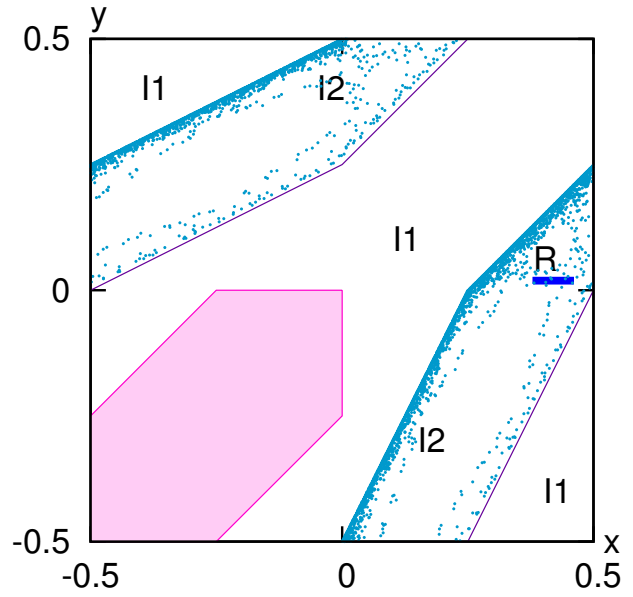


Fig.28 折線  $\mathcal{I}$  に stick するような, 1 つの再帰軌道 ( $\mathcal{R}_2$  中の初期点を 1 つ選び, 写像を繰返した後に再び  $\mathcal{R}_2$  まで戻ってくるまでの plot).

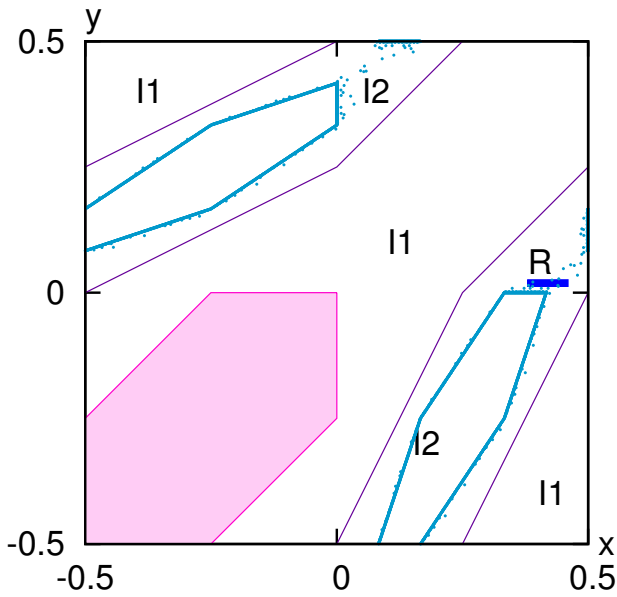


Fig.29 12 周期の島 ( $\overline{\mathcal{D}_{(eaeaea)^2}}$ ,  $\overline{\mathcal{D}_{(aeaeae)^2}}$ ) にへばりつくような, 1 つの再帰軌道.

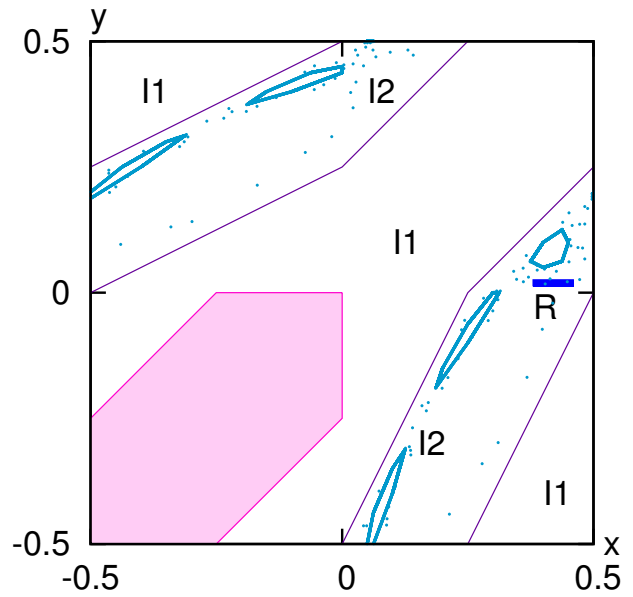


Fig.30 15 周期の島 ( $\overline{\mathcal{D}_{A^2}}$  など) にへばりつくような, 1 つの再帰軌道.

$\mathcal{R}_2$  へ再帰するまでに,  $\overline{\mathcal{D}_{\sigma_t}}$  を通過する回数を,  $\tau_{\mathcal{R}_2, \sigma_t}$  として,  $T$  回通過する確率を

$$(6.4) \quad P_{\mathcal{R}_2, \sigma_t}(T) := \frac{\mu(\{p \in \mathcal{R}_2 \mid \tau_{\mathcal{R}_2, \sigma_t}(p) = T\})}{\mu(\mathcal{R}_2)}$$

で定義する. この上側累積分布:

$$(6.5) \quad Q_{\mathcal{R}_2, \sigma_t}(T) := \sum_{T' \geq T} P_{\mathcal{R}_2, \sigma_t}(T') = \frac{\mu(\{p \in \mathcal{R}_2 \mid \tau_{\mathcal{R}_2, \sigma_t}(p) \geq T\})}{\mu(\mathcal{R}_2)}$$

すなわち, 領域  $\mathcal{R}_2$  中の点のうち, 再帰するまでに  $\overline{\mathcal{D}_{\sigma_t}}$  を  $T$  回以上通過するような点の割合を調べる. こ

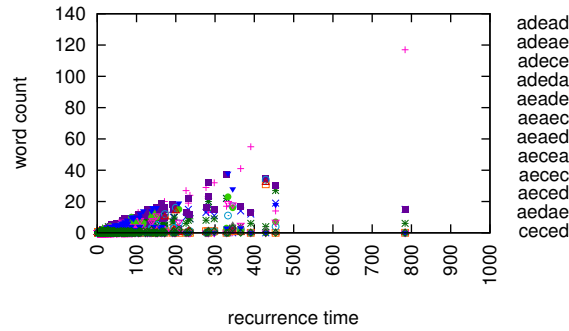


Fig.31 再帰軌道をいくつも取り, その記号列を 5 文字ずつ区切って, 再帰時間に対する語の出現頻度を示している. 同じ語を同じ記号で plot している. 1 つの再帰軌道の記号列の中には, よく出現する語とそうでない語があることがわかる.

こで,

$$(6.6) \quad P_{\mathcal{R}_2, \varepsilon}(T) = P_{\mathcal{R}_2}(T), \quad Q_{\mathcal{R}_2, \varepsilon}(T) = Q_{\mathcal{R}_2}(T)$$

である. すなわち, 再帰するまでに“長さ 0 の記号列  $\varepsilon$  に対応する領域”(それは式 (4.17) で定義した通り, 相空間全体である) を通過する確率が, 再帰確率 (6.2) と完全に一致する. さらに, あらゆる記号列に関する通過確率をすべて“重ね合せた分布”が, 再帰確率に一致することもすぐにわかる. 累積分布 (6.3) も同様である. しかし, 当然ながら

$$(6.7) \quad \sum_{\sigma_t \in \Sigma^t} P_{\mathcal{R}_2, \sigma_t}(T) \neq P_{\mathcal{R}_2}(T), \quad \sum_{\sigma_t \in \Sigma^t} Q_{\mathcal{R}_2, \sigma_t}(T) \neq Q_{\mathcal{R}_2}(T)$$

(ただし  $\Sigma^t$  は式 (4.5) の通り, 長さ  $t$  の記号列全体) であることに注意したい.

この章では, 前章までと異なり, 折線  $\mathcal{J}$  を第 0 層の島  $\overline{\mathcal{D}_0}$  と考え, 12 周期の島 2 つをまとめて第 1 層の島  $\overline{\mathcal{D}_1}$ , 15 周期の島 10 個をまとめて第 2 層の島  $\dots$  と呼ぶことにする. すなわち

$$(6.8) \quad \begin{aligned} \overline{\mathcal{D}_0} &:= \mathcal{J} \\ \overline{\mathcal{D}_1} &:= \mathcal{D}_{(\text{eaeaea})^2} \cup \mathcal{D}_{(\text{aeaeae})^2} \\ \overline{\mathcal{D}_2} &:= \bigcup_{i=0}^4 \mathcal{D}_{\varphi^i(A^3)} \cup \bigcup_{i=0}^4 \mathcal{D}_{\overline{\varphi^i(A^3)}} \\ &\vdots \end{aligned}$$

である.

この通過確率 (6.5) の graph が, Fig.32, Fig.33, Fig.35 そして Fig.36 である. いくつかの  $\sigma_t$  に対して, 指数  $-2$  での冪的な減衰

$$(6.9) \quad Q_{\mathcal{R}_2, \sigma_t}(T) \sim C_{\sigma_t} T^{-2}$$

であることが見て取れる. そこで, 冪的減衰をしている  $\sigma_t$  を調べたところ, 島に隣接する領域の記号列になっていた. つまり, Fig.34 のように, 再帰軌道が島に stick していることを反映しているのである. しかも,  $\sigma_t$  によって, 冪分布の係数  $C_{\sigma_t}$  が異なっており, おまけに階層的な値をとっていることがわかる. つまり,  $\mathcal{D}_{\sigma_t}$  に隣接する島の周期が長い, すなわち階層が深いほど,  $C_{\sigma_t}$  が小さい値をとっており, 島の階層性と, 通過確率の階層性とが結びついているのである.

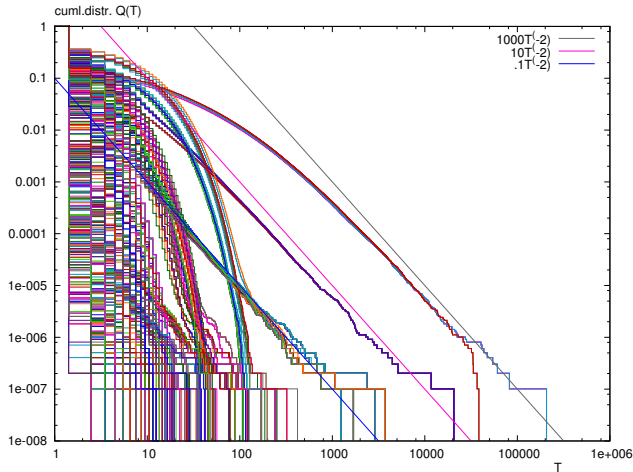


Fig.32  $t = 12$  としたときのすべての  $\sigma_t$  に対する通過確率  $Q_{\mathcal{R}_2, \sigma_t}(T)$ .

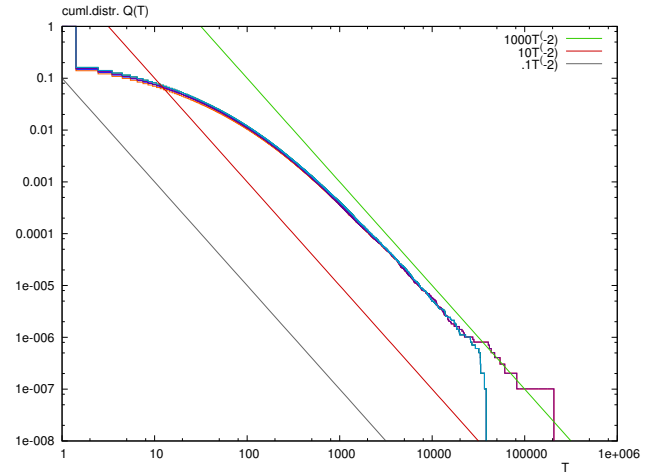


Fig.33  $\mathcal{I}$  の周囲  $\mathcal{D}_{(\text{ead})^3}$ ,  $\mathcal{D}_{(\text{ade})^3}$ ,  $\mathcal{D}_{(\text{dea})^3}$  の通過確率.

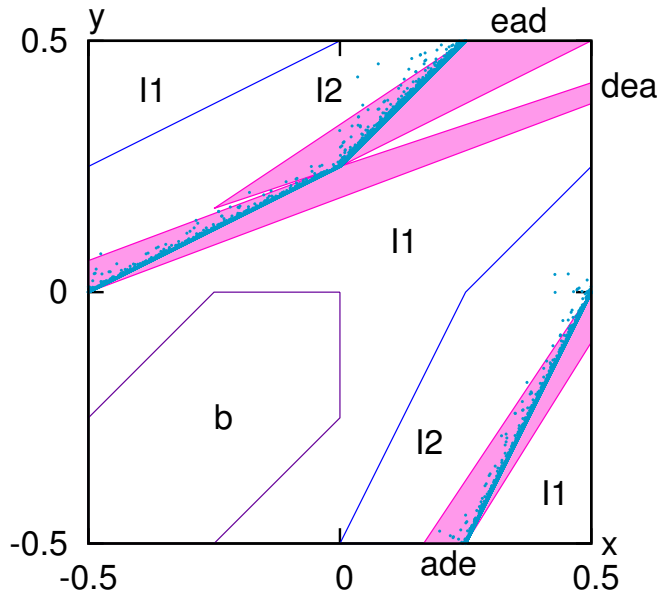


Fig.34  $\mathcal{I}$  と  $\mathcal{D}_{\text{ead}}$ ,  $\mathcal{D}_{\text{ade}}$ ,  $\mathcal{D}_{\text{dea}}$  の関係.

階層性が再帰軌道にもたらす影響を、別の視点から考察する. 領域  $\overline{\mathcal{D}_m}$  の近傍  $\mathcal{N}_m$  を, 多角形の対角線を定数倍 (倍率は  $m$  によって異なる) だけ延長して, Fig.37 のように定義した. 階層によって領域  $\mathcal{D}_m$  の測度が異なることにより, 記号列を用いた  $\mathcal{D}_{\sigma_t}$  による定義が難しかったため, ここでは記号列を用いず, 領域の測度を用いて定義した. ここで,  $\mathcal{R}_2$  を走る長い chaos 軌道に対し,  $\mathcal{N}_m$  に滞在する順序を考察する. 「島の近傍」に入ってから出るまでを 1 回の stick と数え,  $(2T)$  回まで滞在順序を記録した. Fig.38 はそのときだけ plot した様子である. 記録した順序を見ると, 深い階層の島へ近づく際に浅い階層の島の近傍を必ずしも経由していなかった.

さらに, 滞在順序を定量的に議論することを考える.  $t$  回目に滞在した  $\mathcal{N}_m$  に  $2^m$  の重みを付けた関数  $\psi(t)$  の自己相関関数を,

$$(6.10) \quad \Psi(\tau) := \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T \psi(t) \psi(t+\tau)$$

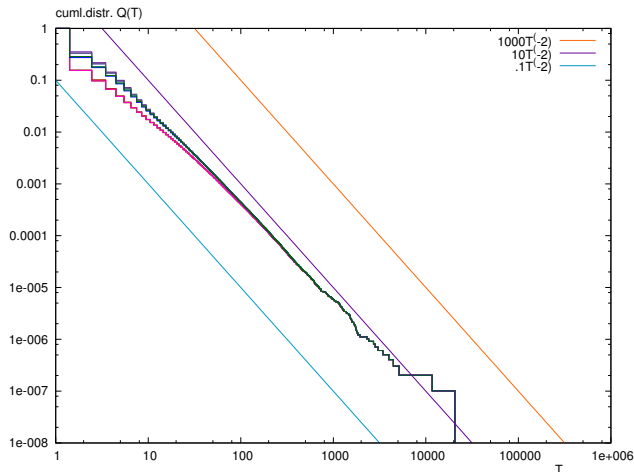


Fig.35 12 周期の島 ( $\mathcal{D}_{(eaeaea)^2}$ ,  $\mathcal{D}_{(aeaeae)^2}$ ) の隣の領域の通過確率.

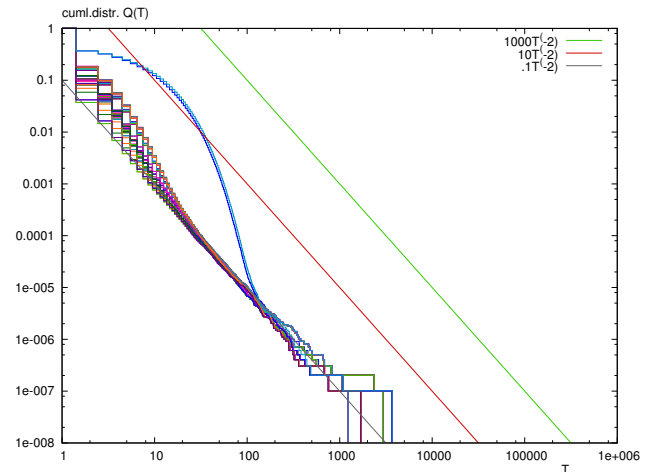


Fig.36 15 周期の島 ( $\mathcal{D}_{A^2}$  など) の隣の領域の通過確率.

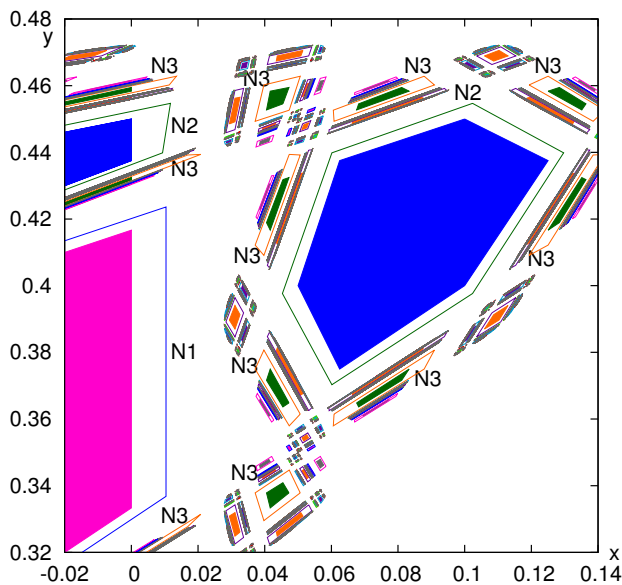


Fig.37 島の近傍であるとみなした範囲.

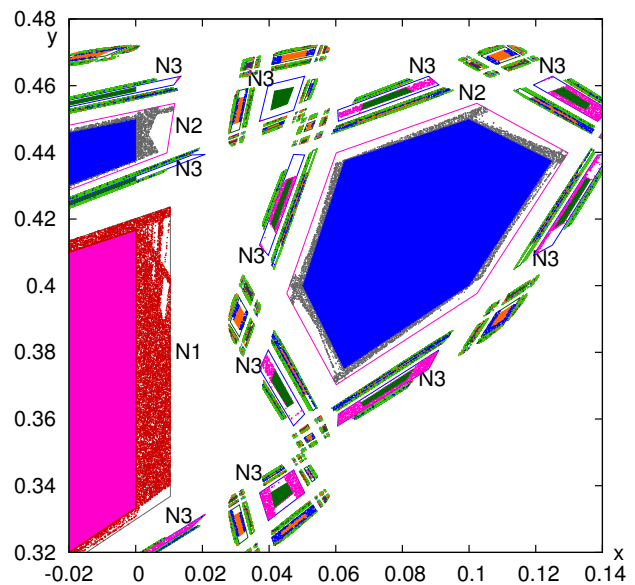


Fig.38 軌道が近傍に一定時間留まったときに plot.

のように定義した. その計算結果が Fig.39 である.  $\tau = 0$  の部分しかはっきりとした peak が見られないため, 階層の滞在順序は全くの random であると言える. すなわち, 階層性自体が, chaos 軌道の遅い運動をもたらしている訳ではないことを, はっきりと示しているのである.

これらの解析から得られる結論は, 指数  $-2$  での冪的減衰は, 階層性の存在によりもたらされるのではなく, 単純に島が存在することが原因となっているということである. なぜなら, chaos 軌道が深い階層に潜り込むときに, 浅い階層を経由することで, より長い再帰時間を稼いでいるのではなく, 単に島の周りに stick する挙動だけが再帰時間を延長しているからである. そして階層性は, 再帰時間を延ばして分布に冪的減衰をもたらす代わりに, 通過確率分布の係数  $C_{\sigma_t}$  の大きさに階層性を与え, 通過確率の重合せもまた, (指数  $-2$  で冪的に減衰するような) 再帰確率に収束することを保証していると考えられる.

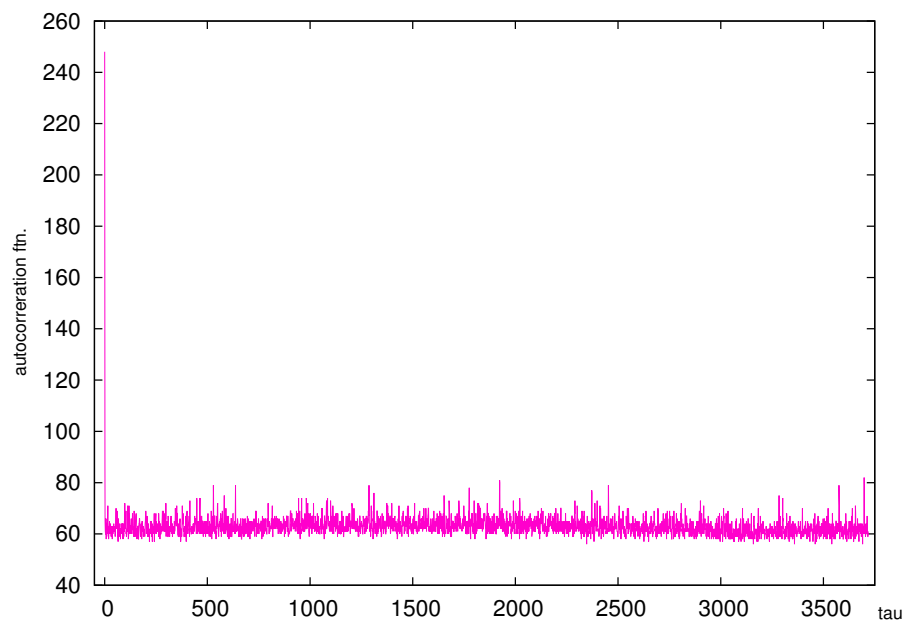


Fig.39 階層の滞在順序に対する自己相関関数  $\Psi(\tau)$ .

## 7 結論

本研究では、標準写像に区分線型化を施し、島が多角形となりながらも階層性を示す系について、記号列を用いて考察した。その結果、島の並び方についての階層性を、記号列の置換えによる階層性と結びつけることができた。記号列の置換え方は複数存在し、階層性の中にはいくつもの枝分かれが存在していた。そのような枝分かれの辿り方によっては、対応する島が存在しなくなる、記号列の **pruning** も存在することを確かめた。

これらの事実を利用して島が無限に存在することを証明した。証明にあたっては、記号列の置換え方について、単一の規則を繰返し施すことによって作られる記号列の系列に対して、対応する島々の座標が規則的となる事実を利用した。そのような島の系列に対して、階層の異なる島について、それぞれを定義する多角形同士を結ぶ一様な対応付けを見出す事実を用いた。そして、記号列の置換え方について、複数の規則を特定の組合せで適用した場合には、島が存在しなくなるような、**pruning** される記号列も存在するが、そのような記号列に関して、同様の議論が成立しない箇所を吟味して、証明の正当性を議論した。その結果、系列をなす島の辺または座標を推測できることと、異なる階層を結ぶ一定の対応付けの存在が、証明の本質であることが理解できた。

今回考察した写像は、特定の **parameter** で規則性が偶然に生じたような、全く構造安定的でない特殊な例である。したがって、生じる現象や保有する性質が、今回の写像に特有のものであるか、それとも島の階層性が現れる他の **parameter** や、他の写像の場合にも結びつく通有的なものかはわからない。それでも、島が無限に存在することの証明の可能性については、今回の証明と類似した方法を用いれば、たとえ島が多角形をなさなくとも、十分に期待しうる。ただし、一般的に島の並び方の規則性を見出すことが難しいため、今回の写像とは比べ物にならないほど困難であることは想像に難くない。

また、今回の写像における再帰時間分布は、階層性が存在しない区分線型写像の例で知られているのと同じ、指数  $-3$ （累積分布は  $-2$ ）での冪的減衰を示すことが確認できた。さらに、島に割り当てた記号列や、相空間上での場所を特定できた島を用いて、冪則が生じる原因となる、**chaos** 軌道の遅い運動を考察した。その結果、それぞれの島の周りに **chaos** 軌道がへばりついている様子は、単一の島が存在する場合と同様であった。そして、異なる階層の島へ **stick** する順序に全く規則性がないことが確認できた。これらの事実により、再帰時間分布の冪的減衰は、浅い階層から順番に辿って深い階層に到達するような、“階層性の存在”に起因するものではなく、単純に島へ **stick** することだけに由来することが確かめられた。

このことを確かめる際に、“島の近傍”とみなす範囲を、島をなす多角形の対角線の長さを定数倍に延長して **naive** に設定したが、その倍率に根拠はない。だから例えば、**chaos** 軌道がどれくらい島に近づいた時に、その島へ **stick** するのか、といった定量的な問いは未解決である。また、島の階層構造は、再帰時間分布の冪則に影響せず、再帰確率の分解である通過確率の分布の係数にこそ反映されていたものの、階層構造はさらに他のどのような性質に影響し、どのような性質に寄与しないのかは、まだまだ研究の余地が残る。しかし、今回の系は、そもそも島が多角形をなしていること、そして記号列での詳細な分析ができたことにより、かなり詳細に相空間上の様子を解明できた、非常に特殊でありながら様々な考察が可能な例である。だから、さらに分析を行えば、この系についてもまだまだ新しい事実が得られ、以上のような問いにも答えられる可能性もあるだろう。

## 謝辞

本論文の執筆にあたっては、非常に多くの方のご協力を賜りました。指導教官の首藤啓教授には、研究課題の設定に始まり、本論文の執筆に至るまで、いつも丁寧なご指導と的確な助言を頂きました。研究だけでなく進路などに関しても、快く相談に乗ってくださいました。本当に感謝しております。田中篤司助教には、計算機の管理をはじめ研究環境の整備をして下さったおかげで、研究を滞りなく進めることが出来、非常に感謝しております。赤石暁助教には、本研究の基礎にあたる研究をされていたこともあって共同して研究を進めて下さり、初歩的な部分から理論の細部に至るまで、辛抱強く懇切丁寧に議論や考察をして頂きました。計算に関しても、役立つ方法や助言を数多く頂いており、あらゆる面での多大なご協力に、心からお礼申し上げます。花田康高先輩には、私の卒業研究のときから同室でお世話になり、研究生活でいつも細やかな気配りをして下さったことに大変感謝しています。非線形物理研究室の皆様には、日頃のセミナーで、型に嵌らない私と根気よく議論して下さい、本当に感謝しています。ありがとうございました。

最後に、学生生活のいたるところで得た知見や気づきの有機的な結びつきなしには、本論文の完成はありえず、大学内外で出会ったあらゆる人々に対して、深い敬意と感謝の意を表します。

## 付録 A 区分線型写像の変数変換

標準写像 (1.7) を区分線型化して得られる写像 (2) に対して, 次の変数変換 (A.1) を行う.

$$(A.1) \quad x = \eta + \frac{1}{4}, \quad y = \eta - \xi$$

これを式 (2) へ代入すると,

$$(A.2) \quad \begin{cases} \eta' + \frac{1}{4} = \eta + \frac{1}{4} + \eta' - \xi' \\ \eta' - \xi' = \eta - \xi + Kf\left(\eta + \frac{1}{4}\right) \end{cases} \pmod{1}$$

となる. 第 1 式より

$$(A.3) \quad \xi' = \eta \pmod{1}$$

となる. ここで,

$$(A.4) \quad \begin{aligned} f\left(\eta + \frac{1}{4}\right) &= \begin{cases} -\left(\eta + \frac{1}{4}\right) & \text{where } \left(\eta + \frac{1}{4}\right) \in \left[0, \frac{1}{4}\right) \\ -\frac{1}{4} + \left(\eta + \frac{1}{4}\right) & \text{where } \left(\eta + \frac{1}{4}\right) \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) \\ 1 - \left(\eta + \frac{1}{4}\right) & \text{where } \left(\eta + \frac{1}{4}\right) \in \left[\frac{3}{4}, 1\right) \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\eta - \frac{1}{4} & \text{where } \eta \in \left[-\frac{1}{4}, 0\right) \\ \eta - \frac{1}{4} & \text{where } \eta \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ -\eta + \frac{3}{4} & \text{where } \eta \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\eta - \frac{1}{4} & \text{where } \eta \in \left[-\frac{1}{4}, 0\right) \\ \eta - \frac{1}{4} & \text{where } \eta \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ -(\eta + 1) + \frac{3}{4} & \text{where } (\eta + 1) \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\eta - \frac{1}{4} & \text{where } \eta \in \left[-\frac{1}{4}, 0\right) \\ \eta - \frac{1}{4} & \text{where } \eta \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ -\eta - \frac{1}{4} & \text{where } \eta \in \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) \end{cases} = g(\eta) \end{aligned}$$

となるので, 式 (A.3) と式 (A.4) を (A.2) の第 2 式へ代入して,

$$(A.5) \quad \eta' = -\xi + 2\eta + Kg(\eta) \pmod{1}$$

となる. 従って,  $A = K$  と置換えることで,

$$(A.6) \quad F_A : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ -x + 2y + Ag(y) \end{pmatrix} \pmod{1}$$

を得る. これは望んでいた写像 (3.1) である.



## 付録 B 区分線型写像の対称性

区分線型写像 (3.1) の相空間は 直線  $x = y$  に対して対称である. 実際,

$$(B.1) \quad S : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

を定義すると,

$$(B.2) \quad \begin{aligned} S \circ F_A \circ S \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= S \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \pm A \end{bmatrix} S \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -A/4 \end{pmatrix} \right\} \\ &= S \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 \pm A & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -A/4 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \pm A & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -A/4 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= F_A^{-1} \begin{pmatrix} -A/4 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり,

$$(B.3) \quad S \circ F_A \circ S \equiv F_A^{-1}$$

を満たす. これは,  $F_A$  が相空間上に何らかの構造を作り出すとき,  $F_A^{-1}$  が直線  $x = y$  に対して対称な位置に, 全く同じ構造を作ることを意味する. 式 (B.3) の関係は *S-reversibility* と呼ばれる [5].

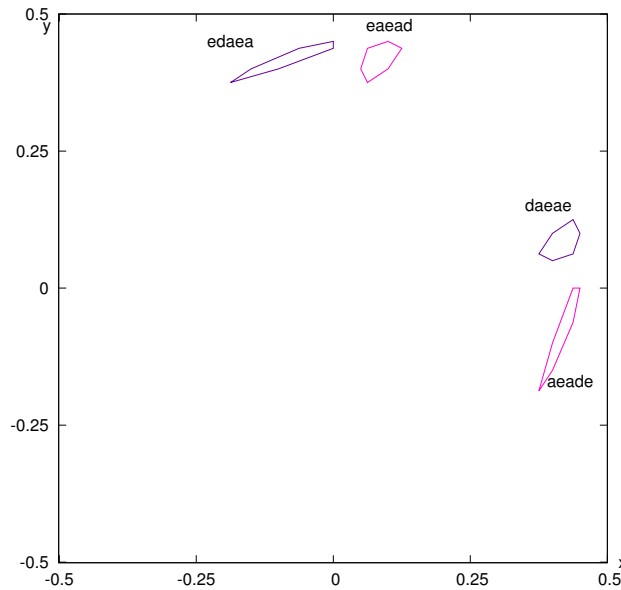


Fig.40 “eaead” の島は  $F_1$  によって “aeade” の島へうつる.  $x = y$  に対して, “eaead” の島と対称の位置にある “daee” の島は  $S \circ F_1 \circ S \equiv F_1^{-1}$  によって “edaea” の島へうつる.

## 付録 C 凸多角形領域を定義する全ての不等式の中から、辺をなす式を見つける方法

式 (5.22) で与えられる領域  $\mathcal{D}_{\sigma_n s_n}$  について、領域  $\mathcal{D}_{\sigma_n s_n}$  を定義する全ての不等式を式 (5.21) のように全て書下したときに、 $\mathcal{D}_{\sigma_n s_n}$  の辺をなす不等式を見つける必要がある。そのための **algorithm** を記述する。

一般に、凸  $p$  角形領域  $\mathcal{D}$  が  $q$  個の不等式 ( $p \leq q$ ) で定義されているときを考えればよい。  $J_k \in \mathbb{R}^3$  とし、

$$(C.1) \quad \begin{aligned} \mathcal{D} &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid J_1 \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} > 0, \dots, J_p \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} > 0, J_{p+1} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} > 0, \dots, J_q \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} > 0 \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid J_1 \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} > 0, \dots, J_p \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} > 0 \right\} \end{aligned}$$

であるとき、 $J_1, \dots, J_p$  と  $J_{p+1}, \dots, J_q$  を、各 **vector**  $J_k$  の具体的な値だけを用いて区別する問題に帰着される。このとき、 $J_1, \dots, J_p$  を“**essential** な不等式”、 $J_{p+1}, \dots, J_q$  を“**redundant** な不等式”と呼ぶことにする。むしろ実際には、領域  $\mathcal{D}$  を定義する不等式  $1, \dots, p, \dots, q$  に順序は無く、説明の便宜のために番号を付した。

まず、 $J_1 \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} > 0, \dots, J_q \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} > 0$  の中で、重複したものがあれば、1 つを除いてそれらは **redundant** であり、以下の議論では重複を排除する。また、係数の **vector** について  $J_k = -J_l$  となる組合せがあれば、領域が存在しないことは明らかなので、以下の議論では取扱わない。

次に、直線  $J_k \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} = 0$  と  $J_l \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} = 0$  の交点を  $U_{k,l}$  と表す。2 つの不等式がなす交点のうち、“**essential** な不等式” 同士の交点を“**valid** な交点”と呼び、それ以外を全て“**invalid** な交点”と呼ぶことにする。2 つの式  $J_k, J_l$  を選び、交点  $U_{k,l}$  を方程式

$$(C.2) \quad \begin{cases} J_k \begin{pmatrix} U_{k,l} \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \\ J_l \begin{pmatrix} U_{k,l} \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

を解いて求める。この交点が、他の  $J_m \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} > 0$  ( $m \neq k, l$ ) の式を満たすかどうかを調べる。

1. そもそも  $U_{k,l}$  を求められない<sup>\*1</sup>, すなわち  $J_k, J_l$  が平行な場合、交点  $U_{k,l}$  は **invalid** となる。
2.  $J_m \begin{pmatrix} U_{k,l} \\ -1 \end{pmatrix} < 0$  となるような式  $J_m$  が 1 つでもあれば、交点  $U_{k,l}$  は **invalid** となる。
3. すべての  $J_m$  ( $m \neq k, l$ ) について  $J_m \begin{pmatrix} U_{k,l} \\ -1 \end{pmatrix} \geq 0$  となれば、交点  $U_{k,l}$  は **valid** となる。

すなわち、**valid** な交点とは、多角形の頂点に他ならない。もし領域  $\mathcal{D}$  が存在しなければ、この時点ですべての交点が **invalid** となる。なお、最後の不等式に等号がついていることに注意したい。

最後に、交点  $U_{k,l}$  すべての **validity** を計算したら、それぞれの直線  $J_k \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} = 0$  上にある交点  $U_{k,l}$  のうち、**valid** なものの個数を数える。

1. **valid** な交点が高々 1 つなら、不等式  $J_k \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} > 0$  は **redundant** となる。
2. **valid** な交点が 2 つあれば、不等式  $J_k \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{pmatrix} > 0$  は **essential** となる。

**valid** な交点が 1 つしかない直線は、3 つ以上の直線がその交点を通る場合などに生じ、そのような直線を除外するためにこの手続きが必要である。多角形のすべての辺が、必ず 2 つの頂点を持つという性質から、多角形の辺をなす式だけを選び出せる。

<sup>\*1</sup> 同次座標系において、“無限遠点で交差する”と考えることもできるが、いずれにせよ **invalid** となる。

## 参考文献

- [1] Robert L. Devaney, 後藤憲一 訳, “カオス力学系入門 第 2 版”, 共立出版 (2003)
- [2] 小西哲郎, “ハミルトン力学系のカオス”, 首都大学東京 集中講義「物理学特別講義 I」 (2011)
- [3] E.G. Altmann, J.S.E. Portela and T Tél, “Leaking Chaotic Systems”, Rev. Mod. Phys. **85**, 869 (2013)
- [4] A. Akaishi and A. Shudo, “Accumulation of unstable periodic orbits and the stickiness in the two-dimensional piecewise linear eq”, Phys. Rev. E **80** 066211 (2009)
- [5] Maciej Wojtkowski, “A Model Problem with the Coexistence of Stochastic and Integrable Behaviour”, Commun. Math. Phys. **80**, 453-464 (1981)
- [6] 國府寛司, “力学系の基礎”, 朝倉書店 (2000)
- [7] James D. Meiss, Edward Ott, “Markov-Tree Model of Intrinsic Transport in Hamiltonian Systems”, Phys. Rev. Lett. **55**, 2741-2744 (1985)

以上