スピノル群の極大対蹠的部分群について

鈴木 類
(首都大学東京理工学研究科数理情報科学専攻)

目 次

1 序文

M が Riemann 対称空間とは連結 Riemann 多様体 M の任意の点 $p \in M$ に対して、点対称 s_p という対合的等長変換で p が s_p の孤立不動点となるものが存在することをいう。Riemann 対称空間 M の部分集合 S が対蹠集合

であるとは、任意の 2 点 $p, q \in S$ に対して、$s_p(q) = q$ が成立することをいう。対蹠集合の濃度の上限を M の 2-number という。2-number は有限であり、2-number を与える対蹠集合を大対蹠集合という。これらの概念は Chen - Nagano[1] によって導入された。また、コンパクト連結 Lie 群は Riemann 対称空間になることが分かり、本修士論文ではコンパクト連結 Lie 群であるスピノル群 $Spin(n)$ の対蹠集合の性質を考察することにした。そこで田崎博之氏 [10] による有向実グラスマン多様体の極大な対蹠的部分集合の分類や鈴木絢人氏 [11] による $Spin(n)$ の極大対蹠的部分集合と位数が 4 の倍数の部分集合全体 $P(n)$ の極大対蹠的部分集合との対応等の研究を参考にし、$P(n)$ の極大対蹠的部分集合の分類を詳しく考察した。結果として次が得られた。(記号の説明は 14, 35, 40, 62 ページを参照)

n	$P(n)$ の極大対蹠的部分集合
$4, 5$	$A(4,4)$
6	$A(4,6)$
7	$B(4,7)$
$8, 9$	$A_{15,1}$
10	$A_{15,1}, A_{15,2}$
11	$A_{15,1}, A_{15,2}, A_{15,3}$

これにより、$n = 11$ までの $Spin(n)$ の極大対蹠的部分群の合同類を全て得ることができ、$P(n)$ の極大対蹠的部分集合と $Spin(n)$ の極大対蹠的部分群が対応していることが分かった。さらにこの分類により $n = 11$ まで $Spin(n)$ の極大対蹠的部分群が全て同じ元の個数を持つことが分かった。また、$n = 10, 11$ の場合に互いに合同にならない大対蹠集合が見つかった。

2 Riemann 対称空間

定義 2.1 M を連結 Riemann 多様体とする。M が **Riemann 対称空間**であるとは任意の $p \in M$ に対して、点対称なる s_p が存在することである。s_p が p における点対称とは、s_p が M の対合的等長変換であり、p が s_p の孤立不動点となることである。

例 2.1 $\mathbb{R}^n$ は $p \in \mathbb{R}^n$ に対して $s_p(x) = 2p - x$ $(x \in M)$ と定義することで Riemann 対称空間になる。

例 2.2 n 次元球面 S^n は $x \in S^n$ に対して $s_x(y) = -y + 2\langle x, y\rangle x$ $(y \in S^n)$ と定義することで Riemann 対称空間になる。ここで、$\langle , \rangle$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の標準内積を表わしている。

命題 2.1 G をコンパクト連結 Lie 群とする。このとき、G は Riemann 対称空間になる。

証明 $e \in G$ を単位元とする。$s_e(x) = x^{-1}$ と定める。任意の $p \in G$ における点対称は、

$$s_p(x) = L_p \circ s_e \circ L_{p^{-1}}(x) = px^{-1}p$$

と定める。よって

$$s_p^2(x) = s_p(px^{-1}p) = p(p^{-1}xp^{-1})p = x$$

となり、s_p は対合的である。また、

$$s_p(p) = pp^{-1}p = p$$

そして、 $(ds_p)_p$ を計算すると、$\forall v \in T_pG$ に対し、

$$\begin{aligned}(ds_p)_p(v) &= (dL_p)_e \circ ds_e \circ (dL_{p^{-1}})_p(v) \\ &= -(dL_p)_e \circ (dL_{p^{-1}})_p(v) \\ &= -v\end{aligned}$$

となり、p は s_p の孤立不動点となるので、点対称となり、G は Riemann 対称空間になる。 □

3 極地と対蹠集合

定義 3.1 M を Riemann 対称空間とし、s_x を点 $x \in M$ における点対称とする。$S \subset M$ が**対蹠集合**であるとは、任意の $x, y \in S$ に対して, $s_x(y) = y$ が成り立つことである。M の対蹠集合の濃度の上限を **2-number** といい、$\sharp_2 M$ と表す。2-number を与える対蹠集合を M の**大対蹠集合**という。

2-number が有限であることは後で示す。

例 3.1 n 次元球面 S^n の点 x に対して、$\{x, -x\}$ が S^n の大対蹠集合になる。

定義 3.2 M をコンパクト Riemann 対称空間とする。点 $x \in M$ における点対称 s_x の固定点全体 $F(s_x, M)$ を次のような連結成分の合併に分解する。

$$F(s_x, M) = \bigcup_{k=0}^{r} M_k^+$$

この連結成分の一つ一つを M の**極地**という。極地が一点のみからなるときは**極**という。

例 3.2 n 次元単位球面 S^n の点 x に対して不動点集合は、$\{x, -x\}$ になることから、S^n の x に関する極地は $\{x\}$ と $\{-x\}$ であり、共に極である。

命題 3.1 コンパクト Riemann 対称空間 M とその極地 $M_0^+, M_1^+, \dots, M_r^+$ に対し、

$$\sharp_2 M \leq \sum_{k=0}^{r} \sharp_2 M_k^+$$

が成り立つ。

証明 点 $o \in M$ に関する極地を $M_0^+, M_1^+, \dots, M_r^+$ とする。o を含む M の対蹠集合を S とすると $S \subset F(s_o, M)$ が成り立つので、

$$S = \bigcup_{k=0}^{r} (S \cap M_k^+)$$

となる。$S \cap M_k^+$ は M_k^+ の対蹠集合になるので次が得られる。

$$\sharp S = \sum_{k=0}^{r} (S \cap M_k^+) \leq \sum_{k=0}^{r} \sharp_2 M_k^+$$

$\sup \sharp S = \sharp_2 M$ より、

$$\sharp_2 M \leq \sum_{k=0}^{r} \sharp_2 M_k^+$$

が成り立つ。 □

命題 3.2 コンパクト Riemann 対称空間の対蹠集合は有限集合になる。また、2-number も有限になる。

証明 S をコンパクト Riemann 対称空間 M の対蹠集合とする。点 $x \in S$ とすると $S \subset F(s_x, M)$ が成り立つ。x は $F(s_x, M)$ の孤立点であるので、x は S の孤立点になる。よって、S は離散集合となるので、有限集合になる。
命題 2.1 より、$M_0^+, M_1^+, \dots, M_r^+$ を M の極地とすると

$$\sharp_2 M \leq \sum_{k=0}^{r} \sharp_2 M_k^+$$

が成り立つ。この M_k^+ が極の場合は $\sharp_2 M_k^+ = 1$ であるので、極地をとる操作が終了する。M_k^+ が極でない場合、$o_k \in M_k^+$ をとり、さらに極地

$$F(s_{o_k}, M_k^+) = \bigcup_{j=0}^{r_k} (M_k^+)_j^+$$

を定める。すると同様に

$$\sharp_2 M_k^+ \leq \sum_{j=0}^{r_k} \sharp_2 (M_k^+)_j^+$$

が成り立つ。Riemann 対称空間に対し、その極地は次元が小さくなるので、このような極地をとる操作を有限回続けると極になる。よって、$\sharp_2 M < \infty$ であることがわかる。 □

命題 3.3 S をコンパクト Riemann 対称空間 M の大対蹠集合としたとき、S は極大な対蹠集合である。

証明 A を $S \subset A$ を満たす M の対蹠集合と仮定する。よって、$\sharp S \leq \sharp A$ が成り立つ。また、S は大対蹠集合であったので $\sharp_2 M = \sharp S$ であることから、$\sharp S = \sharp A$ である。したがって、仮定の $S \subset A$ より $A = S$ である。 $\square$

系 3.1 ([11]) .

(A) $X := \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \pm 1 \end{pmatrix} \middle| \text{対角成分の} -1 \text{が偶数個} \right\}$
は $SO(n)$ の大対蹠集合である。

(B) 任意の $SO(n)$ の対蹠集合に対し、それを含むような $SO(n)$ の大対蹠集合が存在する。

(C) $SO(n)$ の単位元を含むような任意の大対蹠集合は (1) の X と共役である。

補題 3.1 ([1]) .
G をコンパクト連結リー群とし、S を G の単位元 e を含む対蹠集合とする。このとき、次が成り立つ。

(1) 任意の $x \in S$ に対し、$x = x^{-1}$ が成立。

(2) S の任意の 2 つの元は可換。

証明 (1) S は対蹠集合なので、任意の $x \in S$ に対して $s_e(x) = x$ となる。また、コンパクトリー群の点対称の定義より、$s_e(x) = ex^{-1}e = x^{-1}$ となる。したがって $x = x^{-1}$ が成立。

(2) S は対蹠集合なので、任意の元 $x, y \in S$ に対して、$s_x(y) = y$ が成り立つ。また、コンパクトリー群の点対称の定義より、$s_x(y) = xy^{-1}x$ が成り立つ。したがって $y = xy^{-1}x$ となり、$x^{-1}y = y^{-1}x$ となる。 ここで (1) を用いると、$xy = yx$ となる。

$\square$

4 $P_k(n)$ の極大対蹠的部分集合

ここで田崎博之氏の有向実グラスマン多様体の対蹠集合 ([10]) について少し触れたい。

まず記号の定義をしておく。
$Inc_k(n) := \{\alpha : \{1,2,\cdots,k\} \to \{1,2,\cdots,n\} \mid \alpha(1) < \alpha(2) < \cdots < \alpha(k)\}$
$P_k(n) := \{A \subset \{1,2,\cdots n\} \mid \sharp A = k\}$
したがって、$\alpha \in Inc_k(n)$ と $\{\alpha(1),\cdots\alpha(k)\} \in P_k(n)$ を対応させることで、$Inc_k(n)$ と $P_k(n)$ を同一視することができる。

定義 4.1 $\alpha, \beta \in P_k(n)$ が**対蹠的**であるとは、$\sharp(\beta - \alpha)$ の位数が偶数個であることである。
また $P_k(n)$ の部分集合 A が**対蹠的**であるとは、A の任意の元 $\alpha, \beta \in A$ が対蹠的であることである。

また、$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ は $\mathbb{R}^n$ の k 次元部分有向ベクトル空間が構成する有向実グラスマン多様体を表わしている。また、$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ は外積 $\bigwedge^k \mathbb{R}^n$ への自然な埋め込みを持つので次が成り立つ。

補題 4.1 $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ の任意の対蹠集合 S に対して、$\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $v_1, \ldots, v_n$ が存在し、

$$S = \{\pm v_{\alpha(1)} \wedge \ldots \wedge v_{\alpha(k)} \mid \alpha \in Inc_k(n)\},$$

を満たす。

$\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $\boldsymbol{v} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ と $P_k(n)$ の部分集合 A に対して、

$$\mathcal{A}_{\boldsymbol{v}}(A) = \{\pm v_{\alpha(1)} \wedge \ldots \wedge v_{\alpha(k)} \mid \alpha \in A\}.$$

と定義する。

定理 4.1 (1) $v_1, \ldots, v_n$ を $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底とし、A を $P_k(n)$ の極大対蹠的部分集合とする。このとき、$\mathcal{A}_{\boldsymbol{v}}(A)$ が $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ が極大対蹠集合となる。

(2) $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ の極大対蹠集合 S に対して、$\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $v_1, \ldots, v_n$ が存在し、$S = \mathcal{A}_{\boldsymbol{v}}(A)$ を満たすような $P_k(n)$ の極大対蹠的部分集合 A が存在する。

(3) $P_k(n)$ の極大対蹠的部分集合の合同類全体と、$\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ が極大対蹠集合の合同類全体が全単射の関係となる。

証明 (2) から示す。補題 4,2 から存在が分かっている $A \subset P_k(n)$ が極大な対蹠的部分集合であることを示す。$\mathcal{A}_{\boldsymbol{v}}(A)$ は $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ の対蹠集合であったので A は対蹠的部分集合である。$B \subset P_k(n)$ を $A \subset B$ を満たす対蹠的部分集合とする。$A \subset B \subset P_k(n)$ ならば $\mathcal{A}_{\boldsymbol{v}}(A) \subset \mathcal{A}_{\boldsymbol{v}}(B)$ であり、$\mathcal{A}_{\boldsymbol{v}}(A)$ は $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ の極大対蹠集合であったので、$\mathcal{A}_{\boldsymbol{v}}(A) = \mathcal{A}_{\boldsymbol{v}}(B)$ である。よって $A = B$ とな

り、A は $P_k(n)$ の極大な対蹠的部分集合となる。
次に (1) を示す。$\mathcal{A}_{\boldsymbol{v}}(A)$ は $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ の対蹠集合である。S を $\mathcal{A}_{\boldsymbol{v}}(A)$ を含む $\tilde{G}_k(\mathbb{R}^n)$ の極大対蹠集合とする。すると (2) より $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $\tilde{\boldsymbol{v}} = \tilde{v_1}, \ldots, \tilde{v_n}$ が存在し、$S = \mathcal{A}_{\tilde{\boldsymbol{v}}}(B)$ を満たすような $P_k(n)$ の極大対蹠的部分集合 B が存在する。よって $S = \mathcal{A}_{\tilde{\boldsymbol{v}}}(B) \subset \mathcal{A}_{\boldsymbol{v}}(A) = \mathcal{A}_{\tilde{\boldsymbol{v}}}(\tilde{A})$ となる $\tilde{A}$ が存在する。$\tilde{A} \subset B \subset P_k(n)$ ならば $\tilde{A} = B$ であればよいので、$\tilde{A}$ が $P_k(n)$ の極大対蹠的部分集合であることを示す。ここで次を用意する。

補題 4.2 $A \subset P_k(n)$ が極大対蹠的であるという性質は合同変換で不変

よって、$P_k(n)$ の部分集合 A と $\tilde{A}$ が合同であることを示せればよい。つまり次の補題が成り立つことを示す。

補題 4.3 $\boldsymbol{v} = v_1, \ldots, v_n, \tilde{\boldsymbol{v}} = \tilde{v_1}, \ldots, \tilde{v_n}$ を $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底とし、$A, \tilde{A} \subset P_k(n)$ とする。このとき

$$\mathcal{A}_{\boldsymbol{v}}(A) \cong \mathcal{A}_{\tilde{\boldsymbol{v}}}(\tilde{A}) \Leftrightarrow A \cong \tilde{A}$$

が成り立つ。

証明 ($\Leftarrow$):
仮定より、$gv = \tilde{v}$ を満たす $g \in O(n)$ が存在する。よって

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\tilde{\boldsymbol{v}}}(\tilde{A}) &= \{\pm\tilde{v}_{\alpha(1)} \wedge \cdots \tilde{v}_{\alpha(k)} \mid \alpha \in \tilde{A}\} \\
&= \{\pm g v_{\alpha(1)} \wedge \cdots \wedge g v_{\alpha(k)} \mid \alpha \in \tilde{A}\} \\
&= g\{\pm v_{\alpha(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\alpha(k)} \mid \alpha \in \tilde{A}\} \\
&= g\{\pm v_{\alpha(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\alpha(k)} \mid \sigma\beta \in \sigma(A)\}(\beta \in A) \\
&= g\{\pm v_{\sigma\beta(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma\beta(k)} \mid \beta \in A\} \\
&= g\sigma\{\pm v_{\beta(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\beta(k)} \mid \beta \in A\} \\
&= g\sigma(\mathcal{A}_{\boldsymbol{v}}(A))
\end{aligned}$$

となる。また基底の一つ一つの向きを変えられるので $g\sigma \in SO(n)$ と取れる。よって

$$\mathcal{A}_{\boldsymbol{v}}(A) \cong \mathcal{A}_{\tilde{\boldsymbol{v}}}(\tilde{A})$$

が成り立つ。
($\Rightarrow$):
$A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}, \tilde{A} = \{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$ とする。仮定より、

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\boldsymbol{v}}(A) &= \{\pm v_{\alpha(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\alpha(l)} \mid \alpha \in A\} \\
&= \{\pm v_{\alpha_1(1)} \wedge v_{\alpha_1(l)}, \ldots, \pm v_{\alpha_k(1)} \wedge v_{\alpha_k(l)}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\tilde{\boldsymbol{v}}}(\tilde{A}) &= \{\pm\tilde{v}_{\beta(1)} \wedge \cdots \wedge \tilde{v}_{\beta(k)} \mid \beta \in \tilde{A}\} \\
&= \{\pm\tilde{v}_{\beta_1(1)} \wedge \tilde{v}_{\beta_1(l)}, \ldots, \pm\tilde{v}_{\beta_k(1)} \wedge \tilde{v}_{\beta_k(l)}\}
\end{aligned}$$

となり、これらは合同であるから、ある $g \in SO(n)$ が存在し、

$$\begin{aligned}\sigma(\mathcal{A}_{\boldsymbol{v}}(A)) &= g\mathcal{A}_{\tilde{\boldsymbol{v}}}(\tilde{A}) \\ &= \{\pm g\tilde{v}_{\beta(1)} \wedge \cdots \wedge g\tilde{v}_{\beta(k)} \mid \beta \in \tilde{A}\}\end{aligned}$$

を満たす。よって基底を $\{g\tilde{v}_1, \ldots, g\tilde{v}_n\}$ と取りなおすことで、

$$\mathcal{A}_{\boldsymbol{v}}(A) = \mathcal{A}_{\tilde{\boldsymbol{v}}}(\tilde{A})$$

として議論してよい。
ここで $\{\pm v_{\alpha_1(1)} \wedge v_{\alpha_1(l)}, \ldots, \pm v_{\alpha_k(1)} \wedge v_{\alpha_k(l)}\}$ がそれぞれ張る部分空間を $V_1^{\pm}, \cdots, V_k^{\pm}$ とする。同様に $\{\pm \tilde{v}_{\beta_1(1)} \wedge \tilde{v}_{\beta_1(l)}, \ldots, \pm \tilde{v}_{\beta_k(1)} \wedge \tilde{v}_{\beta_k(l)}\}$ が張る部分空間をそれぞれ $\tilde{V}_1^{\pm}, \cdots, \tilde{V}_k^{\pm}$ とする。このとき、

$$\mathbb{R}^n = (V_1 \wedge \cdots \wedge V_k) \oplus (V_1 \wedge V_2^{\perp} \wedge V_3 \wedge \cdots \wedge V_k) \oplus \cdots \oplus (V_1^{\perp} \wedge \cdots \wedge V_k^{\perp})$$

$$\mathbb{R}^n = (\tilde{V}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{V}_k) \oplus (\tilde{V}_1 \wedge \tilde{V}_2^{\perp} \wedge \tilde{V}_3 \wedge \cdots \wedge \tilde{V}_k) \oplus \cdots \oplus (\tilde{V}_1^{\perp} \wedge \cdots \wedge \tilde{V}_k^{\perp})$$

と分解でき、一致していることが分かる。そして各部分空間の中で直交変換を施して、二つの基底を重ね合わせることができる。この直交変換により、$\mathcal{A}_{\boldsymbol{v}}(A)$ 及び $\mathcal{A}_{\tilde{\boldsymbol{v}}}(\tilde{A})$ の元は固定されていることから、あとは基底の順序の違いが残っているので $A \cong \tilde{A}$ である。($\sigma \in \mathrm{Sym}(n)$ が存在し、$\sigma(A) = \tilde{A}$ を満たす。) □

よって補題 4.3 が成り立つので、定理 4.1 の (2) が成立する。(3) は (1), (2) から分かる。 □

$P_k(n)$ における極大対蹠的部分集合の全ての合同類を分類していきたい。

補題 4.4 ([10]) . $P_k(n)$ の部分集合 A に対し、

$A \subset P_k(n)$ が対蹠的 $\Longleftrightarrow$ $A^c = \{\alpha^c \mid \alpha \in A\} \subset p_{n-k}(n)$ が対蹠的である。

が成立する。さらに

A が $P_k(n)$ の極大対蹠的部分集合 $\Longleftrightarrow$ A^cが $P_{n-k}(n)$ の極大対蹠的部分集合

が成立する。

証明 ($\Rightarrow$) 仮定から任意の $\alpha, \beta \in A$ に対し、$\sharp(\alpha \cap \beta)$ が偶数となる。また任意の $\alpha, \beta \in P_k(n)$ に対して、$\beta - \alpha = \alpha^c - \beta^c$ が成り立つので、$\sharp(\beta - \alpha) = \sharp(\alpha^c - \beta^c)$ となり $\sharp(\alpha^c \cap \beta^c)$ は偶数になる。
($\Leftarrow$) 仮定より任意の $\alpha, \beta \in A$ に対し、$\sharp(\alpha^c \cap \beta^c)$ は偶数になる。$\beta - \alpha = \alpha^c - \beta^c$ が成り立つので $\sharp(\alpha \cap \beta)$ が偶数となる。 □

定義 4.2 $P_k(n)$ の 2 つの部分集合 $X, Y \in P_k(n)$ が**合同**であるとは、X を Y に写すような $\mathrm{Sym}(n)$ の元が存在することである。

ここで $P_k(n)$ の極大対蹠的部分集合を求める手順を決めたい。

(1) まず $P_k(n)$ の最小元 A_1 を取る。

(2) 次に A_i に対して、 A_{i+1} を次の手続きで定める。

(3) 固定部分群 $S(A_i) := \{g \in \mathrm{Sym}(n) \mid g(A_i) = A_i\}$ とする。

(4) $A(A_i) = \{\alpha \in P_k(n) - A_i \mid A_i \cup \{\alpha\}$ が対蹠的である $\}$ とする。

(5) $A(A_i) = \displaystyle\bigcup_{1 \leq a \leq j} O_a$ と $S(A_i)$ の軌道の和に分解する。

(6) $1 \leq a \leq j$ を選び、O_a の最小元 α_a とすると A_i に付け加えて $A_{i+1,\alpha} := A_i \cup \{\alpha_a\}$ が得られる。

(7) これを A_i が $P_k(n)$ の極大対蹠的部分集合になるまで繰り返す。すなわち、$A(A_i) = \phi$ となるまで繰り返す。

補題 4.5 ([10]) . 上の手続きにより $P_k(n)$ の合同類が全て得られる。

証明 A : $P_k(n)$ の極大対蹠的部分集合とする。まず、$A_1 \subset g(A)$ となる $g \in \mathrm{Sym}(n)$ が存在する。ここで、A と $g(A)$ は合同であるから、極大対蹠的部分集合の合同類を決定するためには、$A_1 \subset A$ と仮定しても一般性を失わない。次に α_a を $A(A_1)$ の $S(A_1)$ の軌道 O_a の最小元とする。よって $\alpha_a \in g(A)$ を満たす $g \in S(A_1)$ が存在する。またこの $g \in S(A_1)$ に対しても $A_1 \subset A$ より、$A_1 = g(A_1) \subset g(A)$ が成り立つので $A_{2,\alpha} = A_1 \cup \{\alpha_a\} \subset A$ である。この手続きを $A_i = A(i = \sharp A)$ となるまで繰り返すことができるので、$P_k(n)$ の合同類を全て得ることができる。 $\square$

系 4.1 ([10]) . $A(A_j)$ の部分集合 B が B の任意の元と B 以外の他の元とも対蹠的である場合、A_j に付け加えることができ、$A_{j+\sharp B} = A_j \cup B$ とできる。

命題 4.1 ([10]) . $\{\{1\}\}$ は $P_1(n)$ の極大対蹠的部分集合になり、$P_1(n)$ の全ての極大対蹠的部分集合はこれと合同である。

命題 4.2 ([10]) . l を自然数とし、 $A(2, 2l)$ をつぎのようにおく。

$$A(2, 2l) = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \ldots, \{2l-1, 2l\}\}$$

こう定義すると $A(2, 2[n/2])$ は $P_2(n)$ の極大対蹠的部分集合になり、$P_2(n)$ の全ての極大対蹠的部分集合はこれと合同である。

証明　異なる 2 つの元 $\alpha, \beta \in P_2(n)$ が対蹠的であるとは、$\alpha \cap \beta = \phi$ となることから、まず $A_1 = \{\{1,2\}\}$ をとり、 $A(A_1) = P_2(\{3,\ldots,n\})$ となる。これは $S(A_1)$ の軌道になっているので、 $A(A_1)$ の最小限 $\{3,4\}$ をとり、 A_1 に付け加えられる。よって $A_2 = \{\{1,2\},\{3,4\}\}$ が得られる。この手続きを

$$\{\{1,2\},\{3,4\},\ldots,\{2[n/2]-1, 2[n/2]\}\}$$

となるまで行えるので、これが $P_2(n)$ の極大対蹠的部分集合になる。またどの $P_2(n)$ の極大対蹠的部分集合もこれと合同になる。 $\square$

次に $P_3(n)$ の極大対蹠的部分集合をみていく。異なる 2 つの元 $\alpha, \beta \in P_3(n)$ が対蹠的であるとは、$\sharp(\alpha \cap \beta) = 1$ である。ここで次の 3 つの集合を定義する。

$A(3, 2l+1) = \{\{1,2,3\},\{1,4,5\},\ldots,\{1,2l,2l+1\}\}$
$B(3,6) = \{\{1,2,3\},\{1,4,5\},\{2,4,6\},\{3,5,6\}\}$
$B(3,7) = \{\{1,2,3\},\{1,4,5\},\{2,4,6\},\{3,5,6\},\{1,6,7\},\{2,5,7\},\{3,4,7\}\}$
これらはそれぞれ $P_3(2l+1)$, $P_3(6)$, $P_3(7)$ の対蹠的部分集合になっており、次の包含関係を満たしていることが分かる。

$$A(3,5) \subset B(3,6) \subset B(3,7)$$
$$A(3,5) \subset A(3,7) \subset B(3,7)$$

これより、次の定理の主張で $A(3,2l+1)$ が $P_3(2l+1)$ と $P_3(2l+2)$ の中で対蹠的であることをいうが、$A(3,5) \subset P_3(6)$ と $A(3,7) \subset P_3(7), P_3(8)$ は極大性を満たさないので例外であることが分かる。

定理 4.2 ([10]) . $l = [(n-1)/2]$ とする。このとき $P_3(n)$ の極大対蹠的部分集合は次のようになる。

n	
$3,4$	$A(3,3)$
5	$A(3,5)$
6	$B(3,6)$
$7,8$	$B(3,7)$
$8<n$	$A(3,2l+1), B(3,7)$

また、$P_3(n)$ のどの極大対蹠的部分集合もこれらと合同になる。

注意　ここで記号の定義をしておく。任意の部分集合 $A, B \subset X$ で $A \cap B = \phi$ を満たすものに対して、

$$P_k(A) \times P_l(B) := \{\alpha \cup \beta \mid \alpha \in P_k(A), \beta \in P_l(B)\} \subset P_{k+l}(X)$$

と定義する。2 つ以上の X の部分集合に対しても同様に $P_{k_1}(A_1) \times \cdots \times P_{k_l}(A_l)$ と定義する。

証明　手順に従って示す。まず $A_1 = \{\{1,2,3\}\}$ を取る。よって

$$A(A_1) = P_1(\{1,2,3\}) \times P_2(\{4,\ldots,n\})$$

となる。ここで $n \leq 4$ の場合は $A(A_1) = \phi$ となるので $A_1 = A(3,3)$ が $P_3(n)$ の極大対蹠的部分集合になる。

次に $n \geq 5$ の場合を考える。$S(A_1) = \mathrm{Sym}(\{1,2,3\}) \times \mathrm{Sym}(\{4,\ldots,n\})$ となるので $A(A_1)$ は $S(A_1)$ の軌道になる。よって $A(A_1)$ の最小元 $\{1,4,5\}$ を取り、A_1 に付け加えて $A_2 = \{\{1,2,3\},\{1,4,5\}\} = A(3,5)$ が得られる。

$$\begin{aligned} A(A_2) &= \{\alpha \in A(A_1) - \{1,4,5\} \mid \alpha\text{と } \{1,4,5\} \text{ が対蹠的 }\} \\ &= P_1(\{2,3\}) \times P_1(\{4,5\}) \times P_1(\{6,\ldots,n\}) \\ &\cup \ \ P_1(\{1\}) \times P_2(\{6,\ldots,n\}) \end{aligned}$$

となるので $n = 5$ の場合は $A(A_2) = \phi$ となるので $A_2 = A(3,5)$ が $P_3(5)$ の極大対蹠的部分集合になる。

次に $n \geq 6$ の場合を考える。$S(A_2)$ は 1 を固定し、$\{\{2,3\},\{4,5\}\}$ の置換を表わしているので、$P_1(\{2,3\}) \times P_1(\{4,5\}) \times P_1(\{6,\ldots,n\})$ と $P_1(\{1\}) \times P_2(\{6,\ldots,n\})$ に推移的に作用していることが分かる。つまりこれらは $S(A_2)$ の 2 つの軌道になっている。$n = 6$ の場合、2 つ目の軌道が空集合になるので $A(A_2) = P_1(\{2,3\}) \times P_1(\{4,5\}) \times P_1(\{6\})$ となる。$A(A_2)$ の最小元 $\{2,4,6\}$ を取り、A_2 に付け加えて $A_{3,1} = \{\{1,2,3\},\{1,4,5\},\{2,4,6\}\}$ が得られる。

$$\begin{aligned} A(A_{3,1}) &= \{\alpha \in A(A_2) - \{\{2,4,6\}\} \mid \alpha\text{と } \{2,4,6\} \text{ が対蹠的 }\} \\ &= \{\{3,5,6\}\} \end{aligned}$$

となるので $A_{3,1}$ に付け加えて

$$\{\{1,2,3\},\{1,4,5\},\{2,4,6\},\{3,5,6\}\} = B(3,6)$$

が得られ、これが $P_3(6)$ の極大対蹠的部分集合になる。

次に $n \geq 7$ の場合を考える。先ほどの $S(A_2)$ の 2 つの軌道

$$P_1(\{2,3\}) \times P_1(\{4,5\}) \times P_1(\{6,\ldots,n\})$$

$$P_1(\{1\}) \times P_2(\{6,\ldots,n\})$$

を場合分けして見ていく。

(1) $P_1(\{2,3\}) \times P_1(\{4,5\}) \times P_1(\{6,\ldots,n\})$ の最小元 $\{2,4,6\}$ を取り A_2 に加え、

$$A_{3,1} = \{\{1,2,3\},\{1,4,5\},\{2,4,6\}\}$$

が得られる。

$$\begin{aligned}
A(A_{3,1}) &= \{\alpha \in A(A_2) - \{\{2,4,6\}\} \mid \alpha \text{と } \{\{2,4,6\}\} \text{ が対蹠的 }\} \\
&= \{\{3,5,6\}\} \\
&\cup \quad P_1(\{2\}) \times P_1(\{5\}) \times P_1(\{7,\ldots,n\}) \\
&\cup \quad P_1(\{3\}) \times P_1(\{4\}) \times P_1(\{7,\ldots,n\}) \\
&\cup \quad P_1(\{1\}) \times P_1(\{6\}) \times P_1(\{7,\ldots,n\}) \\
&= \{\{3,5,6\}\} \\
&\cup \quad \{\{2,5\},\{3,4\},\{1,6\}\} \times P_1(\{7,\ldots,n\})
\end{aligned}$$

ここで $\{\{3,5,6\}\}$ は $A(A_{3,1})$ の他のどの元とも対蹠的なので $A_{3,1}$ に付け加えられる。よって

$$A_{4,1} = \{\{1,2,3\},\{1,4,5\},\{2,4,6\},\{3,5,6\}\} = B(3,6)$$

が得られる。そして

$$A(A_{4,1}) = \{\{2,5\},\{3,4\},\{1,6\}\} \times P_1(\{7,\ldots,n\})$$

である。$S(A_{4,1})$ は $\{\{2,5\},\{3,4\},\{1,6\}\}$ の置換を表わしているので $A(A_{4,1})$ に推移的に作用している。つまりこれが $S(A_{4,1})$ の軌道になっていることが分かる。$A(A_{4,1})$ の最小元 {1,6,7} を取り $A_{4,1}$ に加え、

$$A_{5,1} = \{\{1,2,3\},\{1,4,5\},\{2,4,6\},\{3,5,6\},\{1,6,7\}\}$$

が得られる。そして

$$A(A_{5,1}) = \{\{2,5,7\},\{3,4,7\}\}$$

である。この 2 つの元は対蹠的なので $A_{5,1}$ に付け加えられる。よって

$$\begin{aligned}
&\{\{1,2,3\},\{1,4,5\},\{2,4,6\},\{3,5,6\},\{1,6,7\},\{2,5,7\},\{3,4,7\}\} \\
&= B(3,7)
\end{aligned}$$

が得られ、これは $n \geq 7$ の場合の $P_3(n)$ の極大対蹠的部分集合になる。

(2) $P_1(\{1\}) \times P_2(\{6,\ldots,n\})$ の最小元 $\{1,6,7\}$ を取り A_2 に加え、

$$A_{3,2} = \{\{1,2,3\},\{1,4,5\},\{1,6,7\}\}$$

が得られる。

$$\begin{aligned} A(A_{3,2}) &= P_1(\{2,3\}) \times P_1(\{4,5\}) \times P_1(\{6,7\}) \\ &\cup P_1(\{1\}) \times P_2(\{8,\ldots,n\}) \end{aligned}$$

$S(A_{3,2})$ は 1 を固定し、$\{\{2,3\},\{4,5\},\{6,7\}\}$ の置換を表わしているので $P_1(\{2,3\}) \times P_1(\{4,5\}) \times P_1(\{6,7\})$ と $P_1(\{1\}) \times P_2(\{8,\ldots,n\})$ に推移的に作用していることが分かる。つまりこれらは $S(A_{3,2})$ の 2 つの軌道になっている。

$n \leq 8$ の場合は 2 つ目の軌道は空集合になり、$A(A_{3,2}) = P_1(\{2,3\}) \times P_1(\{4,5\}) \times P_1(\{6,7\})$ となる。最小元 $\{2,4,6\}$ を取り $A_{3,2}$ に加え、

$$A_{4,2} = \{\{1,2,3\},\{1,4,5\},\{1,6,7\},\{2,4,6\}\}$$

が得られる。そして

$$A(A_{4,2}) = \{\{2,5,7\},\{3,4,7\},\{3,5,6\}\}$$

であり、これらは互いに対蹠的なので $A_{4,2}$ に付け加えられ $B(3,7)$ を得る。(1) と同様にこれも極大対蹠的部分集合になり、これで $n \leq 8$ の場合の全ての $P_3(n)$ の極大対蹠的部分集合の合同類を得られた。

$n \geq 9$ の場合を考える。$S(A_{3,2})$ の 2 つの軌道

$$P_1(\{2,3\}) \times P_1(\{4,5\}) \times P_1(\{6,7\})$$

$$P_1(\{1\}) \times P_2(\{8,\ldots,n\})$$

を場合分けして見ていく必要がある。1 つ目の最小元 $\{2,4,6\}$ を取ると先ほどと同様に $B(3,7)$ に行き着く。したがって $P_1(\{1\}) \times P_2(\{8,\ldots,n\})$ の最小元 {1,8,9} を取り、$A_{3,2}$ に付け加え

$$A_{4,3} = \{\{1,2,3\},\{1,4,5\},\{1,6,7\},\{1,8,9\}\}$$

が得られる。そして

$$A(A_{4,3}) = P_1(1) \times P_2(\{10,\ldots,n\})$$

となる。$S(A_{4,3})$ は 1 を固定し、{ {2,3} , {4,5} , {6,7} , {8,9} } の置換を表わしているので $A(A_{4,3})$ に推移的に作用している。この手続きを $l = [(n-1)/2]$ としたとき、$A(3, 2l+1)$ まで繰り返すことが出来る。よって全ての $P_3(n)$ の極大対蹠的部分集合の合同類が得られた。

□

5 $P_4(n)$ の極大対蹠的部分集合

次に $P_4(n)$ の極大対蹠的部分集合についてみていく。ここで 3 つの対蹠的部分集合を定義しておく。
$A(4,2l) = \{\alpha \cup \beta \in P_4(2l) \mid \alpha, \beta \in \{\{1,2\},\{3,4\},\dots,\{2l-1,2l\}\}\}$
$B(4,7) = B^c(3,7) = \{\alpha^c \mid \alpha \in B(3,7)\}$
$B(4,8) = B(4,7) \times B(3,7) \times \{\{8\}\}$
これらが対蹠的部分集合であることは定理 6,1 と補題 6.1 からすぐ分かる。また次に述べる定理で $A(4,2l)$ が $P_4(2l), P_4(2l+1)$ において極大対蹠的部分集合であることをいうが、$A(4,6) \subset P_4(7)$ と $A(4,8) \subset P_4(8), P_4(9)$ の場合は例外である。なぜなら

$$B(4,7) \supset \{\alpha \cup \beta \in P_4(7) \mid \alpha, \beta \in \{\{2,3\},\{4,5\},\{6,7\}\}\}$$

であり、この部分集合は $P_4(7)$ において $A(4,6)$ と合同なので極大性が満たされないためである。また

$$B(4,8) \supset \{\alpha \cup \beta \in P_4(7) \mid \alpha, \beta \in \{\{2,3\},\{4,5\},\{6,7\},\{1,8\}\}\}$$

であり、この部分集合も $P_4(8)$ において $A(4,8)$ と合同なので極大性がみたされないことが分かり、$P_4(9)$ においても同様である。

注意 定理を述べる前にいくつか定義しておく。

- 部分集合 $A \subset P_k(n)$ が $P_k(n-1)$ のどの部分集合とも合同でないとき、A は $P_k(n)$ で **full** であるという。
- 整数 m に対して、$A + m := \{\{\alpha(1)+m, \dots, \alpha(k)+m\} \mid \alpha \in A\}$

また、今後極大対蹠的部分集合のことを MAS と記すことがある。

定理 5.1 ([10]). $P_4(n)$ の極大対蹠的部分集合は次のようになる。

n	
$4,5$	$A(4,4)$
6	$A(4,6)$
7	$B(4,7)$
$8,9$	$B(4,8)$
$10 < n$	$A(4,10), B(4,8)$

$n > 10$ の場合は、$A(4,2[n/2]), B(4,7) \cup [a\ full\ MAS\ in\ P_4(n-7)+7]$ と $B(4,8) \cup [a MAS in P_4(n-8)+8]$ が極大対蹠的部分集合になる。また、$P_4(n)$ のどの極大対蹠的部分集合もこれらと合同になる。

証明 $n \leq 10$ の場合を手順に従って示す。まず $A_1 = \{\{1,2,3,4\}\}$ を取る。よって

$$
\begin{aligned}
A(A_1) &= P_2(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,\ldots,n\}) \\
&\cup \ P_4(\{5,\ldots,n\})
\end{aligned}
$$

となる。$n \leq 5$ の場合は $A(A_1) = \phi$ となるので、$A_1 = A(4,4)$ が $P_4(n)$ の極大対蹠的部分集合になる。

$n \geq 6$ の場合を考える。$S(A_1) = \mathrm{Sym}(\{1,2,3,4\}) \times \mathrm{Sym}(\{5,\ldots,n\})$ となるので $P_2(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,\ldots,n\})$ と $P_4(\{5,\ldots,n\})$ は $S(A_1)$ の軌道になっている。よって 2 通りの場合分けが必要になる。

(1) $P_2(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,\ldots,n\})$ の最小元 $\{1,2,5,6\}$ を取り、A_1 に付け加え、$A_{2,1} = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\}\}$ が得られる。そして

$$
\begin{aligned}
A(A_{2,1}) &= \{\alpha \in A(A_1) - \{\{1,2,5,6\}\} \mid \alpha \text{と } \{1,2,5,6\} \text{ が対蹠的 }\} \\
&= \{\{3,4,5,6\}\} \\
&\cup \ \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_2(\{7,\ldots,n\}) \\
&\cup \ P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \times P_1(\{5,6\}) \times P_1(\{7,\ldots,n\}) \\
&\cup \ P_2(\{5,6\}) \times P_2(\{7,\ldots,n\}) \\
&\cup \ P_4(\{7,\ldots,n\}) \\
&= \{\{3,4,5,6\}\} \\
&\cup \ P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \times P_1(\{5,6\}) \times P_1(\{7,\ldots,n\}) \\
&\cup \ \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\} \times P_2(\{7,\ldots,n\}) \\
&\cup \ P_4(\{7,\ldots,n\})
\end{aligned}
$$

となる。$A(A_{2,1})$ において $\{3,4,5,6\}$ と他の元は対蹠的なので $A_{2,1}$ に付け加えられ、

$$
A_{3,1} = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\}\} = A(4,6)
$$

が得られる。また、

$$
\begin{aligned}
A(A_{3,1}) &= P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \times P_1(\{5,6\}) \times P_1(\{7,\ldots,n\}) \\
&\cup \ \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\} \times P_2(\{7,\ldots,n\}) \\
&\cup \ P_4(\{7,\ldots,n\})
\end{aligned}
$$

となる。$S(A_{3,1})$ は $\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\}$ の置換を表わしているので、それぞれに推移的に作用していることが分かる。つまりこれらは $S(A_{3,1})$ の軌道になっている。$n = 6$ の場合、$A(A_{3,1}) = \phi$ となるので $A_{3,1}$ が $P_4(6)$ の極大対蹠的部分集合である。

(1.1) $P_1(\{1,2\})\times P_1(\{3,4\})\times P_1(\{5,6\})\times P_1(\{7,\dots,n\})$ の最小元 $\{1,3,5,7\}$ を取り、$A_{3,1}$ に加え

$$A_{4,1}=\{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,3,5,7\}\}$$

が得られる。そして

$$\begin{aligned}
A(A_{4,1}) &= \{\alpha\in A(A_{3,1})-\{\{1,3,5,7\}\}\mid \alpha \text{と } \{1,3,5,7\} \text{ が対蹠的 }\}\\
&= \{\{1,4,6,7\},\{2,3,6,7\},\{2,4,5,7\}\}\\
&\cup\ \{\{1,3,6\},\{1,4,5\},\{2,3,5\},\{2,4,6\}\}\times P_1(\{8,\dots n\})\\
&\cup\ \{\{1,2,7\},\{3,4,7\},\{5,6,7\}\}\times P_1(\{8,\dots n\})\\
&\cup\ P_4(\{8,\dots,n\})
\end{aligned}$$

となる。$A(A_{4,1})$ において $\{\{1,4,6,7\},\{2,3,6,7\},\{2,4,5,7\}\}$ と他の元は対蹠的なので $A_{4,1}$ に付け加えられ、

$$\begin{aligned}
A_{7,1} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,3,5,7\},\\
&\quad \{1,4,6,7\},\{2,3,6,7\},\{2,4,5,7\}\}
\end{aligned}$$

が得られる。
ここで

$$\begin{aligned}
A^c_{7,1} &= \{\alpha^c\mid \alpha\in A_{7,1}\}\\
&= \{\{5,6,7\},\{3,4,7\},\{1,2,7\},\{2,4,6\},\\
&\quad \{2,3,5\},\{1,4,5\},\{1,3,6\}\}
\end{aligned}$$

は $B(3,7)$ と合同になることが分かる。よって $A_{7,1}$ と $B(4,7)=B^c(3,7)$ が合同である。そして

$$\begin{aligned}
A(A_{7,1}) &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,3,5,7\},\\
&\quad \{1,4,6,7\},\{2,3,6,7\},\{2,4,5,7\}\}\times P_1(\{8,\dots,n\})\\
&\cup\ P_4(\{8,\dots,n\})\\
&= A^c_{7,1}\times P_1(\{8,\dots,n\})\\
&\cup\ P_4(\{8,\dots,n\})
\end{aligned}$$

となる。また $B(3,7)$ はファノ平面を表わしており、それの射影変換群はそれぞれの元に推移的に作用するので $S(A_{7,1})$ は $A^c_{7,1}\times P_1(\{8,\dots,n\})$ に推移的に作用することが分かる。$P_4(\{8,\dots,n\})$ にも推移的に作用しているので $A^c_{7,1}\times P_1(\{8,\dots,n\})$, $P_4(\{8,\dots,n\})$ が $S(A_{7,1})$ の 2 つの軌道になっている。$n=7$ の場合は $A(A_{7,1})=\phi$ となるので $A_{7,1}$ が $P_4(7)$ の極大対蹠的部分集合になる。よって $n\geq 8$ の場合を考える。

(1.1.1) $A^c_{7,1}\times P_1(\{8,\dots,n\})$ の最小元 {1,2,7,8} を取り $A_{7,1}$ に加え

$$\begin{aligned}A_{8,1} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,3,5,7\},\\ &\quad \{1,4,6,7\},\{2,3,6,7\},\{2,4,5,7\},\{1,2,7,8\}\}\end{aligned}$$

が得られる。そして

$$\begin{aligned}A(A_{8,1}) &= \{\{5,6,7\},\{3,4,7\},\{2,4,6\},\{2,3,5\},\\ &\quad \{1,4,5\},\{1,3,6\}\}\times\{\{8\}\}\\ &\cup\ P_4(\{9,\dots,n\})\end{aligned}$$

となる。

$\{\{5,6,7\},\{3,4,7\},\{2,4,6\},\{2,3,5\},\{1,4,5\},\{1,3,6\}\}\times\{\{8\}\}$ は $A(A_{8,1})$ において他の元と対蹠的なので $A_{8,1}$ に付け加えられ、

$$\begin{aligned}A_{14} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,3,5,7\},\\ &\quad \{1,4,6,7\},\{2,3,6,7\},\{2,4,5,7\},\{1,2,7,8\}\}\\ &\cup\ \{\{5,6,7\},\{3,4,7\},\{2,4,6\},\{2,3,5\},\\ &\quad \{1,4,5\},\{1,3,6\}\}\times\{\{8\}\}\\ &= A_{7,1}\cup A^c_{7,1}\times\{\{8\}\}\end{aligned}$$

が得られ、これは $B(4,8)$ と合同である。よって $A(A_{14})=A(B(4,8))=P_4(\{9,\dots,n\})$ となり、$n=8,9,10,11$ の場合は $A(A_{14})=\phi$ であるので A_{14} が $P_4(n)$ の極大対蹠的部分集合になる。$n>11$ の場合は $P_4(\{9,\dots,n\})$ の極大対蹠的部分集合 B に対して、$A_{14}\cup B$ が $P_4(n)$ の極大対蹠的部分集合になる。

(1.1.2) $P_4(\{8,\dots,n\})$ の最小元 $\{8,9,10,11\}$ を取り、$A_{7,1}$ に加え

$$\begin{aligned}A_{8,2} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,3,5,7\},\\ &\quad \{1,4,6,7\},\{2,3,6,7\},\{2,4,5,7\},\{8,9,10,11\}\}\end{aligned}$$

が得られる。そして

$$\begin{aligned}A(A_{8,2}) &= A^c_{7,1}\times P_1(\{12,\dots,n\})\\ &\cup\ P_2(\{8,9,10,11\})\times P_2(\{12,\dots,n\})\\ &\cup\ P_4(\{12,\dots,n\})\end{aligned}$$

となる。

また $S(A_{8,2})=S(A^c_{7,1})\times\mathrm{Sym}(\{8,9,10,11\})\times\mathrm{Sym}(\{12,\dots,n\})$ より

$$A^c_{7,1}\times P_1(\{12,\dots,n\})$$
$$P_2(\{8,9,10,11\})\times P_2(\{12,\dots,n\})$$
$$P_4(\{12,\dots,n\})$$

に推移的に作用していることが分かり、$S(A_{8,2})$ の 3 つの軌道になっている。したがって $A^c_{7,1} \times P_1(\{12,\dots,n\})$ と
$P_2(\{8,9,10,11\}) \times P_2(\{12,\dots,n\})$, $P_4(\{12,\dots,n\})$ の 2 つの場合を考える必要がある。

(1.1.2.1) $n \geq 12$ の場合、$A^c_{7,1} \times P_1(\{12,\dots,n\})$ の最小元 $\{1,2,7,12\}$ を取り、手続きを行うと $P_4(\{1,\dots,7\} \cup \{12\})$ の極大対蹠的部分集合 $B(4,8) \cup \{P_4(\{8,9,10,11\} \cup \{13,\dots,n\})$ の極大対蹠的部分集合 $\}$ となるので、これは (1.1.1) の結果に帰着される。

(1.1.2.2) $P_2(\{8,9,10,11\}) \times P_2(\{12,\dots,n\})$, $P_4(\{12,\dots,n\})$ の最小元を取って手続きを行うが、$A^c_{7,1} \times P_1(\{12,\dots,n\})$ の元を取った場合は (1.1.2.1) に帰着される。よって

$$\begin{aligned} A_{8,2} \quad &\cup \quad P_2(\{8,9,10,11\}) \times P_2(\{12,\dots,n\}) \cup P_4(\{12,\dots,n\}) \\ &\subset \quad A_{7,1} \cup P_4(\{8,\dots,n\}) \end{aligned}$$

より、$P_4(\{8,\dots,n\})$ の極大対蹠的部分集合 B に対して、$P_4(n)$ の極大対蹠的部分集合は $A(7,1) \cup B$ に行き着くはずである。
ここで B が $P_4(\{8,\dots,n\})$ で $full$ でないと仮定する。すると、B のどの元にも属さない $m \in \{8,\dots,n\}$ が存在する。そして

$$A(7,1) \cup B \subset A_{7,1} \cup (A^c_{7,1} \times \{\{m\}\}) \cup B$$

が成り立つが、$A_{7,1} \cup (A^c_{7,1} \times \{\{m\}\}) \cup B$ は対蹠的部分集合であるから、$A(7,1) \cup B$ の極大性が失われる。よって B は $P_4(\{8,\dots,n\})$ で $full$ である。
つまり B が $P_4(\{8,\dots,n\})$ で $full$ ならば、$A_{7,1} \cup B$ は $P_4(n)$ の極大対蹠的部分集合である。
また、$A_{7,1} \cup B$ が $P_4(n)$ の極大対蹠的部分集合でないと仮定したとき、$A_{7,1} \cup B$ のどの元とも対蹠的な $\alpha \notin A_{7,1} \cup B$ が存在する。また

$$\alpha \in A(A_{7,1}) = A^c_{7,1} \times P_1(\{8,\dots,n\}) \cup P_4(\{8,\dots,n\})$$

より、仮に $\alpha \in P_4(\{8,\dots,n\})$ とした場合、これは B の極大性に矛盾する。また、$\alpha \in A^c_{7,1} \times P_1(\{8,\dots,n\})$ ならば、$\sharp(\alpha \cup \{8,\dots,n\}) = 1$ となる。B は帰納的に $B(4,7), B(4,8), A(4,2l)$ の和の形になっているはずであり、さらに B は $P_4(\{8,\dots,n\})$ で $full$ なので、$\sharp(\alpha \cup \beta) = 1$ を満たす $\beta \in B$ が存在する。しかし、これは対蹠的の定義に反するので矛盾する。よって $A_{7,1} \cup B$ は $P_4(n)$ の極大対蹠的部分集合である。

(1.2) $\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\} \times P_2(\{7,\dots,n\})$ の最小元 $\{1,2,7,8\}$ を取り、$A_{3,1}$ に加えると

$$A_{4,2} = A(4,6) \cup \{\{1,2,7,8\}\}$$

を得る。そして

$$
\begin{array}{rcl}
A(A_{4,2}) & = & P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \times P_1(\{5,6\}) \times P_1(\{7,8\}) \\
& \cup & \{\{3,4,7,8\},\{5,6,7,8\}\} \\
& \cup & \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\} \times P_2(\{9,\ldots,n\}) \\
& \cup & P_2(\{7,8\}) \times P_2(\{9,\ldots,n\}) \\
& \cup & P_4(\{9,\ldots,n\})
\end{array}
$$

となる。$\{\{3,4,7,8\},\{5,6,7,8\}\}$ は $A(A_{4,2})$ のどの元とも対蹠的なので $A_{4,2}$ に加え

$$A_{6,1} = A(4,6) \cup \{\{1,2,7,8\},\{3,4,7,8\},\{5,6,7,8\}\} = A(4,8)$$

が得られる。$S(A_{6,1})$ は $\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\},\{7,8\}\}$ の置換を表わしているので、

$$
\begin{array}{l}
P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \times P_1(\{5,6\}) \times P_1(\{7,8\}) \\
\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\},\{7,8\}\} \times P_2(\{9,\ldots,n\}) \\
P_4(\{9,\ldots,n\})
\end{array}
$$

に推移的に作用し、これらは $S(A_{6,1})$ の軌道になっている。よって 3 通りの場合分けが必要になる。

(1.2.1) $P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \times P_1(\{5,6\}) \times P_1(\{7,8\})$ の最小元 $\{1,3,5,7\}$ を取り、$A_{6,1}$ に加え

$$A_{7,2} = A(4,8) \cup \{\{1,3,5,7\}\}$$

が得られる。ここで

$$
\begin{array}{rcl}
E_{v_8} & = & \{\{i_1,i_2,i_3,i_4\} \mid i_j \in \{2j-1,2j\}(1 \le j \le 4), \\
& & \text{偶数番号の数が偶数}\ \}
\end{array}
$$

としたとき、

$$A(A_{7,2}) = (E_{v_8} - \{1,3,5,7\}) \cup P_4(\{9,\ldots,n\})$$

となる。E_{v_8} の全ての元と $A(A_{7,2})$ の他の元は対蹠的なので $A_{7,2}$ に付け加えられる。よって

$$A(4,8) \cup E_{v_8} = A_{14}$$

を得る。後は (1.1.1) に帰着する。

(1.2.2) $\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\},\{7,8\}\} \times P_2(\{9,\ldots,n\})$ の最小元 $\{1,2,9,10\}$ を取り、$A_{6,1}$ に加え

$$A_{7,3} = A(4,8) \cup \{\{1,2,9,10\}\}$$

が得られる。そして

$$\begin{aligned} A(A_{7,3}) &= \{\{3,4,9,10\},\{5,6,9,10\},\{7,8,9,10\}\} \\ &\cup \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\},\{7,8\}\} \times P_2(\{11,\ldots,n\}) \\ &\cup P_2(\{9,10\}) \times P_2(\{11,\ldots,n\}) \\ &\cup P_4(\{11,\ldots,n\}) \end{aligned}$$

となる。$\{\{3,4,9,10\},\{5,6,9,10\},\{7,8,9,10\}\}$ は対蹠的で、$A(A_{7,3})$ の他の元とも対蹠的なので $A_{7,3}$ に付け加えられる。よって

$$\begin{aligned} A_{10} &= A(4,8) \cup \{\{1,2,9,10\},\{3,4,9,10\},\{5,6,9,10\},\{7,8,9,10\}\} \\ &= A(4,10) \end{aligned}$$

が得られる。また

$$\begin{aligned} A(A_{10}) &= \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\},\{7,8\},\{9,10\}\} \times P_2(\{11,\ldots,n\}) \\ &\cup P_4(\{11,\ldots,n\}) \end{aligned}$$

となる。ここで、この場合に得られる $P_4(n)$ の極大対蹠的部分集合を M とする。すると $M - A_{10} \subset A(A_{10})$ より、 $M = A_{10} \cup M_1 \cup M_2$ をみたすような

$$\begin{aligned} &M_1 \subset \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\},\{7,8\},\{9,10\}\} \times P_2(\{11,\ldots,n\}) \\ &M_2 \subset P_4(\{11,\ldots,n\}) \end{aligned}$$

が存在する。また

$$\begin{aligned} N_1 = \{\beta \in P_2(\{11,\ldots,n\}) \quad | \quad & \alpha = \{2j-1, 2j\} \text{ に対し} \alpha \cup \beta \in M_1 \\ & (1 \le j \le 5)\} \end{aligned}$$

とすると、N_1 は $P_2(\{11,\ldots,n\})$ の対蹠的部分集合になる。よって Sym({11,...,n}) の作用から

$$N_1 = \{\{11,12\},\{13,14\},\ldots,\{2m-1,2m\}\}$$

とできる。N_1 の任意の元と M_2 の任意の元は偶数個の共通部分があるので、$A(4,2m) \cup M_2$ が対蹠的であることまで分かる。また

$$M = A_{10} \cup M_1 \cup M_2 \subset A(4,2m) \cup M_2$$

が成り立ち、M が $P_4(n)$ の極大対蹠的部分群なので、$M = A(4,2m) \cup M_2$ である。
$\{1,2,11,12\},\{1,2,13,14\},\dots$ と加えて手続きを行うと、$A(4,2m)$ となり、

$$\begin{aligned} A(A(4,2m)) &= \{\{1,2\},\dots,\{2m-1,2m\}\} \times P_2(\{2m+1,\dots,n\}) \\ &\cup \quad P_4(\{2m+1,\dots,n\}) \end{aligned}$$

となる。先ほどと同様に、$M = A(4,2m) \cup M_3 \cup M_4$ を満たすような

$$\begin{aligned} &M_3 \subset \{\{1,2\},\dots,\{2m-1,2m\}\} \times P_2(\{2m+1,\dots,n\}) \\ &M_4 \subset P_4(\{2m+1,\dots,n\}) \end{aligned}$$

が存在する。ここで $M_3 \neq \phi$ と仮定する。すると $1 \leq a \leq m, 2m+1 \leq b, c$ を満たすような $\{2a-1,2a,b,c\}$ が存在する。$\{b,c\}$ と M_4 の任意の元は偶数個の共通部分があるので、$\{1,2,b,c\}$ と M_4 の任意の元は対蹠的であり、$\{b,c\} \in N_1$ となり、これは矛盾。よって $M_3 = \phi$ となり、$M = A(4,2m) \cup M_4$ である。つまり、M_4 は $P_4(\{2m+1,\dots,n\})$ の極大対蹠的部分集合であるので、帰納的に M_4 は $B(4,7), B(4,8), A(4,2l)+2m$ の和になっているはずである。ここで、$A(4,2l)+2m$ が存在すると仮定する。

$$A(4,2m) \cup (A(4,2l)+2m) \subset A(4,2(m+l))$$

が成り立ち、$A(4,2l)+2m$ と M_4 の任意の元は対蹠的であるので、$A(4,2(m+l))$ と M_4 の任意の元も対蹠的である。つまり $A(4,2(m+l)) \cup M_4$ は対蹠的で

$$M = A(4,2m) \cup (A(4,2l)+2m) \cup M_4 \subset A(4,2(m+l)) \cup M_4$$

が成り立つので M の極大性に反する事が分かり、矛盾している。よって M_4 は $B(4,7)$ と $B(4,8)$ の和になっている。つまり、$M_4 = \phi$ ならば $M = A(4,2m)$ となり、$M_4 \neq \phi$ ならば M は $B(4,7)$ か $B(4,8)$ を含んでいる。これらはそれぞれ (1.1.2.2) と (1.1.1) に帰着されていく。

(1.2.3) $P_4(\{9,\dots,n\})$ の最小元 $\{9,10,11,12\}$ を取り、$A_{6,1}$ に加え

$$A_{7,4} = A(4,8) \cup \{\{9,10,11,12\}\}$$

を得る。そして

$$\begin{aligned} A(A_{7,4}) &= P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \times P_1(\{5,6\}) \times P_1(\{7,8\}) \\ &\cup \quad \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\},\{7,8\}\} \times P_2(\{9,10,11,12\}) \\ &\cup \quad \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\},\{7,8\}\} \times P_2(\{13,\dots,n\}) \\ &\cup \quad P_2(\{9,10,11,12\}) \times P_2(\{13,\dots,n\}) \\ &\cup \quad P_4(\{13,\dots,n\}) \end{aligned}$$

となり、$S(A_{7,4})$ は $\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\},\{7,8\}\}$ と $\{9,10,11,12\}$ の置換を表わしているから、それぞれに推移的に作用する。つまりこれらが $S(A_{7,4})$ の 5 つの軌道であり、5 通りの場合分けが必要になる。

(1.2.3.1) $P_1(\{1,2\})\times P_1(\{3,4\})\times P_1(\{5,6\})\times P_1(\{7,8\})$ の最小元 $\{1,3,5,7\}$ を取る。これは (1.1) に帰着する。

(1.2.3.2) $\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\},\{7,8\}\}\times P_2(\{9,10,11,12\})$ の最小元 $\{1,2,9,10\}$ を取る。これは (1.2.2) に帰着する。

(1.2.3.3) $\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\},\{7,8\}\}\times P_2(\{13,\dots,n\})$ の最小元 $\{1,2,13,14\}$ を取る。これも $(9,13)(10,14)$ の置換作用により (1.2.2) に帰着する。

(1,2,3,4) $P_2(\{9,10,11,12\})\times P_2(\{13,\dots,n\}), P_4(\{13,\dots,n\})$ の軌道について考える。この場合、(1,2,3,1) 、 (1,2,3,2) 、 (1.2.3.3) の軌道から元を一つ取ったときは (1.1) 、 (1.2.2) に帰着するので $P_2(\{9,10,11,12\})\times P_2(\{13,\dots,n\}), P_4(\{13,\dots,n\})$ から元を取ってくることを考えればよい。任意の極大対蹠的部分集合 M に対して、$M=A(4,8)\cup M_1$ を満たすような $P_4(\{9,\dots,n\})$ の極大対蹠的部分集合 M_1 が存在するはずである。しかし、定理を述べる前に書いた通り $A(4,8)$ は $P_4(8)$ の極大対蹠的部分集合ではないのでこれは成り立たない。

(1.3) $P_4(\{7,\dots,n\})$ の最小元 $\{7,8,9,10\}$ を取り、$A_{3,1}$ に加え、

$$A_{4,3}=A(4,6)\cup\{\{7,8,9,10\}\}$$

を得る。そして

$$\begin{aligned}
A(A_{4,3}) &= P_1(\{1,2\})\times P_1(\{3,4\})\times P_1(\{5,6\})\times P_1(\{11,\dots,n\})\\
&\cup\ \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\}\times P_2(\{7,8,9,10\})\\
&\cup\ \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\}\times P_2(\{11,\dots,n\})\\
&\cup\ P_2(\{7,8,9,10\})\times P_2(\{11,\dots,n\})\\
&\cup\ P_4(\{11,\dots,n\})
\end{aligned}$$

となり、$S(A_{4,3})$ は $\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\}$ と $\{7,8,9,10\}$ の置換を表わしているから、それぞれ推移的に作用する。つまりこれらが $S(A_{4,3})$ の 5 つの軌道であり、5 通りの場合分けが必要になる。

(1.3.1) $P_1(\{1,2\})\times P_1(\{3,4\})\times P_1(\{5,6\})\times P_1(\{11,\dots,n\})$ の最小元 $\{1,3,5,11\}$ を取り、$A_{4,3}$ に加える。この場合は (7 11) の置換作用より (1.1) に帰着する。

(1.3.2) $\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\}\times P_2(\{7,8,9,10\})$ の最小元 $\{1,2,7,8\}$ を取り、$A_{4,3}$ に加える。これは (1.2) に帰着する。

(1.3.3) $\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\} \times P_2(\{11,\ldots,n\})$ の最小元 $\{1,2,11,12\}$ を取り、$A_{4,3}$ に加える。これは $(7\ 11)(8\ 12)$ の置換作用より (1.2) に帰着する。

(1.3.4) $P_2(\{7,8,9,10\}) \times P_2(\{11,\ldots,n\})$ の最小元 $\{7,8,11,12\}$ を取り、$A_{4,3}$ に加え、

$$A_5 = A(4,6) \cup \{\{7,8,9,10\},\{7,8,11,12\}\}$$

を得る。そして

$$\begin{aligned}
A(A_5) &= P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \times P_1(\{5,6\}) \times P_1(\{13,\ldots,n\}) \\
&\cup \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\} \times \{\{7,8\},\{9,10\},\{11,12\}\} \\
&\cup \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\} \times P_2(\{13,\ldots,n\}) \\
&\cup \{\{9,10,11,12\}\} \\
&\cup \{\{7,8\},\{9,10\},\{11,12\}\} \times P_2(\{13,\ldots,n\}) \\
&\cup P_1(\{7,8\}) \times P_1(\{9,10\}) \times P_1(\{11,12\}) \times P_1(\{13,\ldots,n\}) \\
&\cup P_4(\{13,\ldots,n\})
\end{aligned}$$

となる。$A(A_5)$ において $\{9,10,11,12\}$ と他の元は対蹠的なので A_5 に加え

$$A_{6,2} = A(4,6) \cup (A(4,6)+6)$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned}
A(A_{6,2}) &= P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \times P_1(\{5,6\}) \times P_1(\{13,\ldots,n\}) \\
&\cup \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\} \times \{\{7,8\},\{9,10\},\{11,12\}\} \\
&\cup \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\},\{7,8\},\{9,10\},\{11,12\}\} \\
&\quad \times P_2(\{13,\ldots,n\}) \\
&\cup P_1(\{7,8\}) \times P_1(\{9,10\}) \times P_1(\{11,12\}) \\
&\quad \times P_1(\{13,\ldots,n\}) \\
&\cup P_4(\{13,\ldots,n\})
\end{aligned}$$

となる。$S(A_{6,2})$ は $\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\}$ と $\{\{7,8\},\{9,10\},\{11,12\}\}$ の置換や、これらを入れ替えたりする作用なのでそれぞれに推移的に作用する。したがって $S(A_{6,2})$ の軌道は次の 4 つになる。

$$\begin{aligned}
&\quad P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \times P_1(\{5,6\}) \times P_1(\{13,\ldots,n\}) \\
&\cup\ P_1(\{7,8\}) \times P_1(\{9,10\}) \times P_1(\{11,12\}) \times P_1(\{13,\ldots,n\}) \\
&\quad \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\} \times \{\{7,8\},\{9,10\},\{11,12\}\} \\
&\quad \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\},\{7,8\},\{9,10\},\{11,12\}\} \times P_2(\{13,\ldots,n\}) \\
&\quad P_4(\{13,\ldots,n\})
\end{aligned}$$

よって、4 通りの場合分けが必要になる。

(1.3.4.1)

$$\begin{array}{ll} & P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \times P_1(\{5,6\}) \times P_1(\{13,\ldots,n\}) \\ \cup & P_1(\{7,8\}) \times P_1(\{9,10\}) \times P_1(\{11,12\}) \times P_1(\{13,\ldots,n\}) \end{array}$$

の最小元 $\{1,3,5,13\}$ を取り、$A_{6,2}$ に加える。これは (1.1) に帰着する。

(1.3.4.2) $\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\} \times \{\{7,8\},\{9,10\},\{11,12\}\}$ の最小元 $\{1,2,7,8\}$ を取り、$A_{6,2}$ に加える。これは (1,3,2) に帰着する。

(1.3.4.3) $\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\},\{7,8\},\{9,10\},\{11,12\}\} \times P_2(\{13,\ldots,n\})$ の最小元 $\{1,2,13,14\}$ を取り、$A_{6,2}$ に加える。これは (1.2) に帰着する。

(1.3.4.4) $P_4(\{13,\ldots,n\})$ の場合を考える。この場合、(1,3,4,1) 、 (1,3,4,2) 、(1.3,4.3) の軌道から元を一つ取ったときは (1.1) 、 (1.3.2) 、 (1.2) に帰着するので $P_4(\{13,\ldots,n\})$ から元を取ってくることを考えればよい。任意の極大対蹠的部分集合 M に対して、$M = A_{6,2} \cup M_1$ を満たすような $P_4(\{13,\ldots,n\})$ の極大対蹠的部分集合 M_1 が存在するはずである。しかし、$A_{6,2} = A(4,6) \cup (A(4,6)+6)$ は $P_4(12)$ の極大対蹠的部分集合ではないのでこれは成り立たない。

(1.3.5) 軌道 $P_4(\{11,\ldots,n\})$ を考える。この場合、(1,3,1) 、 (1,3,2) 、 (1.3,3) 、(1.3.4) の軌道から元を一つ取ったときは既に述べたので $P_4(\{11,\ldots,n\})$ から元を取ってくることを考えればよい。任意の極大対蹠的部分集合 M に対して、$M = A_{4,3} \cup M_1$ を満たすような $P_4(\{11,\ldots,n\})$ の極大対蹠的部分集合 M_1 が存在するはずである。しかし、$A_{4,3} = A(4,6) \cup \{\{7,8,9,10\}\}$; は $P_4(10)$ の極大対蹠的部分集合ではないのでこれは成り立たない。

(2) $P_4(\{5,\ldots,n\})$ の最小元 $\{5,6,7,8\}$ を取り、A_1 に加え、

$$A_{2,2} = \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\}\}$$

が得られる。そして

$$\begin{array}{rcl} A(A_{2,2}) & = & P_2(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6,7,8\}) \\ & \cup & P_2(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{9,\ldots,n\}) \\ & \cup & P_2(\{5,6,7,8\}) \times P_2(\{9,\ldots,n\}) \\ & \cup & P_4(\{9,\ldots,n\}) \end{array}$$

となる。$S(A_{2,2})$ は $\{1,2,3,4\}$ と $\{5,6,7,8\}$ の置換や、これらを入れ替えたりする作用なので推移的に作用する。したがって $S(A_{2,2})$ の軌道は

次の 3 つになる。

$$
\begin{aligned}
&P_2(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6,7,8\}) \\
&P_2(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{9,\ldots,n\}) \\
\cup\ &P_2(\{5,6,7,8\}) \times P_2(\{9,\ldots,n\}) \\
&P_4(\{9,\ldots,n\})
\end{aligned}
$$

よって、3 通りの場合分けが必要になる。

(2.1) $P_2(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6,7,8\})$ の最小元 $\{1,2,5,6\}$ を取り、$A_{2,2}$ に加える。これは (1) に帰着する。

(2.2) $P_2(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{9,\ldots,n\}) \cup P_2(\{5,6,7,8\}) \times P_2(\{9,\ldots,n\})$ の最小元 $\{1,2,9,10\}$ を取り、$A_{2,2}$ に加える。これは (1) に帰着する。

(2.3) $P_4(\{9,\ldots,n\})$ の最小元 $\{9,10,11,12\}$ を取り、$A_{2,2}$ に加える。この場合、(2.1) 、 (2.2) の軌道から元を一つ取ったときは既に述べたので $P_4(\{9,\ldots,n\})$ から元を取ってくることを考えればよい。任意の極大対蹠的部分集合 M に対して、$M = A_{2,2} \cup M_1$ を満たすような $P_4(\{9,\ldots,n\})$ の極大対蹠的部分集合 M_1 が存在するはずである。しかし、$A_{2,2} = \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\}\}$ は $P_4(8)$ の極大対蹠的部分集合ではないのでこれは成り立たない。

□

例 5.1 $P_4(11)$ の極大対蹠的部分集合は

$$A(4,10), B(4,8), B(4,7) \cup (A(4,4)+7)$$

となる。また $P_4(12)$ の極大対蹠的部分集合は

$$A(4,12), B(4,7), B(4,8) \cup (A(4,4)+8)$$

となる。

6　スピノル群

スピノル群を定義するため、まずクリフォード代数 $Cl(\mathbb{R}^n)$ を定義する。

定義 6.1 $1, e_1, \ldots, e_n, e_1e_2, \ldots, e_ie_j (i<j), \ldots, e_{i_1}\cdots e_{i_k} (i_1 < \cdots < i_k)$, $\ldots, e_1 \cdots e_n$ からなる 2^n 個の元を $\mathbb{R}$ -基底とする $\mathbb{R}$ ベクトル空間 $Cl(\mathbb{R}^n)$ において、基底の積を

$$(e_{i_1}\cdots e_{i_k})(e_{j_1}\cdots e_{j_l}) := e_{i_1}\cdots e_{i_k} e_{j_1}\cdots e_{j_l}$$

と定義する。ここで

(A) 積の単位元を 1 とする

(B) $e_i^2 = -1$

(C) $e_i e_j = -e_j e_i (i \neq j)$

(D) 分配法則が成立

を満たすとする。この積に関して $Cl(\mathbb{R}^n)$ は 2^n 次元 $\mathbb{R}$ -多元環となり、$Cl(\mathbb{R}^n)$ を**クリフォード代数**という。

ここで定めた基底 $1, e_1, \ldots, e_n, e_1e_2, \ldots, e_ie_j(i < j), \ldots, e_{i_1} \cdots e_{i_k}(i_1 < \cdots < i_k), \ldots, e_1 \cdots e_n$ が正規直交基底となる内積を定める。まず、$p, q \in Cl(\mathbb{R}^n)$ に対し、$p = a_0 + \sum a_{i_1 \cdots i_k} e_{i_1} \cdots e_{i_k}, q = b_0 + \sum b_{i_1 \cdots i_k} e_{i_1} \cdots e_{i_k}$ とし、

$$\langle u, v \rangle := a_0 b_0 + \sum a_{i_1 \cdots i_k} b_{i_1 \cdots i_k}$$

と定義する。また、$p \in Cl(\mathbb{R}^n)$ に対し、$\| p \| := \sqrt{\langle u, u \rangle}$ と定義し、$u, v \in Cl(\mathbb{R}^n)$ の距離 $d(u, v) := \| u - v \|$ と定義すれば、$Cl(\mathbb{R}^n)$ は距離空間になり、$\mathbb{R}^{2n}$ と距離空間として同型である。
また、次の 3 つの $\mathbb{R}$-線型写像を Cl($\mathbb{R}^n$) の基底に対して定義する。
${}^t 1 := 1, {}^t(e_{i_1} \cdots e_{i_k}) := e_{i_k} \cdots e_{i_1}$
$1^s := 1, (e_{i_1} \cdots e_{i_k})^s := (-1)^k (e_{i_1} \cdots e_{i_k})$
$(e_{i_1} \cdots e_{i_k})^* := {}^t(e_{i_1} \cdots e_{i_k})^s$
これらは距離位相で連続となる。

$(x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$ と $x_1 e_1 + \cdots x_n e_n \in Cl(\mathbb{R}^n)$ を同一視することで、$S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \subset Cl(\mathbb{R}^n)$ とみなせるので、スピノル群を次のように定義する。

定義 6.2 $Spin(n) := \{\alpha \in Cl(\mathbb{R}^n) \mid \alpha = a_1 \cdots a_m, a_i \in S^{n-1}, m$ は偶数 $\}$ としたとき、$Spin(n)$ を**スピノル群**や**スピン群**という。

定理 6.1 $p : Spin(n) \to SO(n)$ を $p(\alpha)x := \alpha x {}^t\alpha$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ と定義したとき、この p は連続な上への準同型写像になり、p の核は $\{\pm 1\}$ である。よって $Spin(n)/\{\pm 1\} \cong SO(n)$ となる。また、この p は 2 重被覆写像である。

命題 6.1 $T_1 := \{t(\theta_1) \cdots t(\theta_n) \in Cl(\mathbb{R}^{2n}) \mid t(\theta_i) := \cos\theta_i + e_{2i-1}e_{2i}\sin\theta_i,$
$i = 1, 2, \cdots, n, \theta_i \in \mathbb{R}\}$
$T_2 := \{t(\theta_1) \cdots t(\theta_n) \in Cl(\mathbb{R}^{2n+1}) \mid t(\theta_i) := \cos\theta_i + e_{2i-1}e_{2i}\sin\theta_i,$
$i = 1, 2, \cdots, n, \theta_i \in \mathbb{R}\}$
とおいたとき、T_1 は $Spin(2n)$ の極大トーラスになり、T_2 は $Spin(2n+1)$ の極大トーラスになる。

7　スピノル群の性質

スピノル群はコンパクトリー群より、コンパクトリーマン対称空間になるので、性質を見ていきたい。

補題 7.1 ([11]) .

クリフォード代数 $Cl(\mathbb{R}^n)$ において次が成り立つ。ただし、$k = 1, 2, \cdots, n$ とする。

(A) $(e_{i_1} \cdots e_{i_k})^2 = (-1)^{\frac{1}{2}k(k+1)}$

(B) $e_{i_k} \cdots e_{i_1} = (-1)^{\frac{1}{2}k(k-1)} e_{i_1} \cdots e_{i_k}$

(C) $s_{e_{i_1} \cdots e_{i_k}} = s_{e_{i_k} \cdots e_{i_1}}$

(D) $s_{e_{i_1} \cdots e_{i_k}} = s_{(-e_{i_1} \cdots e_{i_k})}$

証明　(A)

$$\begin{aligned}
(e_{i_1} \cdots e_{i_k})^2 &= e_{i_1} \cdots e_{i_k} e_{i_1} \cdots e_{i_k} \\
&= (-1) e_{i_1} \cdots e_{i_{k-1}} e_{i_1} e_{i_k} e_{i_2} \cdots e_{i_k} \\
&\vdots \\
&= (-1)^{k-1} e_{i_1} \cdots e_{i_{k-1}} e_{i_1} \cdots e_{i_{k-1}} e_{i_k} e_{i_k} \\
&= (-1)^{k-1} e_{i_1} \cdots e_{i_{k-1}} e_{i_1} \cdots e_{i_{k-1}} (-1) \\
&= (-1)^{k} e_{i_1} \cdots e_{i_{k-1}} e_{i_1} \cdots e_{i_{k-1}} \\
&= (-1)^{k} (-1)^{k-1} e_{i_1} \cdots e_{i_{k-2}} e_{i_1} \cdots e_{i_{k-2}} \\
&\vdots \\
&= (-1)^{\frac{1}{2}k(k+1)}
\end{aligned}$$

(B)

$$\begin{aligned}
e_{i_k} \cdots e_{i_1} &= (-1) e_{i_k} \cdots e_{i_1} e_{i_2} \\
&\vdots \\
&= (-1)^{k-1} e_{i_1} e_{i_k} \cdots e_{i_2} \\
&= (-1)^{k-1} (-1)^{k-2} e_{i_1} e_{i_2} e_{i_k} \cdots e_{i_3} \\
&\vdots \\
&= (-1)^{\frac{1}{2}k(k-1)} e_{i_1} \cdots e_{i_k}
\end{aligned}$$

(C) 任意の $\alpha \in Spin(n)$ に対し、

$$s_{e_{i_1} \cdots e_{i_k}}(\alpha) = e_{i_1} \cdots e_{i_k} \alpha^{-1} e_{i_1} \cdots e_{i_k}$$

であり、(B) より、$e_{i_1}\cdots e_{i_k}=\pm e_{i_k}\cdots e_{i_1}$ であることから、$e_{i_1}\cdots e_{i_k}=e_{i_k}\cdots e_{i_1}$ の場合は成り立つ。
次に $e_{i_1}\cdots e_{i_k}=-e_{i_k}\cdots e_{i_1}$ の場合を考える。

$$\begin{aligned}s_{e_{i_1}\cdots e_{i_k}}(\alpha) &= (-e_{i_1}\cdots e_{i_k})\alpha^{-1}(-e_{i_1}\cdots e_{i_k})\\ &= e_{i_1}\cdots e_{i_k}\alpha^{-1}e_{i_1}\cdots e_{i_k}\\ &= s_{e_{i_k}\cdots e_{i_1}}(\alpha)\end{aligned}$$

となるので、この場合も成り立つので (C) は成り立つ。

(D) 任意の $\alpha\in Spin(n)$ に対し、

$$\begin{aligned}s_{e_{i_1}\cdots e_{i_k}}(\alpha) &= e_{i_1}\cdots e_{i_k}\alpha^{-1}e_{i_1}\cdots e_{i_k}\\ &= (-e_{i_1}\cdots e_{i_k})\alpha^{-1}(-e_{i_1}\cdots e_{i_k})\\ &= s_{(-e_{i_1}\cdots e_{i_k})}(\alpha)\end{aligned}$$

が成り立つので (D) は成り立つ。

□

また、この補題から次が分かる。

補題 7.2 ([11]) . $Spin(n)$ において次が成り立つ。

$$(e_{i_1}\cdots e_{i_k})^2=1\Longleftrightarrow k\text{ は }4\text{ の倍数}$$

証明 $(\Longrightarrow)$
$(e_{i_1}\cdots e_{i_k})^2=1$ としたとき、前の補題より、$(e_{i_1}\cdots e_{i_k})^2=(-1)^{\frac{1}{2}k(k+1)}$ であったので $\frac{1}{2}k(k+1)$ が偶数であることが分かる。$Spin(n)$ の定義より k は偶数である。$k=2m$ とすると、$\frac{1}{2}k(k+1)=m(2m+1)$ である。$\frac{1}{2}k(k+1)$ は偶数であったので、m も偶数でなければならないので、k は 4 の倍数である。
$(\Longleftarrow)$
$k=4m(m\in\mathbb{N})$ とすると、$\frac{1}{2}k(k+1)=2m(4m+1)$ より $(e_{i_1}\cdots e_{i_k})^2=(-1)^{2m(4m+1)}=1$ である。 □

補題 7.3 ([11]) .
$\{i_1,\cdots,i_{2k}\},\{j_1,\cdots,j_{2l}\}\subset\{1,2,\cdots,n\}$ に対し、
$t:=\sharp(\{i_1,\cdots,i_{2k}\}\cap\{j_1,\cdots,j_{2l}\})$ と定義する。このとき

$$s_{e_{i_1}\cdots e_{i_{2k}}}(e_{j_1}\cdots e_{j_{2l}})=(-1)^{k-l+t}e_{j_1}\cdots e_{j_{2l}}$$

が成り立つ。

証明　補題 3.1 を用いると、

$$\begin{aligned}
s_{e_{i_1}\cdots e_{i_{2k}}}(e_{j_1}\cdots e_{j_{2l}}) &= e_{i_1}\cdots e_{i_{2k}}(e_{j_1}\cdots e_{j_{2l}})^{-1}e_{i_1}\cdots e_{i_{2k}} \\
&= e_{i_1}\cdots e_{i_{2k}}(e_{j_{2l}}\cdots e_{j_1})e_{i_1}\cdots e_{i_{2k}} \\
&= (-1)^t e_{j_{2l}}\cdots e_{j_1}e_{i_1}\cdots e_{i_{2k}}e_{i_1}\cdots e_{i_{2k}} \\
&= (-1)^t(-1)^{k(2k+1)}(-1)^{l(2l-1)}e_{j_1}\cdots e_{j_{2l}} \\
&= (-1)^{2k^2+2l^2+k-l+t}e_{j_1}\cdots e_{j_{2l}} \\
&= (-1)^{k-l+t}e_{j_1}\cdots e_{j_{2l}}
\end{aligned}$$

□

したがって次が分かる。

$$s_{e_{i_1}\cdots e_{i_{2k}}}(e_{j_1}\cdots e_{j_{2l}}) = \begin{cases} (-1)^t e_{j_1}\cdots e_{j_{2l}} & \left(\begin{array}{l} k,l\ \text{両方が奇数} \\ k,l\ \text{両方が偶数} \end{array}\right) \\ (-1)^{t-1} e_{j_1}\cdots e_{j_{2l}} & \left(\begin{array}{l} k\ \text{が偶数で}\ l\ \text{が奇数} \\ k\ \text{が奇数で}\ l\ \text{が偶数} \end{array}\right) \end{cases}$$

補題 7.4 ([11])．任意の　$\alpha,\beta\in Spin(n)$ に対して、

$$s_\alpha(-\beta) = -s_\alpha(\beta)$$

が成り立つ。

証明　$\alpha = a_1\cdots a_{2k}, \beta = b_1\cdots b_{2l}(a_i, b_i \in S^{n-1})$　とすると、

$$\begin{aligned}
s_\alpha(-\beta) &= s_{a_1\cdots a_{2k}}(-b_1\cdots b_{2l}) \\
&= a_1\cdots a_{2k}(-b_1\cdots b_{2l})^{-1}a_1\cdots a_{2k} \\
&= -a_1\cdots a_{2k}(b_{2l}\cdots b_1)a_1\cdots a_{2k} \\
&= -a_1\cdots a_{2k}(b_1\cdots b_{2l})^{-1}a_1\cdots a_{2k} \\
&= -s_\alpha(\beta)
\end{aligned}$$

となる。 □

8　スピノル群の極大対蹠集合

ここでは、スピノル群の極大対蹠集合の性質を見ていきたい。

命題 8.1 ([11])．
S を $Spin(n)$ の任意の極大対蹠集合としたとき、任意の元 $a\in S$ に対して、$-a\in S$ となる。

証明　任意の $b \in S$ に対して、

$$s_{(-a)}(b) = (-a)b^{-1}(-a) = ab^{-1}a = s_a(b) = b$$

となるので、$S \cup \{-a\}$ は $Spin(n)$ の対蹠集合であることが分かる。また、S は $Spin(n)$ の極大対蹠集合と仮定していたので、$S = S \cup \{-a\}$ である。したがって、$-a \in S$ である。

□

補題 8.1 ([11]) .
M_1, M_2 をコンパクト Riemann 対称空間とする。$f : M_1 \to M_2$ を準同型写像としたとき、S を M_1 の対蹠集合とすれば、$f(S)$ は M_2 の対蹠集合になる。

証明　任意の $p, q \in f(S)$ に対し、$p = f(s), q = f(t)(s, t \in S)$ とおく。このとき、

$$\begin{aligned} s_p(q) &= s_{f(s)}(f(t)) \\ &= f(s_s(t)) \\ &= f(t) \\ &= q \end{aligned}$$

となるので、$f(S)$ は M_2 の対蹠集合になる。□

補題 8.2 ([11]) .
$Spin(n)$ の単位元を含む任意の対蹠集合 S に対し、 $g \in Spin(n)$ で

$$gSg^{-1} \subset \{\pm e_{i_1} \cdots e_{i_{2k}} \mid i_1 < \cdots < i_{2k}, 1 \leq k \leq [\frac{n}{2}]\} \cup \{\pm 1\}$$

を満たすものが存在する。

証明　$p : Spin(n) \to SO(n)$ を射影としたとき、p は準同型写像より、補題 5.1 から $p(S)$ は $SO(n)$ の対蹠集合であることが分かる。また、系 2.1 より、$p(S)$ を含む $SO(n)$ の大対蹠集合 A が存在し、そして $g'Ag'^{-1} = X$ を満たす $g' \in SO(n)$ が存在する。また、p は全射であるから, $p(g) = g'$ を満たす $g \in Spin(n)$ が存在するので、$p(gSg^{-1}) \subset X$ が成り立つ。したがって、$gSg^{-1} \subset p^{-1}(X)$ が成立する。後は、$p^{-1}(X) = \{\pm e_{i_1} \cdots e_{i_{2k}} \mid i_1 < \cdots < i_{2k}, 1 \leq k \leq [\frac{n}{2}]\} \cup \{\pm 1\}$ が成り立つことが言えればよい。
ここで、$A_{i_1 \cdots i_{2k}}$ を X の元で -1 が $(i_1, i_1), \cdots (i_{2k}, i_{2k})$ 成分にある行列とする。$(i_1 < \cdots < i_{2k})$ 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対し、$x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ とすると、$A_{i_1 \cdots i_{2k}} x = a_1 e_1 + \cdots + a_{i_1 - 1} e_{i_1 - 1} - a_{i_1} e_{i_1} + \cdots a_{i_{2k-1}} e_{i_{2k-1}} - a_{i_{2k}} e_{i_{2k}} + \cdots a_n e_n$ となる。また、

$$p(e_{i_1} \cdots e_{i_{2k}}) e_j = \begin{cases} e_j & (j \notin \{i_1, \cdots i_{2k}\}) \\ -e_j & (j \in \{i_1, \cdots i_{2k}\}) \end{cases}$$

となるので、$p(e_{i_1}\cdots e_{i_{2k}})x = a_1e_1+\cdots+a_{i_1-1}e_{i_1-1}-a_{i_1}e_{i_1}+\cdots a_{i_{2k-1}}e_{i_{2k-1}}-a_{i_{2k}}e_{i_{2k}}+\cdots a_ne_n$ である。したがって、$p(e_{i_1}\cdots e_{i_{2k}}) = A_{i_1\cdots i_{2k}}$ となることが分かる。また、$p(e_{i_1}\cdots e_{i_{2k}}) = p(-e_{i_1}\cdots e_{i_{2k}})$ なので、p が 2 重被覆写像であることから、$p^{-1}(A_{i_1\cdots i_{2k}}) = \{\pm e_{i_1}\cdots e_{i_{2k}}\}$ となる。そして、$p^{-1}(E_n) = \{\pm 1\}$ であることから、$p^{-1}(X) = \{\pm e_{i_1}\cdots e_{i_{2k}} \mid i_1 < \cdots < i_{2k}, 1 \leq k \leq [\frac{n}{2}]\}\cup\{\pm 1\}$ が成り立つ。 □

補題 8.3 ([11]) .

$Spin(n)$ の単位元を含む任意の対蹠集合 S に対し、$g \in Spin(n)$ で

$$gSg^{-1} \subset \{\pm e_{i_1}\cdots e_{i_{4k}} \mid i_1 < \cdots < i_{4k}, 1 \leq k \leq [\frac{n}{4}]\} \cup \{\pm 1\}$$

を満たすものが存在する。

証明 補題 5.2 から、$gSg^{-1} \subset \{\pm e_{i_1}\cdots e_{i_{2k}} \mid i_1 < \cdots < i_{2k}, 1 \leq k \leq [\frac{n}{2}]\} \cup \{\pm 1\}$ を満たす $g \in Spin(n)$ が存在することが分かる。$x \in gSg^{-1}$ に対し、$x = \pm 1$ の場合は成り立つことがすぐ分かる。$x \notin \pm 1$ の場合を考える。つまり、$x = \pm e_{i_1\cdots i_{2k}}$ の形になっているはずである。ここで、補題 2.1 より、$x^2 = 1$ であり、補題 4.2 から $2k$ は 4 の倍数であることが分かる。したがって、$gSg^{-1} \subset \{\pm e_{i_1}\cdots e_{i_{4k}} \mid i_1 < \cdots < i_{4k}, 1 \leq k \leq [\frac{n}{4}]\}$ である。よって、$gSg^{-1} \subset \{\pm e_{i_1}\cdots e_{i_{4k}} \mid i_1 < \cdots < i_{4k}, 1 \leq k \leq [\frac{n}{4}]\} \cup \{\pm 1\}$ が成り立つ。□

ここで、$\alpha \in P_k(n)$ に対して、$e_\alpha := e_{\alpha(1)}\cdots e_{\alpha(k)}$ とする。

補題 8.4 ([11]) .

$Spin(n)$ の単位元を含む任意の極大対蹠集合 S に対して、

$$gSg^{-1} = \{\pm e_\alpha \mid \alpha \in A_{4k}, 1 \leq k \leq [\frac{n}{4}]\} \cup \{\pm 1\}$$

を満たすような $g \in Spin(n)$ と $A_{4k} \subset P_{4k}(n)(1 \leq k \leq [\frac{n}{4}])$ が存在する。また、$A_{4k} := \{\alpha \in P_{4k}(n) \mid e_\alpha \in gSg^{-1}$ または $-e_\alpha \in gSg^{-1}\}$ とする。

証明 ($\subset$):

補題 5.4 より $g \in Spin(n)$ で

$$gSg^{-1} \subset \{\pm e_\alpha \mid \alpha \in P_{4k}(n), 1 \leq k \leq [\frac{n}{4}]\} \cup \{\pm 1\}$$

を満たすものが存在する。任意の $x \in gSg^{-1}$ に対し、$x = \pm 1$ のときは成り立つことがすぐ分かる。また、$x \neq \pm 1$ の場合も $\alpha \in A_{4k}$ であることがすぐ分かる。よって $x \in \{\pm e_\alpha \mid \alpha \in A_{4k}, 1 \leq k \leq [\frac{n}{4}]\} \cup \{\pm 1\}$ である。

($\supset$):

$x \in \{\pm e_\alpha \mid \alpha \in A_{4k}, 1 \leq k \leq [\frac{n}{4}]\} \cup \{\pm 1\}$ に対し、$x = \pm 1$ の場合、S が $Spin(n)$ の単位元を含む極大対蹠集合であることから、命題 5.1 より、$\pm 1 \in gSg^{-1}$ であるので成立する。したがって、$x \neq \pm 1$ の場合を考える。

$k \in \{1, \cdots [\frac{n}{4}]\}$ であり、$\alpha \in A_{4k}$ で $x = e_\alpha$ または $x = -e_\alpha$ となるものが取れる。 また、$\alpha \in A_{4k}$ より $e_\alpha \in gSg^{-1}$ または $-e_\alpha \in gSg^{-1}$ であるので、$x \in gSg^{-1}$ である。よって、 $gSg^{-1} \supset \{\pm e_\alpha \mid \alpha \in A_{4k}, 1 \leq k \leq [\frac{n}{4}]\} \cup \{\pm 1\}$ である。
したがって　$gSg^{-1} = \{\pm e_\alpha \mid \alpha \in A_{4k}, 1 \leq k \leq [\frac{n}{4}]\} \cup \{\pm 1\}$　になる。 □

ここでまた記号を定義しておく。

$$P(n) := \bigcup_{0 \leq k \leq [\frac{n}{4}]} P_{4k}(n)$$

$A \subset P(n)$ に対し、$\mathcal{A}(A) := \{\pm e_\alpha \mid \alpha \in A\} \cup \{\pm 1\}$ とする。

補題 8.5 ([11]) . $A \subset P(n)$ であるとき、次の 2 つは同値である。

(1) $\mathcal{A}(A)$ が $Spin(n)$ の対蹠集合である。

(2) 任意の $\alpha, \beta \in A$ に対し、$\sharp(\alpha \cap \beta)$ が偶数である。

証明 (1) $\Rightarrow$ (2) :
$A \subset P(n)$ より、任意の $\alpha, \beta \in A$ に対して、 $k, l \in \{1, 2, \cdots, [\frac{n}{4}]\}$ で $\alpha \in P_{4k}(n), \beta \in P_{4l}(n)$ を満たすものが存在する。また、$e_\alpha, e_\beta \in \mathcal{A}(A)$ であることが分かるので、(1) の仮定から $s_{e_\alpha}(e_\beta) = e_\beta$ を満たす。ここで補題 4.3 より、$s_{e_\alpha}(e_\beta) = (-1)^{2k-2l+t} e_\beta = (-1)^t$ となるので t は偶数であることが分かる。
(2) $\Rightarrow$ (1) :
任意の $a, b \in \mathcal{A}(A)$ に対し、まず $a = \pm 1$ かつ $b = \pm 1$ の場合は $s_a(b) = b$ となり、対蹠集合になることがすぐ分かる。次に $a = \pm 1$ かつ $b \neq \pm 1$ の場合を考えてみる。 $s_{\pm 1}(b) = b^{-1}$ となるが、補題 4.2 から $b^{-1} = b$ となるので対蹠集合の定義を満たす。また $a \neq \pm 1$ かつ $b = \pm 1$ の場合は、補題 4.4 より $s_x(\pm 1) = \pm s_x(1) = \pm 1$ となるので、これも対蹠集合の定義を満たす。最後に $x \neq \pm 1$ かつ $y \neq \pm 1$ の場合を考える。つまり $\alpha, \beta \in A$ で $a = \pm e_\alpha, b = \pm e_\beta$ を満たすものを考える。また、補題 4.1 の (D) と補題 4.4 から $s_{e_\alpha}(e_\beta) = e_\beta$ が言えれば十分である。補題 4.3 と (2) の仮定より

$$\begin{aligned} s_{e_\alpha}(e_\beta) &= (-1)^{2k-2l+t} e_\beta \\ &= (-1)^t e_\beta \\ &= e_\beta \end{aligned}$$

となるので、$\mathcal{A}(A)$ が $Spin(n)$ の対蹠集合であることが分かる。 □

定義 8.1 $\alpha, \beta \in P(n)$ とする。$\sharp(\alpha \cap \beta)$ が偶数ならば、α と β は **対蹠的である**という。

定義 8.2 $A \subset P(n)$ とする。任意の $\alpha, \beta \in A$ が対蹠的であるとき、A を**対蹠的部分集合である**という。

つまり補題 5.5 から次の 2 つが同値であることが分かる。

$A \subset P(n)$ が対蹠的部分集合である $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}(A)$ が $Spin(n)$ の対蹠集合である

補題 8.6 ([11]) . $A, B \subset P(n)$ に対し、

$$A \subset B \Leftrightarrow \mathcal{A}(A) \subset \mathcal{A}(B)$$

が成立する。

証明 $(\Rightarrow)$:
$A \subset B$ とする。任意の $a \in \mathcal{A}(A)$ をとり、 $a = \pm 1$ の場合は $\mathcal{A}(B)$ の定義より $a \in \mathcal{A}(B)$ となるので成立する。 $a \neq \pm 1$ の場合は $\alpha \in A$ で $a = \pm e_\alpha$ であるものが取れるので、 $\alpha \in \beta$ より $a \in \mathcal{A}(B)$ が成り立つ。
$(\Leftarrow)$:
$\mathcal{A}(A) \subset \mathcal{A}(B)$ とする。$\mathcal{A}(A)$ の定義から、任意の $\alpha \in A$ に対し、$e_\alpha \in \mathcal{A}(A)$ であり、仮定から $e_\alpha \in \mathcal{A}(B)$ である。よって、$e_\alpha = \pm e_\beta$ となるものがとれる。ここで、$e_\alpha = -e_\beta$ の場合を考える。しかし、$e_{\alpha(1)} \cdots e_{\alpha(k)} + e_{\beta(1)} \cdots e_{\beta(k)} = 0$ はこれらが $Cl(\mathbb{R}^n)$ の元であることから成り立たない。よって、$e_\alpha = e_\beta$ となり、$\alpha = \beta$ となるので $\alpha \in B$ である。 □

補題 8.7 ([11]) . $A \subset P(n)$ とする。$\mathcal{A}(A)$ が $Spin(n)$ の極大対蹠集合であるならば、A は極大対蹠的部分集合である。

証明 対蹠的部分集合 $B \subset P(n)$ を $A \subset B$ となるようにとる。ここで補題 5.6 から $\mathcal{A}(A) \subset \mathcal{A}(B)$ が成立することが分かる。B が対蹠的部分集合であることから $\mathcal{A}(B)$ が $Spin(n)$ の対蹠集合となるので、仮定より $\mathcal{A}(A) = \mathcal{A}(B)$ である。したがって補題 5.6 より $A = B$ となるので A は極大対蹠部分集合である。 □

定理 8.1 ([11]) . $Spin(n)$ の単位元を含む任意の極大対蹠部分集合 S に対し、

$$gSg^{-1} = \mathcal{A}(A)$$

を満たす $g \in Spin(n)$ と 極大対蹠的部分集合 $A \subset P(n)$ が存在し、これを満たす A はただ一つである。

証明 補題 5.4 より $A \subset P(n)$ が極大な対蹠的部分集合であることが言えればよい。まず $\mathcal{A}(A) = gSg^{-1}$は $Spin(n)$ の対蹠集合なので A は対蹠的部分集合である。次に極大であることをいう。$A \subset B$ を満たす対蹠的部分集合 $B \subset P(n)$ をとる。補題 5.6 から $\mathcal{A}(A) \subset \mathcal{A}(B)$ が成立し、$\mathcal{A}(A)$ が $Spin(n)$ の極大対蹠集合であることから $\mathcal{A}(A) = \mathcal{A}(B)$ となる。よって補題 5.6 より $A = B$ となるので A は極大対蹠的部分集合である。また、一意性もこの証明で示されている。 □

予想 ([11])．任意の極大対蹠的部分集合 $A \subset P(n)$ に対し、$\mathcal{A}(A)$ は $Spin(n)$ の極大対蹠的部分群となる。

命題 8.2 ([1])．

$$\sharp_2 Spin(n) = \begin{cases} 2^{r+1} & (n \equiv 0,1,7 (\mathrm{mod} 8)) \\ 2^r & (\text{上記以外}) \end{cases}$$

この r は $Spin(n)$ の階数なので $r = [\frac{n}{2}]$ である。

系 8.1 ([1])．$n \leq 12$ の場合、$Spin(n)$ の 2-number は次のようなる。

n	$\sharp_2 Spin(n)$
$1,2,3$	2
$4,5$	4
6	8
7	16
$8,9,10,11$	32
12	64

9 $P(n)$ の極大対蹠的部分集合の分類

ここでは $P(n) = \bigcup_{0 \leq k \leq [\frac{n}{4}]} P_{4k}(n)$ の極大対蹠的部分集合を見ていきたい。
まず $P(n) = \bigcup_{0 \leq k \leq [\frac{n}{4}]} P_{4k}(n)$ の極大対蹠的部分集合を求める手順を定める。

(1) まず k を選んで、$P_{4k}(n)$ の最小元 A_1 を取る。

(2) 次に A_i に対して、A_{i+1} を次の手続きで定める。

(3) 固定部分群 $S(A_i) := \{g \in \mathrm{Sym}(n) \mid g(A_i) = A_i\}$ とする。

(4) $A(A_i) = \{\alpha \in P(n) - A_i \mid A_i \cup \{\alpha\}$ が対蹠的である $\}$ とする。

(5) $A(A_i) = \bigcup_{1 \leq a \leq j} O_a$ と $S(A_i)$ の軌道の和に分解する。

(6) $1 \leq a \leq j$ を選び、O_a の最小元 α_a とすると A_i に付け加えて $A_{i+1,\alpha} := A_i \cup \{\alpha_a\}$ が得られる。

(7) これを A_i が $P(n)$ の極大対蹠的部分集合になるまで繰り返す。すなわち、$A(A_i) = \phi$ となるまで繰り返す。

補題 9.1 上の手続きより $P(n)$ の合同類が全て得られる。

証明 $A : P(n)$ の極大対蹠的部分集合とする。まず、$A_1 \subset g(A)$ となる $g \in \mathrm{Sym}(n)$ が存在する。ここで、A と $g(A)$ は合同であるから、極大対蹠的部分集合の合同類を決定するためには、$A_1 \subset A$ と仮定しても一般性を失わない。次に α_a を $A(A_1)$ の $S(A_1)$ の軌道 O_a の最小元とする。よって $\alpha_a \in g(A)$ を満たす $g \in S(A_1)$ が存在する。またこの $g \in S(A_1)$ に対しても $A_1 \subset A$ より、$A_1 = g(A_1) \subset g(A)$ が成り立つので $A_{2,\alpha} = A_1 \cup \{\alpha_a\} \subset A$ である。この手続きを $A_i = A(i = \sharp A)$ となるまで繰り返すことができるので、$P(n)$ の合同類を全て得ることができる。 □

9.1 $P(4)$〜$P(8)$ の場合

定理 9.1 定理 5.1 から
$n = 4, 5$ の場合の極大対蹠的部分集合は $A(4, 4)$,
$n = 6$ の場合の極大対蹠的部分集合は $A(4, 6)$,
$n = 7$ の場合の極大対蹠的部分集合は $B(4, 7)$ となる。

定理 9.2 $P(8)$ の極大対蹠的部分集合は

$$A_{15,1} = B(4, 8) \cup \{\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}\}$$

である。

証明 $P(8) = P_4(8) \cup P_8(8)$ の極大対蹠的部分集合を求める。
これは $P_4(8)$ の極大対蹠的部分集合 $B(4, 8)$ と $P_8(8)$ の極大対蹠的部分集合 $\{\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}\}$ の和が唯一の $P(8)$ の極大対蹠的部分集合となるから、$P(8)$ の極大対蹠的部分集合は $B(4, 8) \cup \{\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}\}$ である。 □

9.2 $P(9)$ の場合

定理 9.3 $P(9)$ の極大対蹠的部分集合は

$$A_{15,1} = B(4, 8) \cup \{\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}\}$$

である。

証明 $P(9) = P_4(9) \cup P_8(9)$ の極大対蹠的部分集合を求める。

(1) $A_{1,1} = \{1, 2, 3, 4\}$ を取る。すると

$$\begin{aligned} A(A_{1,1}) &= \{\alpha \in P(9) - \{\{1, 2, 3, 4\}\} \mid \alpha \text{と } \{1, 2, 3, 4\} \text{ が対蹠的 }\} \\ &= P_2(\{1, 2, 3, 4\}) \times P_2(\{5, \ldots, 9\}) \\ &\cup\ P_4(\{5, \ldots, 9\}) \\ &\cup\ P_4(\{1, 2, 3, 4\}) \times P_4(\{5, \ldots, 9\}) \end{aligned}$$

となり、$S(A_{1,1}) = \mathrm{Sym}(\{1,2,3,4\}) \times \mathrm{Sym}(\{5,\ldots,9\})$ よりこれらは $S(A_{1,1})$ の 3 つの軌道になっているので 3 通りの場合分けが必要になる。

(1.1) $P_2(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,\ldots,9\})$ の最小元 $\{1,2,5,6\}$ を取り、$A_{1,1}$ に加え、

$$A_{2,1} = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\}\}$$

が得られる。そして

$$\begin{aligned} A(A_{2,1}) &= \{\{3,4,5,6\}\} \\ &\cup \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_2(\{7,8,9\}) \\ &\cup P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \times P_1(\{5,6\}) \times P_1(\{7,8,9\}) \\ &\cup P_2(\{5,6\}) \times P_2(\{7,8,9\}) \\ &\cup P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6\}) \times P_2(\{7,8,9\}) \end{aligned}$$

となる。$A(A_{2,1})$ において $\{\{3,4,5,6\}\}$ と他の元は対蹠的なので $A_{2,1}$ に加えられる。よって

$$A_{3,1} = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\}\} = A(4,6)$$

が得られる。そして

$$\begin{aligned} A(A_{3,1}) &= P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \times P_1(\{5,6\}) \times P_1(\{7,8,9\}) \\ &\cup \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\} \times P_2(\{7,8,9\}) \\ &\cup P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6\}) \times P_2(\{7,8,9\}) \end{aligned}$$

となる。$S(A_{3,1})$ は $\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\}$ の置換作用より、これらは $S(A_{3,1})$ の 3 つの軌道になっているので 3 通りの場合分けが必要になる。

(1.1.1) $P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \times P_1(\{5,6\}) \times P_1(\{7,8,9\})$ の最小元 $\{1,3,5,7\}$ を取り、$A_{3,1}$ に加え、

$$A_{4,1} = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,3,5,7\}\}$$

を得る。そして

$$\begin{aligned} A(A_{4,1}) &= \{\{1,4,6,7\},\{2,3,6,7\},\{2,4,5,7\}\} \\ &\cup \{\{1,3,6\},\{1,4,5\},\{2,3,5\},\{2,4,6\}\} \times P_1(\{8,9\}) \\ &\cup \{\{1,2,7\},\{3,4,7\},\{5,6,7\}\} \times P_1(\{8,9\}) \\ &\cup P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6\}) \times P_1(\{7\}) \times P_1(\{8,9\}) \end{aligned}$$

となる。$\{\{1,4,6,7\},\{2,3,6,7\},\{2,4,5,7\}\}$ は対蹠的で、$A(A_{4,1})$ において他の元とも対蹠的なので $A_{4,1}$ に加えると、

$$\begin{aligned} A_{7,1} = \{ \quad &\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,3,5,7\} \\ &\{1,4,6,7\},\{2,3,6,7\},\{2,4,5,7\}\} \end{aligned}$$

が得られる。また $A_{7,1}$ と $B(4,7) = B^c(3,7)$ は合同なので

$$
\begin{aligned}
A(A_{7,1}) &= \{\{1,3,6\},\{1,4,5\},\{2,3,5\},\{2,4,6\},\{1,2,7\},\\
&\quad \{3,4,7\},\{5,6,7\}\} \times P_1(\{8,9\})\\
&\cup \; P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6\}) \times P_1(\{7\}) \times P_1(\{8,9\})\\
&= A^c(7,1) \times P_1(\{8,9\})\\
&\cup \; P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6\}) \times P_1(\{7\}) \times P_1(\{8,9\})
\end{aligned}
$$

となる。$S(A_{7,1})$ はこれらに推移的に作用するので $S(A_{7,1})$ の 2 つの軌道になっており、2 通りの場合分けが必要になる。

(1.1.1.1) $A^c(7,1) \times P_1(\{8,9\})$ の最小元 $\{1,2,7,8\}$ を取り、$A_{7,1}$ に加えると

$$
\begin{aligned}
A_{8,1} = \{ \quad &\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,3,5,7\}\\
&\{1,4,6,7\},\{2,3,6,7\},\{2,4,5,7\},\{1,2,7,8\}\}
\end{aligned}
$$

が得られるので

$$
\begin{aligned}
A(A_{8,1}) &= \{\{1,3,6\},\{1,4,5\},\{2,3,5\},\{2,4,6\},\{1,2,7\},\\
&\quad \{3,4,7\},\{5,6,7\}\} \times P_1(\{8\})\\
&\cup \; \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}
\end{aligned}
$$

となる。これを $A_{8,1}$ に加えると、極大対蹠的部分集合 $A_{15} = B(4,8) \cup \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}$ が得られる。

(1.1.1.2) $P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6\}) \times P_1(\{7\}) \times P_1(\{8,9\})$ の最小元 $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ を取り、$A_{7,1}$ に加えると

$$
\begin{aligned}
A_{8,2} = \{ \quad &\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,3,5,7\}\\
&\{1,4,6,7\},\{2,3,6,7\},\{2,4,5,7\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}
\end{aligned}
$$

が得られる。よって

$$
A(A_{8,2}) = A^c_{7,1} \times \{\{8\}\}
$$

となり、これを $A_{8,2}$ に加えると、極大対蹠的部分集合 $A_{15,1} = B(4,8) \cup \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}$ が得られる。

(1.1.2) $\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\} \times P_2(\{7,8,9\})$ の最小元 $\{1,2,7,8\}$ を取り、$A_{3,1}$ に加えると

$$
A_{4,2} = A(4,6) \cup \{\{1,2,7,8\}\}
$$

が得られる。よって

$$
\begin{aligned}
A(A_{4,2}) &= P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \times P_1(\{5,6\}) \times P_1(\{7,8\})\\
&\cup \; \{\{3,4,7,8\},\{5,6,7,8\}\}\\
&\cup \; \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}
\end{aligned}
$$

となる。$\{\{3,4,7,8\},\{5,6,7,8\}\},\{\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}$ は対蹠的で、$A(A_{4,2})$ において他の元とも対蹠的なので付け加えられ、

$$A_{7,2} = A(4,8) \cup \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}$$

が得られる。また

$$A(A_{7,2}) = P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \times P_1(\{5,6\}) \times P_1(\{7,8\})$$

となる。これは $S(A_{7,2})$ の軌道になっている。

(1.1.2.1) $P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \times P_1(\{5,6\}) \times P_1(\{7,8\})$ の最小元 $\{1,3,5,7\}$ を取り、$A_{7,2}$ に加えると

$$A_{8,3} = A(4,8) \cup \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\} \cup \{\{1,3,5,7\}\}$$

となるので

$$\begin{aligned} E_{v_8} &= \{\{i_1,i_2,i_3,i_4\} \mid i_j \in \{2j-1,2j\}(1 \le j \le 4), \\ &\quad \text{偶数番号の数が偶数}\ \} \end{aligned}$$

としたとき、

$$A(A_{8,3}) = E_{v_8} - \{\{1,3,5,7\}\}$$

となる。これを $A_{8,3}$ に加えると、極大対蹠的部分集合 $A_{15} = B(4,8) \cup \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}$ が得られる。

(1.1.3) $P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6\}) \times P_2(\{7,8,9\})$ の最小元 $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ を取り、$A_{3,1}$ に加えると

$$A_{4,3} = A(4,6) \cup \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}$$

を得る。よって

$$\begin{aligned} A(A_{4,3}) &= P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \times P_1(\{5,6\}) \times P_1(\{7,8\}) \\ &\cup \{\{1,2,7,8\},\{3,4,7,8\},\{5,6,7,8\}\} \end{aligned}$$

となる。$\{\{1,2,7,8\},\{3,4,7,8\},\{5,6,7,8\}\}$ は対蹠的で、$A(A_{4,1})$ においてと他の元とも対蹠的なので付け加えられ、

$$A_{7,2} = A(4,8) \cup \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}$$

が得られる。よって (1.1.2) に帰着する。

(1.2) $P_4(\{5,\ldots,9\})$ の最小元 $\{5,6,7,8\}$ を取り、$A_{1,1}$ に加えると

$$A_{2,2} = \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\}\}$$

が得られる。また

$$\begin{aligned} A(A_{2,2}) &= P_2(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6,7,8\}) \\ &\cup \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\} \end{aligned}$$

となる。$A(A_{2,2})$ において $\{\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}$ と他の元は対蹠的なので $A_{2,2}$ に付け加えられ、

$$A_{3,2} = \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}$$

となるので

$$A(A_{3,2}) = P_2(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6,7,8\})$$

となる。これは $S(A_{3,2})$ の軌道になっている。

(1.2.1) $P_2(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6,7,8\})$ の最小元 $\{1,2,5,6\}$ を取り、$A_{3,2}$ に加えると

$$A_{4,4} = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\}\{5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{4,4}) &= \{\{1,2,7,8\},\{3,4,5,6\},\{3,4,7,8\}\} \\ &\cup P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \times P_1(\{5,6\}) \times P_1(\{7,8\}) \end{aligned}$$

となる。$\{\{1,2,7,8\},\{3,4,5,6\},\{3,4,7,8\}\}$ は対蹠的で $A(A_{4,4})$ において 他の元とも対蹠的なので $A_{4,4}$ に付け加えられ、

$$A_{7,2} = A(4,8) \cup \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}$$

が得られる。よって (1.1.2) に帰着する。

(1.3) $P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_4(\{5,\dots,9\})$ の最小元 $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ を取り、$A_{1,1}$ に加え

$$A_{2,3} = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{2,3}) &= P_2(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6,7,8\}) \\ &\cup \{\{5,6,7,8\}\} \end{aligned}$$

となる。$A(A_{2,3})$ において $\{\{5,6,7,8\}\}$ と他の元は対蹠的なので $A_{2,3}$ に付け加えられ、

$$A_{3,2} = \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}$$

となり、(1.2) に帰着する。

(2) $A_{1,2} = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ を取る。すると

$$A(A_{1,2}) = P_4(8)$$

となる。これらは $S(A_{1,2}) = \mathrm{Sym}(\{1,2,3,4,5,6,7,8\}) \times \{9\}$ より軌道になっていることが分かる。

(2.1) $P_4(8)$ の最小元 $\{1,2,3,4\}$ を取り、$A_{1,2}$ に加えると

$$A_{2,3} = \{\{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}$$

が得られるので、(1.3) に帰着する。

□

9.3 $P(10)$ の場合

定理 9.4 $P(10)$ の極大対蹠的部分集合は

$$\begin{aligned} A_{15,1} &= B(4,8) \cup \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}, \\ A_{15,2} &= A(4,10) \cup A(8,10) \end{aligned}$$

である。ちなみに

$$\begin{aligned} A(8,10) \quad = \quad & \{\alpha \cup \beta \cup \gamma \cup \delta \in P_8(10) \mid \\ & \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{\{1,2\}, \{3,4\}, \{5,6\}, \{7,8\}, \{9,10\}\}\} \end{aligned}$$

とする。

証明 $P(10) = P_4(10) \cup P_8(10)$ の極大対蹠的部分集合を求める。

(1) $A_{1,1} = \{1,2,3,4\}$ を取る。よって

$$\begin{aligned} A(A_{1,1}) \quad = \quad & P_2(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,\ldots,10\}) \\ \cup \quad & P_4(\{5,\ldots,10\}) \\ \cup \quad & P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_4(\{5,\ldots,10\}) \\ \cup \quad & P_2(\{1,2,3,4\}) \times P_6(\{5,\ldots,10\}) \end{aligned}$$

となる。$S(A_{1,1}) = \mathrm{Sym}(\{1,2,3,4\}) \times \mathrm{Sym}(\{5,\ldots,10\})$ より、これらは軌道になっている。

(1.1) $P_2(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,\ldots,10\})$ の最小元 $\{1,2,5,6\}$ を取り、$A_{1,1}$ に加えると

$$A_{2,1} = \{\{1,2,3,4\}, \{1,2,5,6\}\}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned}
A(A_{2,1}) &= \{\{3,4,5,6\}\} \\
&\cup \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_2(\{7,8,9,10\}) \\
&\cup P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \times P_1(\{5,6\}) \times P_1(\{7,8,9,10\}) \\
&\cup P_2(\{5,6\}) \times P_2(\{7,8,9,10\}) \\
&\cup P_4(\{7,8,9,10\}) \\
&\cup P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6\}) \times P_2(\{7,8,9,10\}) \\
&\cup P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_4(\{7,8,9,10\}) \\
&\cup \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_6(\{5,\dots,10\})
\end{aligned}$$

となる。$A(A_{2,1})$ において、$\{3,4,5,6\}$ と他の元は対蹠的なので $A_{2,1}$ に加え

$$A(3,1) = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\}\} = A(4,6)$$

が得られる。そして

$$\begin{aligned}
A(A_{3,1}) &= P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \times P_1(\{5,6\}) \times P_1(\{7,8,9,10\}) \\
&\cup \{\{7,8,9,10\}\} \\
&\cup \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\} \times P_2(\{7,8,9,10\}) \\
&\cup P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6\}) \times P_2(\{7,8,9,10\}) \\
&\cup P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_4(\{7,8,9,10\}) \\
&\cup \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_6(\{5,\dots,10\})
\end{aligned}$$

となる。$S(A_{3,1})$ は $\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\}$ の置換作用なので、これらは軌道になっている。

(1.1.1) $P_1(\{1,2\})\times P_1(\{3,4\})\times P_1(\{5,6\})\times P_1(\{7,8,9,10\})$ の最小元 $\{1,3,5,7\}$ を取り、$A_{3,1}$ に加え、

$$A_{4,1} = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,3,5,7\}\}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned}
A(A_{4,1}) &= \{\{1,4,6,7\},\{2,3,6,7\},\{2,4,5,7\}\} \\
&\cup \{\{1,3,6\},\{1,4,5\},\{2,3,5\},\{2,4,6\}\} \times P_1(\{8,9,10\}) \\
&\cup \{\{1,2,7\},\{3,4,7\},\{5,6,7\}\} \times P_1(\{8,9,10\}) \\
&\cup P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6\}) \times P_1(\{7\}) \times P_1(\{8,9,10\})
\end{aligned}$$

となる。$\{\{1,4,6,7\},\{2,3,6,7\},\{2,4,5,7\}\}$ はそれぞれ対蹠的であり、$A(A_{4,1})$ において他の元とも対蹠的なので $A_{4,1}$ に加え

$$\begin{aligned} A(7,1) &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,3,5,7\}, \\ &\quad \{1,4,6,7\},\{2,3,6,7\},\{2,4,5,7\}\} \end{aligned}$$

が得られる。また、$A_{7,1}$ と $B(4,7)=B^c_{3,7}$ は合同なので

$$\begin{aligned} A(A_{7,1}) &= \{\{1,2,7\},\{3,4,7\},\{5,6,7\},\{1,3,6\},\{1,4,5\}, \\ &\quad \{2,3,5\},\{2,4,6\}\} \times P_1(\{8,9,10\}) \\ &\cup \; P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6\}) \times P_1(\{7\}) \times P_1(\{8,9,10\}) \\ &= A^c_{7,1} \times P_1(\{8,9,10\}) \\ &\cup \; P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6\}) \times P_1(\{7\}) \times P_1(\{8,9,10\}) \end{aligned}$$

となる。これらは $S(A_{7,1})$ の軌道になっている。

(1.1.1.1) $A^c_{7,1} \times P_1(\{8,9,10\})$ の最小元 $\{1,2,7,8\}$ を取り、$A_{7,1}$ に加えると

$$\begin{aligned} A_{8,1} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,3,5,7\}, \\ &\quad \{1,4,6,7\},\{2,3,6,7\},\{2,4,5,7\},\{1,2,7,8\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{8,1}) &= \{\{3,4,7\},\{5,6,7\},\{1,3,6\},\{1,4,5\}, \\ &\quad \{2,3,5\},\{2,4,6\}\} \times P_1(\{8\}) \\ &\cup \; \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\} \end{aligned}$$

となり、これらを $A_{8,1}$ に加え、極大対蹠的部分集合 $A_{15,1}=B(4,8)\cup \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}$ が得られる。

(1.1.1.2) $P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6\}) \times P_1(\{7\}) \times P_1(\{8,9,10\})$ の最小元 $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ を取り、$A_{7,1}$ に加えると

$$\begin{aligned} A_{8,2} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,3,5,7\}, \\ &\quad \{1,4,6,7\},\{2,3,6,7\},\{2,4,5,7\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{8,2}) &= \{\{1,2,7\},\{3,4,7\},\{5,6,7\},\{1,3,6\},\{1,4,5\}, \\ &\quad \{2,3,5\},\{2,4,6\}\} \times P_1(\{8\}) \end{aligned}$$

となり、これらを $A_{8,2}$ に加え、極大対蹠的部分集合 $A_{15,1}=B(4,8)\cup \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}$ が得られる。

(1.1.2) $\{7,8,9,10\}$ を $A_{3,1}$ に加えると

$$A_{4,2} = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{7,8,9,10\}\}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{4,2}) &= \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\} \times P_2(\{7,8,9,10\}) \\ &\cup\ P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6\}) \times \{\{7,8\},\{9,10\}\} \\ &\cup\ P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_4(\{7,8,9,10\}) \\ &\cup\ \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_6(\{5,\ldots,10\}) \end{aligned}$$

となる。

$$\{\{1,2,3,4,7,8,9,10\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\},$$
$$\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\}\}$$

はそれぞれ対蹠的で、$A(A_{4,2})$ において他の元とも対蹠的なので $A_{4,2}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{9,1} = \ &\{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{7,8,9,10\}, \\ &\{1,2,3,4,7,8,9,10\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\}, \\ &\{3,4,5,6,7,8,9,10\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}, \\ &\{1,2,3,4,5,6,9,10\}\} \end{aligned}$$

が得られる。そして

$$A(A_{9,1}) = \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\} \times P_2(\{7,8,9,10\})$$

となり、これは $S(A_{9,1})$ の軌道になっている。

1.1.2.1 $\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\} \times P_2(\{7,8,9,10\})$ の最小元 $\{1,2,7,8\}$ を取り、$A_{9,1}$ に加えると

$$\begin{aligned} A_{10,1} = \ &\{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{1,2,7,8\},\{3,4,5,6\},\{7,8,9,10\}, \\ &\{1,2,3,4,7,8,9,10\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\}, \\ &\{3,4,5,6,7,8,9,10\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}, \\ &\{1,2,3,4,5,6,9,10\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{10,1}) &= \{\{3,4\},\{5,6\}\} \times P_2(\{7,8\}) \\ &\cup\ \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\} \times P_2(\{9,10\}) \end{aligned}$$

となり、$A_{10,1}$ に加えると極大対蹠的部分集合 $A_{15,2} = A(4,10) \cup A(8,10)$ が得られる。

(1.1.3) $\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\} \times P_2(\{7,8,9,10\})$ の最小元 $\{1,2,7,8\}$ を取り、$A_{3,1}$ に加え

$$A_{4,3} = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,2,7,8\}\}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned}
A(A_{4,3}) &= P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \times P_1(\{5,6\}) \times P_1(\{7,8\}) \\
&\cup \{\{7,8,9,10\}\} \\
&\cup \{\{3,4\},\{5,6\}\} \times \{\{7,8\}\} \\
&\cup \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\} \times \{\{9,10\}\} \\
&\cup P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6\}) \times \{\{7,8\},\{9,10\}\} \\
&\cup P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_4(\{7,8,9,10\}) \\
&\cup \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_6(\{5,\ldots,10\})
\end{aligned}$$

となる。$\{\{3,4,7,8\},\{5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}$ はそれぞれ対蹠的で、$A(A_{4,3})$ において他の元とも対蹠的なので $A_{4,3}$ に加え

$$\begin{aligned}
A_{7,2} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,2,7,8\} \\
&\quad \{3,4,7,8\},\{5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}
\end{aligned}$$

が得られる。そして

$$\begin{aligned}
A(A_{7,2}) &= P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \times P_1(\{5,6\}) \times P_1(\{7,8\}) \\
&\cup \{\{7,8,9,10\}\} \\
&\cup \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\} \times \{\{9,10\}\} \\
&\cup P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6\}) \times P_2(\{9,10\}) \\
&\cup P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_4(\{7,8,9,10\}) \\
&\cup \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_6(\{5,\ldots,10\})
\end{aligned}$$

となり、これらは $S(A_{7,2})$ の軌道になっている。

(1.1.3.1) $P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \times P_1(\{5,6\}) \times P_1(\{7,8\})$ の最小元 $\{1,3,5,7\}$ を取り、$A_{7,2}$ に加え

$$\begin{aligned}
A_{8,3} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,2,7,8\} \\
&\quad \{3,4,7,8\},\{5,6,7,8\},\{1,3,5,7\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}
\end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned}
A(A_{8,3}) &= \{\{1,3,6,8\},\{1,4,5,8\},\{1,4,6,7\},\{2,3,6,7\}, \\
&\quad \{2,4,5,7\},\{2,3,5,8\},\{2,4,6,8\}\}
\end{aligned}$$

となり、$A_{8,3}$ に加えると極大対蹠的部分集合

$$A_{15,1} = B(4,8) \cup \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}$$

が得られる。

(1.1.3.2) $\{7,8,9,10\}$ を取り、$A_{7,2}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,4} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,2,7,8\} \\ &\quad \{3,4,7,8\},\{5,6,7,8\},\{7,8,9,10\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{8,4}) &= \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\} \times \{\{9,10\}\} \\ &\cup \ P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6\}) \times P_2(\{9,10\}) \\ &\cup \ P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_4(\{7,8,9,10\}) \\ &\cup \ \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_6(\{5,\ldots,10\}) \end{aligned}$$

となり、これらを $A_{8,4}$ に加えると極大対蹠的部分集合 $A_{15,2} = A(4,10) \cup A(8,10)$ が得られる。

(1.1.3.3) $\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\} \times \{\{9,10\}\}$ の最小元 $\{1,2,9,10\}$ を取り、$A_{7,2}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,5} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,2,7,8\} \\ &\quad \{3,4,7,8\},\{5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{8,5}) &= \{\{7,8,9,10\}\} \\ &\cup \ \{\{3,4\},\{5,6\}\} \times \{\{9,10\}\} \\ &\cup \ P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6\}) \times P_2(\{9,10\}) \\ &\cup \ P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_4(\{7,8,9,10\}) \\ &\cup \ \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_6(\{5,\ldots,10\}) \end{aligned}$$

となり、これらを $A_{8,5}$ に加えると極大対蹠的部分集合 $A_{15,2} = A(4,10) \cup A(8,10)$ が得られる。

(1.1.3.4) $\{1,2,3,4,5,6,9,10\}$ を取り、$A_{7,2}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,6} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,2,7,8\} \\ &\quad \{3,4,7,8\},\{5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}, \\ &\quad \{1,2,3,4,5,6,9,10\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって (1.1.3.3) に帰着する。

(1.1.3.5) $\{1,2,3,4,7,8,9,10\}$ を取り、$A_{7,2}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,7} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,2,7,8\} \\ &\quad \{3,4,7,8\},\{5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}, \\ &\quad \{1,2,3,4,7,8,9,10\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって (1.1.3.3) に帰着する。

(1.1.3.6) $\{\{1,2\},\{3,4\}\}\times P_6(\{5,\dots,10\})$ の最小元 $\{1,2,5,6,7,8,9,10\}$ を取り、$A_{7,2}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,8} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,2,7,8\} \\ &\quad \{3,4,7,8\},\{5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}, \\ &\quad \{1,2,5,6,7,8,9,10\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって (1.1.3.3) に帰着する。

(1.1.4) $P_4(\{1,2,3,4\})\times P_2(\{5,6\})\times P_2(\{7,8,9,10\})$ の最小元 $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ を取り、$A_{3,1}$ に加え

$$A_{4,4} = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{4,4}) &= P_1(\{1,2\})\times P_1(\{3,4\})\times P_1(\{5,6\})\times P_1(\{7,8\}) \\ &\cup \{\{7,8,9,10\}\} \\ &\cup \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\}\times\{\{7,8\},\{9,10\}\} \\ &\cup P_4(\{1,2,3,4\})\times P_2(\{5,6\})\times P_2(\{9,10\}) \\ &\cup P_4(\{1,2,3,4\})\times P_4(\{7,8,9,10\}) \\ &\cup \{\{1,2\},\{3,4\}\}\times P_6(\{5,\dots,10\}) \end{aligned}$$

となる。$\{\{1,2,7,8\},\{3,4,7,8\},\{5,6,7,8\}\}$ はそれぞれ対蹠的で、$A(A_{4,4})$ において他の元とも対蹠的なので $A_{4,4}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{7,2} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{1,2,7,8\},\{3,4,5,6\}, \\ &\cup \{3,4,7,8\},\{5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\} \\ &= A(4,8)\cup\{\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって (1.1.3) に帰着する。

(1.1.5) $P_4(\{1,2,3,4\})\times P_4(\{7,8,9,10\})$ を取り、$A_{3,1}$ に加え

$$A_{4,5} = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,2,3,4,7,8,9,10\}\}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{4,5}) &= \{\{7,8,9,10\}\} \\ &\cup \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\} \times P_2(\{7,8,9,10\}) \\ &\cup P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6\}) \times P_2(\{7,8,9,10\}) \\ &\cup \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_6(\{5,\dots,10\}) \end{aligned}$$

となる。$\{\{7,8,9,10\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}\}$ はそれぞれ対蹠的で、$A(A_{4,5})$ において他の元とも対蹠的なので $A_{4,5}$ に加え

$$A_{7,3} = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{7,8,9,10\},$$
$$\{1,2,3,4,7,8,9,10\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}\}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{7,3}) &= \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\} \times P_2(\{7,8,9,10\}) \\ &\cup P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6\}) \times P_2(\{7,8,9,10\}) \end{aligned}$$

となる。これらは $S(A_{7,3})$ の軌道になっている。

(1,1,5,1) $\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\} \times P_2(\{7,8,9,10\})$ の最小元 $\{1,2,7,8\}$ を取る。これを $A_{7,3}$ に加え

$$A_{8,9} = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{1,2,7,8\},\{3,4,5,6\},\{7,8,9,10\},$$
$$\{1,2,3,4,7,8,9,10\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}\}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{8,9}) &= \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\} \times \{\{9,10\}\} \\ &\cup \{\{3,4\},\{5,6\}\} \times \{\{7,8\}\} \\ &\cup P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6\}) \times \{\{7,8\},\{9,10\}\} \end{aligned}$$

となり、これらはそれぞれ対蹠的なので $A_{8,9}$ に加え、
極大対蹠的部分集合 $A_{15,2} = A(4,10) \cup A(8,10)$ が得られる。

(1.1.5.2) $P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6\}) \times P_2(\{7,8,9,10\})$ の最小元
$\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ を取り、これを $A_{7,3}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,10} = &\{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{7,8,9,10\}, \\ &\{1,2,3,4,7,8,9,10\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\}, \\ &\{3,4,5,6,7,8,9,10\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よってこれは (1.1.5.1) に帰着する。

(1.1.6) $\{\{1,2\},\{3,4\}\}\times P_6(\{5,\ldots,10\})$ の最小元 $\{1,2,5,6,7,8,9,10\}$ を取り、$A_{3,1}$ に加え

$$A_{4,6}=\{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\}\}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{4,6}) &= \{\{7,8,9,10\}\} \\ &\cup \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\}\times P_2(\{7,8,9,10\}) \\ &\cup P_4(\{1,2,3,4\})\times P_2(\{5,6\})\times P_2(\{7,8,9,10\}) \\ &\cup P_4(\{1,2,3,4\})\times P_4(\{7,8,9,10\}) \\ &\cup \{\{3,4,5,6,7,8,9,10\}\} \end{aligned}$$

$\{\{7,8,9,10\},\{1,2,3,4,7,8,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}\}$ はそれぞれ対蹠的なので $A_{4,6}$ に加え

$$A_{7,3}=\{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{7,8,9,10\},$$
$$\{1,2,3,4,7,8,9,10\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}\}$$

が得られる。これは (1.1.5) に帰着する。

(1.2) $P_4(\{5,\ldots,10\})$ の最小元 $\{5,6,7,8\}$ を取り、$A_{1,1}$ に加え

$$A_{2,2}=\{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\}\}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{2,2}) &= P_2(\{1,2,3,4\})\times P_2(\{5,6,7,8\}) \\ &\cup P_2(\{1,2,3,4\})\times\{\{9,10\}\} \\ &\cup P_2(\{5,6,7,8\})\times\{\{9,10\}\} \\ &\cup P_4(\{1,2,3,4\})\times P_4(\{5,6,7,8\}) \\ &\cup P_4(\{1,2,3,4\})\times P_2(\{5,6,7,8\})\times P_2(\{9,10\}) \\ &\cup P_2(\{1,2,3,4\})\times P_6(\{5,6,7,8,9,10\}) \end{aligned}$$

となり、$\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ は $A(A_{2,2})$ において他の元と対蹠的なので $A_{2,2}$ に加えられ

$$A_{3,2}=\{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{3,2}) &= P_2(\{1,2,3,4\})\times(P_2(\{5,6,7,8\}),\{9,10\}) \\ &\cup P_2(\{5,6,7,8\})\times\{\{9,10\}\} \\ &\cup P_4(\{1,2,3,4\})\times P_2(\{5,6,7,8\})\times P_2(\{9,10\}) \\ &\cup P_2(\{1,2,3,4\})\times P_6(\{5,6,7,8,9,10\}) \end{aligned}$$

となり、これらは $S(A_{3,2})$ の軌道になっている。

(1.2.1) $P_2(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6,7,8\})$ の最小元 $\{1,2,5,6\}$ を取り、$A_{3,2}$ に加えると

$$A_{4,7} = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{4,7}) &= \{\{1,2\}\} \times \{\{7,8\},\{9,10\}\} \\ &\cup \{\{3,4\}\} \times \{\{5,6\},\{7,8\},\{9,10\}\} \\ &\cup \{\{5,6\},\{7,8\}\} \times \{\{9,10\}\} \\ &\cup P_4(\{1,2,3,4\}) \times \{\{5,6\},\{7,8\}\} \times \{\{9,10\}\} \\ &\cup \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_6(\{5,6,7,8,9,10\}) \end{aligned}$$

となり、これらは互いに対蹠的なので $A_{4,7}$ に加えられ、極大対蹠的部分集合 $A_{15,2} = A(4,10) \cup A(8,10)$ が得られる。

(1.2.2) $P_2(\{5,6,7,8\}) \times \{\{9,10\}\}$ の最小元 $\{5,6,9,10\}$ を取り、$A_{3,2}$ に加えると

$$A_{4,8} = \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{5,6,9,10\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{4,8}) &= P_2(\{1,2,3,4\}) \times \{\{5,6\},\{7,8\},\{9,10\}\} \\ &\cup \{\{7,8,9,10\}\} \\ &\cup P_4(\{1,2,3,4\}) \times \{\{5,6\},\{7,8\}\} \times \{\{9,10\}\} \\ &\cup P_2(\{1,2,3,4\}) \times P_6(\{5,6,7,8,9,10\}) \end{aligned}$$

となる。$A(A_{4,8})$ において $\{7,8,9,10\}$ と他の元は対蹠的なので $A_{4,8}$ に加えると

$$\begin{aligned} A_{5,1} &= \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{5,6,9,10\}, \\ &\qquad \{7,8,9,10\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{5,1}) &= P_2(\{1,2,3,4\}) \times \{\{5,6\},\{7,8\},\{9,10\}\} \\ &\cup P_4(\{1,2,3,4\}) \times \{\{5,6\},\{7,8\}\} \times \{\{9,10\}\} \\ &\cup P_2(\{1,2,3,4\}) \times P_6(\{5,6,7,8,9,10\}) \end{aligned}$$

となり、これらは $S(A_{5,1})$ の軌道になっている。

(1.2.2.1) $P_2(\{1,2,3,4\}) \times \{\{5,6\},\{7,8\},\{9,10\}\}$ の最小元 $\{1,2,5,6\}$ を取り、$A_{5,1}$ に加え

$$
\begin{aligned}
A_{6,1} &= \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{5,6,9,10\},\{7,8,9,10\},\\
&\quad \{1,2,5,6\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}
\end{aligned}
$$

が得られる。よって (1.2.1) に帰着する。

(1.2.2.2) $P_4(\{1,2,3,4\}) \times \{\{5,6\},\{7,8\}\} \times \{\{9,10\}\}$ の最小元 $\{1,2,3,4,5,6,9,10\}$ を取り、$A_{5,1}$ に加え

$$
\begin{aligned}
A_{6,2} &= \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{5,6,9,10\},\{7,8,9,10\},\\
&\quad \{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\}\}
\end{aligned}
$$

が得られる。よって

$$
\begin{aligned}
A(A_{6,2}) &= P_2(\{1,2,3,4\}) \times \{\{5,6\},\{7,8\},\{9,10\}\}\\
&\cup\ P_4(\{1,2,3,4\}) \times \{\{7,8\}\} \times \{\{9,10\}\}\\
&\cup\ P_2(\{1,2,3,4\}) \times P_6(\{5,6,7,8,9,10\})
\end{aligned}
$$

となり、$\{1,2,3,4,7,8,9,10\}$ は $A(A_{6,2})$ において他の元と対蹠的なので $A_{6,2}$ に付け加えられ

$$
\begin{aligned}
A_{7,4} &= \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{5,6,9,10\},\{7,8,9,10\},\\
&\quad \{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\},\\
&\quad \{1,2,3,4,7,8,9,10\}\}
\end{aligned}
$$

が得られる。よって

$$
\begin{aligned}
A(A_{7,4}) &= P_2(\{1,2,3,4\}) \times \{\{5,6\},\{7,8\},\{9,10\}\}\\
&\cup\ P_2(\{1,2,3,4\}) \times P_6(\{5,6,7,8,9,10\})
\end{aligned}
$$

となり、これらは $S(A_{7,4})$ の軌道になる。

(1.2.2.2.1) $P_2(\{1,2,3,4\}) \times \{\{5,6\},\{7,8\},\{9,10\}\}$ の最小元 $\{1,2,5,6\}$ を取り、$A_{7,4}$ に加えると

$$
\begin{aligned}
A_{8,11} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{5,6,7,8\},\{5,6,9,10\},\{7,8,9,10\},\\
&\quad \{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\},\\
&\quad \{1,2,3,4,7,8,9,10\}\}
\end{aligned}
$$

が得られる。よって

$$
\begin{aligned}
A(A_{8,11}) &= \{\{1,2\}\} \times \{\{7,8\},\{9,10\}\}\\
&\cup\ \{\{3,4\}\} \times \{\{5,6\},\{7,8\},\{9,10\}\}\\
&\cup\ \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_6(\{5,6,7,8,9,10\})
\end{aligned}
$$

これらは互いに対蹠的なので $A_{8,11}$ に加えられ、極大対蹠的部分集合 $A_{15,2} = A(4,10) \cup A(8,10)$ が得られる。

(1.2.2.2.2) $P_2(\{1,2,3,4\}) \times P_6(\{5,6,7,8,9,10\})$ の最小元 $\{1,2,5,6,7,8,9,10\}$ を取り、$A_{7,4}$ に加えると

$$\begin{aligned} A_{8,12} &= \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{5,6,9,10\},\{7,8,9,10\}, \\ &\quad \{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\}, \\ &\quad \{1,2,3,4,7,8,9,10\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって (1.2.2.2.1) に帰着する。

(1.2.2.3) $P_2(\{1,2,3,4\}) \times P_6(\{5,6,7,8,9,10\})$ の最小元 $\{1,2,5,6,7,8,9,10\}$ を取り、$A_{5,1}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{6,3} = \{&\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{5,6,9,10\},\{7,8,9,10\}, \\ &\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{6,3}) &= \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times \{\{5,6\},\{7,8\},\{9,10\}\} \\ &\cup \{\{1,2,3,4,\}\} \times \{\{5,6\},\{7,8\}\} \times \{\{9,10\}\} \\ &\cup \{\{3,4\}\} \times \{\{5,6,7,8,9,10\}\} \end{aligned}$$

となる。これらは互いに対蹠的なので $A_{6,3}$ に加えられ、極大対蹠的部分集合 $A_{15,2} = A(4,10) \cup A(8,10)$ が得られる。

(1,2,3) $P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6,7,8\}) \times P_2(\{9,10\})$ の最小元 $\{1,2,3,4,5,6,9,10\}$ を取り、$A_{3,2}$ に加えると

$$A_{4,9} = \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\}\}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{4,9}) &= P_2(\{1,2,3,4\}) \times \{\{5,6\},\{7,8\},\{9,10\}\} \\ &\cup \{\{5,6\},\{7,8\}\} \times \{\{9,10\}\} \\ &\cup \{\{1,2,3,4,7,8,9,10\}\} \\ &\cup \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_6(\{5,6,7,8,9,10\}) \end{aligned}$$

となり、$\{\{5,6,9,10\},\{7,8,9,10\},\{1,2,3,4,7,8,9,10\}\}$ はそれぞれ対蹠的で $A(A_{4,9})$ において他の元とも対蹠的なので $A_{4,9}$ に加えられ、

$$\begin{aligned} A_{7,5} &= \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{5,6,9,10\},\{7,8,9,10\}, \\ &\quad \{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\}, \\ &\quad \{1,2,3,4,7,8,9,10\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{7,5}) &= P_2(\{1,2,3,4\}) \times \{\{5,6\},\{7,8\},\{9,10\}\} \\ &\cup \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_6(\{5,6,7,8,9,10\}) \end{aligned}$$

となる。これらは $S(A_{7,5})$ の軌道になっている。

(1.2.3.1) $P_2(\{1,2,3,4\}) \times \{\{5,6\},\{7,8\},\{9,10\}\}$ の最小元 $\{1,2,5,6\}$ を取り、$A_{7,5}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,11} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{5,6,7,8\},\{5,6,9,10\},\{7,8,9,10\}, \\ &\quad \{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\}, \\ &\quad \{1,2,3,4,7,8,9,10\}\} \end{aligned}$$

が得られる。これは (1.2.2.2.1) に帰着する。

(1.2.3.2) $\{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_6(\{5,6,7,8,9,10\})$ の最小元 $\{1,2,5,6,7,8,9,10\}$ を取り、$A_{7,5}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,13} &= \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{5,6,9,10\},\{7,8,9,10\}, \\ &\quad \{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\}, \\ &\quad \{1,2,3,4,7,8,9,10\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\}\} \end{aligned}$$

が得られる。これは (1.2.2.2.1) に帰着する。

(1.2.4) $P_2(\{1,2,3,4\}) \times P_6(\{5,6,7,8,9,10\})$ の最小元 $\{1,2,5,6,7,8,9,10\}$ を取り、$A_{3,2}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{4,10} &= \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}, \\ &\quad \{1,2,5,6,7,8,9,10\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{4,10}) &= \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_2(\{5,6,7,8\}) \\ &\cup \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times \{\{9,10\}\} \\ &\cup P_2(\{5,6,7,8\}) \times \{\{9,10\}\} \\ &\cup P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6,7,8\}) \times \{\{9,10\}\} \\ &\cup \{\{3,4\}\} \times P_6(\{5,6,7,8,9,10\}) \end{aligned}$$

となり、$\{\{1,2,9,10\},\{3,4,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}\}$ はそれぞれ対蹠的で $A(A_{4,10})$ において他の元とも対蹠的なので $A_{4,10}$ に加えられ

$$\begin{aligned} A_{7,6} &= \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,9,10\}, \\ &\quad \{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\}, \\ &\quad \{3,4,5,6,7,8,9,10\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned}A(A_{7,6}) &= \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_2(\{5,6,7,8\})\\ &\cup\ P_2(\{5,6,7,8\}) \times \{\{9,10\}\}\\ &\cup\ P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6,7,8\}) \times \{\{9,10\}\}\end{aligned}$$

となる。これらは $S(A_{7,6})$ の軌道になる。

(1.2.4.1) $\{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_2(\{5,6,7,8\})$ の最小元 $\{1,2,5,6\}$ を取り、$A_{7,6}$ に加え

$$\begin{aligned}A_{8,13} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,9,10\},\\ &\quad \{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\\ &\quad \{3,4,5,6,7,8,9,10\}\}\end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned}A(A_{8,13}) &= \{\{1,2,7,8\}\}\\ &\cup\ \{\{3,4\}\} \times \{\{5,6\},\{7,8\}\}\\ &\cup\ \{\{5,6\},\{7,8\}\} \times \{\{9,10\}\}\\ &\cup\ P_4(\{1,2,3,4\}) \times \{\{5,6\},\{7,8\}\} \times \{\{9,10\}\}\end{aligned}$$

となり、これらは互いに対蹠的なので $A_{8,13}$ に加えられ、極大対蹠的部分集合 $A_{15,2} = A(4,10) \cup A(8,10)$ が得られる。

(1.2.4.2) $P_2(\{5,6,7,8\}) \times \{\{9,10\}\}$ の最小元 $\{5,6,9,10\}$ を取り、$A_{7,6}$ に加え

$$\begin{aligned}A_{8,14} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,9,10\},\\ &\quad \{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\\ &\quad \{3,4,5,6,7,8,9,10\}\}\end{aligned}$$

が得られる。これは (1.2.4.1) に帰着する。

(1.2.4.3) $P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6,7,8\}) \times \{\{9,10\}\}$ の最小元 $\{1,2,3,4,5,6,9,10\}$ を取り、$A_{7,6}$ に加え

$$\begin{aligned}A_{8,15} &= \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,9,10\},\\ &\quad \{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\\ &\quad \{3,4,5,6,7,8,9,10\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\}\}\end{aligned}$$

が得られる。よって (1.2.4.1) に帰着する。

(1.3) $P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_4(\{5,\ldots,10\})$ の最小元 $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ を取り、$A_{1,1}$ に加え

$$A_{2,3} = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{2,3}) &= P_2(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6,7,8\}) \\ &\cup\ P_2(\{1,2,3,4\}) \times \{\{9,10\}\} \\ &\cup\ \{\{5,6,7,8\}\} \\ &\cup\ P_2(\{5,6,7,8\}) \cup \{\{9,10\}\} \\ &\cup\ P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6,7,8\}) \times \{\{9,10\}\} \\ &\cup\ P_2(\{1,2,3,4\}) \times P_6(\{5,6,7,8,9,10\}) \end{aligned}$$

となる。$\{\{5,6,7,8\}\}$ は $A(A_{2,3})$ の他の元と対蹠的なので $A_{2,3}$ に加えられ、

$$A_{3,2} = \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}$$

となり、(1.2) に帰着する。

(1.4) $P_2(\{1,2,3,4\}) \times P_6(\{5,\ldots,10\})$ の最小元 $\{1,2,5,6,7,8,9,10\}$ を取り、$A_{1,1}$ に加え

$$A_{2,4} = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\}\}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{2,4}) &= \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_2(\{5,\ldots,10\}) \\ &\cup\ P_4(\{5,\ldots,10\}) \\ &\cup\ P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_4(\{5,\ldots,10\}) \\ &\cup\ \{\{3,4\}\} \times P_6(\{5,\ldots,10\}) \end{aligned}$$

となる。$\{3,4,5,6,7,8,9,10\}$ は $A(A_{2,4})$ において他の元と対蹠的なので $A_{2,4}$ に加えられ

$$A_{3,3} = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}\}$$

が得られる。そして

$$\begin{aligned} A(A_{3,3}) &= \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_2(\{5,\ldots,10\}) \\ &\cup\ P_4(\{5,\ldots,10\}) \\ &\cup\ P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_4(\{5,\ldots,10\}) \end{aligned}$$

となり、これらは $S(A_{3,3})$ の軌道になる。

(1.4.1) $\{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_2(\{5,\ldots,10\})$ の最小元 $\{1,2,5,6\}$ を取り、$A_{3,3}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{4,11} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\\ &\quad \{3,4,5,6,7,8,9,10\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{4,11}) &= \{\{1,2\}\} \times P_2(\{7,8,9,10\})\\ &\cup \{\{3,4,5,6\}\}\\ &\cup \{\{3,4\}\} \times P_2(\{7,8,9,10\})\\ &\cup \{\{7,8,9,10\}\}\\ &\cup P_2(\{5,6\}) \times P_2(\{7,8,9,10\})\\ &\cup P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6\}) \times P_2(\{7,8,9,10\})\\ &\cup P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_4(\{7,8,9,10\}) \end{aligned}$$

となり、$\{\{3,4,5,6\},\{7,8,9,10\},\{1,2,3,4,7,8,9,10\}\}$ はそれぞれ対蹠的で $A(A_{4,11})$ において他の元とも対蹠的なので $A_{4,11}$ に加えられ

$$\begin{aligned} A_{7,3} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{7,8,9,10\},\\ &\quad \{1,2,5,6,7,8,9,10\},\{1,2,3,4,7,8,9,10\},\\ &\quad \{3,4,5,6,7,8,9,10\}\} \end{aligned}$$

となり、(1.1.6) に帰着する。

(1.4.2) $P_4(\{5,\ldots,10\})$ の最小元 $\{5,6,7,8\}$ を取り、$A_{3,3}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{4,12} &= \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\\ &\quad \{3,4,5,6,7,8,9,10\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{4,12}) &= \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_2(\{5,6,7,8\})\\ &\cup \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times \{\{9,10\}\}\\ &\cup P_2(\{5,6,7,8\}) \times \{\{9,10\}\}\\ &\cup P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_4(\{5,6,7,8\})\\ &\cup P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6,7,8\}) \times \{\{9,10\}\} \end{aligned}$$

となり、$\{\{1,2,9,10\},\{3,4,9,10\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}$ はそれぞれ対蹠的で $A(A_{4,12})$ において他の元とも対蹠的なので $A_{4,12}$ に加えられ

$$\begin{aligned} A_{7,6} \quad = \quad & \{\{1,2,3,4\},\{1,2,9,10\},\{3,4,9,10\},\{5,6,7,8\}, \\ & \{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\}, \\ & \{3,4,5,6,7,8,9,10\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって (1.2.4) に帰着する。

(1.4.3) $P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_4(\{5,\ldots,10\})$ の最小元 $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ を取り、$A_{3,3}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{4,13} \quad = \quad & \{\{1,2,3,4\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\}, \\ & \{3,4,5,6,7,8,9,10\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって (1.2.4) に帰着する。

(2) $A_{1,2} = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ を取る。よって

$$\begin{aligned} A(A_{1,2}) \quad = \quad & P_6(\{1,\ldots,8\}) \times \{\{9,10\}\} \\ \cup \quad & P_4(\{1,\ldots,8\}) \\ \cup \quad & P_2(\{1,\ldots,8\}) \times \{\{9,10\}\} \end{aligned}$$

となり、これらは $S(A_{1,2})$ の軌道になっている。

(2.1) $P_6(\{1,\ldots,8\}) \times \{\{9,10\}\}$ の最小元 $\{1,2,3,4,5,6,9,10\}$ を取り、$A_{1,2}$ に加え、

$$A_{2,5} = \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\}\}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{2,5}) \quad = \quad & (P_4(\{1,\ldots,6\}) \times \{\{7,8\}\} \times \{\{9,10\}\}) \\ & -\{\{1,2,3,4,5,6,9,10\}\}) \\ \cup \quad & P_4(\{1,\ldots,6\}) \\ \cup \quad & P_2(\{1,\ldots,6\}) \times \{\{7,8\},\{9,10\}\} \\ \cup \quad & \{\{7,8,9,10\}\} \end{aligned}$$

となり、$\{\{7,8,9,10\}\}$ は $A(A_{2,5})$ において他の元と対蹠的なので $A_{2,5}$ に加え

$$A_{3,4} = \{\{7,8,9,10\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\}\}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{3,4}) &= (P_4(\{1,\ldots,6\}) \times \{\{7,8\}\} \times \{\{9,10\}\}) \\ &\quad -\{\{1,2,3,4,5,6,9,10\}\}) \\ &\cup \ P_4(\{1,\ldots,6\}) \\ &\cup \ P_2(\{1,\ldots,6\}) \times \{\{7,8\},\{9,10\}\} \end{aligned}$$

となり、これらは $A_{3,4}$ の軌道になっている。

(2.1.1)

$$\begin{aligned} & (P_4(\{1,\ldots,6\}) \times \{\{7,8\}\} \times \{\{9,10\}\}) \\ - \ & \{\{1,2,3,4,5,6,9,10\}\}) \end{aligned}$$

の最小元 $\{1,2,3,4,7,8,9,10\}$ を取り、$A_{3,4}$ に加えると

$$\begin{aligned} A_{4,14} &= \{\{7,8,9,10\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\}, \\ &\quad \{1,2,3,4,7,8,9,10\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{4,14}) &= (P_2(\{1,2,3,4\}) \times \{\{5,\ldots,10\}\} \\ &\cup \ P_4(\{1,,2,3,4\}) \\ &\cup \ P_2(\{1,,2,3,4\}) \times \{\{5,6\},\{7,8\},\{9,10\}\} \\ &\cup \ \{\{5,6\}\} \times \{\{7,8\},\{9,10\}\} \end{aligned}$$

となり、$\{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{5,6,9,10\}\}$ はそれぞれ対蹠的で
$A(A_{4,14})$ において他の元とも対蹠的なので $A_{4,14}$ に加えられ

$$\begin{aligned} A_{7,5} &= \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{5,6,9,10\},\{7,8,9,10\}, \\ &\quad \{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\}, \\ &\quad \{1,2,3,4,7,8,9,10\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって (1.2.3) に帰着する。

(2.1.2) $P_4(\{1,\ldots,6\})$ の最小元 $\{1,2,3,4\}$ を取り、$A_{3,4}$ に加えると

$$\begin{aligned} A_{4,15} &= \{\{1,2,3,4\},\{7,8,9,10\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}, \\ &\quad \{1,2,3,4,5,6,9,10\}\} \end{aligned}$$

が得られる。後は (1.2.3) に帰着する。

(2.1.3) $P_2(\{1,\dots,6\}) \times \{\{7,8\},\{9,10\}\}$ の最小元 $\{1,2,7,8\}$ を取り、$A_{3,4}$ に加えると

$$\begin{aligned} A_{4,16} &= \{\{1,2,7,8\},\{7,8,9,10\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}, \\ &\quad \{1,2,3,4,5,6,9,10\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{4,16}) &= \{\{1,2\}\} \times P_2(\{3,4,5,6\}) \times \{\{7,8,9,10\}\} \\ &\cup \{\{3,4,5,6,7,8,9,10\}\} \\ &\cup \{\{1,2\}\} \times P_2(\{3,4,5,6\}) \\ &\cup \{\{3,4,5,6\}\} \\ &\cup \{\{1,2,9,10\}\} \\ &\cup P_2(\{3,4,5,6\}) \times \{\{7,8\},\{9,10\}\} \end{aligned}$$

となる。$\{\{3,4,5,6\},\{1,2,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}\}$ はそれぞれ対蹠的で $A(A_{4,16})$ において他の元とも対蹠的なので $A_{4,16}$ に加えられ

$$\begin{aligned} A_{7,7} &= \{\{1,2,7,8\},\{1,2,9,10\},\{7,8,9,10\},\{3,4,5,6\}, \\ &\quad \{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\}, \\ &\quad \{3,4,5,6,7,8,9,10\}\} \end{aligned}$$

が得られる。そして

$$\begin{aligned} A(A_{7,7}) &= \{\{1,2\}\} \times P_2(\{3,4,5,6\}) \times \{\{7,8,9,10\}\} \\ &\cup \{\{1,2\}\} \times P_2(\{3,4,5,6\}) \\ &\cup P_2(\{3,4,5,6\}) \times \{\{7,8\},\{9,10\}\} \end{aligned}$$

となり、これらは $S(A_{7,7})$ の軌道になっている。

(2.1.3.1) $\{\{1,2\}\} \times P_2(\{3,4,5,6\}) \times \{\{7,8,9,10\}\}$ の最小元 $\{1,2,3,4,7,8,9,10\}$ を取り、$A_{7,7}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,16} &= \{\{1,2,7,8\},\{1,2,9,10\},\{7,8,9,10\},\{3,4,5,6\}, \\ &\quad \{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\}, \\ &\quad \{1,2,3,4,7,8,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{8,16}) &= \{\{1,2,5,6,7,8,9,10\}\} \\ &\cup \{\{1,2\}\} \times \{\{3,4\},\{5,6\}\} \\ &\cup \{\{3,4\},\{5,6\}\} \times \{\{7,8\},\{9,10\}\} \end{aligned}$$

となる。これらを $A_{8,16}$ に加え、極大対蹠的部分集合 $A_{15,2} = A(4,10) \cup A(8,10)$ が得られる。

(2.1.3.2) $\{\{1,2\}\} \times P_2(\{3,4,5,6\})$ の最小元 $\{1,2,3,4\}$ を取り、$A_{7,7}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,17} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,7,8\},\{1,2,9,10\},\{7,8,9,10\}, \\ &\quad \{3,4,5,6\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\}, \\ &\quad \{3,4,5,6,7,8,9,10\}\} \end{aligned}$$

が得られる。これは (2.1.3.1) に帰着する。

(2.1.3.3) $P_2(\{3,4,5,6\}) \times \{\{7,8\},\{9,10\}\}$ の最小元 $\{3,4,7,8\}$ を取り、$A_{7,7}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,18} &= \{\{1,2,7,8\},\{1,2,9,10\},\{7,8,9,10\},\{3,4,5,6\}, \\ &\quad \{3,4,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\}, \\ &\quad \{3,4,5,6,7,8,9,10\}\} \end{aligned}$$

が得られる。これは (2.1.3.1) に帰着する。

(2.2) $P_4(\{1,\dots,8\})4$ の最小元 $\{1,2,3,4\}$ を取り、$A_{1,2}$ に加え

$$A_{2,6} = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{2,6}) &= \{\{1,2,3,4\}\} \times P_2(\{5,6,7,8\}) \times \{\{9,10\}\} \\ &\cup\ P_2(\{1,2,3,4\}) \times \{\{5,6,7,8\}\} \times \{\{9,10\}\} \\ &\cup\ \{\{5,6,7,8\}\} \\ &\cup\ P_2(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6,7,8\}) \\ &\cup\ P_2(\{1,2,3,4\}) \times \{\{9,10\}\} \\ &\cup\ P_2(\{5,6,7,8\}) \times \{\{9,10\}\} \end{aligned}$$

となり、$\{\{5,6,7,8\}\}$ は $A(A_{2,6})$ において他の元と対蹠的なので $A_{2,6}$ に加え

$$A_{3,2} = \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}$$

が得られる。よって (1,2) に帰着する。

(2.3) $P_2(\{1,\dots,8\}) \times \{\{9,10\}\}$ の最小元 $\{1,2,9,10\}$ を取り、$A_{1,2}$ に加え

$$A_{2,7} = \{\{1,2,9,10\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{2,7}) &= \{\{1,2\}\} \times P_4(\{3,\ldots,8\}) \times \{\{9,10\}\} \\ &\cup \{\{3,4,5,6,7,8,9,10\}\} \\ &\cup \{\{1,2\}\} \times P_2(\{3,\ldots,8\}) \\ &\cup P_4(\{3,\ldots,8\}) \\ &\cup P_2(\{3,\ldots,8\}) \times \{\{9,10\}\} \end{aligned}$$

となり、$\{\{3,4,5,6,7,8,9,10\}\}$ は $A(A_{2,7})$ において他の元と対蹠的なので $A_{2,7}$ に加えられ

$$A_{3,5} = \{\{1,2,9,10\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}\}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{3,5}) &= \{\{1,2\}\} \times P_4(\{3,\ldots,8\}) \times \{\{9,10\}\} \\ &\cup \{\{1,2\}\} \times P_2(\{3,\ldots,8\}) \\ &\cup P_4(\{3,\ldots,8\}) \\ &\cup P_2(\{3,\ldots,8\}) \times \{\{9,10\}\} \end{aligned}$$

となり、これらは $S(A_{3,5})$ の軌道になっている。

(2.3.1) $\{\{1,2\}\} \times P_4(\{3,\ldots,8\}) \times \{\{9,10\}\}$ の最小元 $\{1,2,3,4,5,6,9,10\}$ を取り、$A_{3,5}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{4,17} &= \{\{1,2,9,10\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}, \\ &\quad \{1,2,3,4,5,6,9,10\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{4,17}) &= \{\{1,2\}\} \times P_2(\{3,4,5,6\}) \times \{\{7,8,9,10\}\} \\ &\cup \{\{1,2\}\} \times P_2(\{3,4,5,6\}) \\ &\cup \{\{1,2,7,8\}\} \\ &\cup \{\{3,4,5,6\}\} \\ &\cup P_2(\{3,4,5,6\}) \times \{\{7,8\},\{9,10\}\} \\ &\cup \{\{7,8,9,10\}\} \end{aligned}$$

となる。$\{\{1,2,7,8\},\{3,4,5,6\},\{7,8,9,10\}\}$ はそれぞれ対蹠的で $A(A_{4,17})$ において他の元とも対蹠的なので $A_{4,17}$ に加えられ

$$\begin{aligned} A_{7,7} &= \{\{1,2,7,8\},\{1,2,9,10\},\{7,8,9,10\},\{3,4,5,6\}, \\ &\quad \{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\}, \\ &\quad \{3,4,5,6,7,8,9,10\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって (2.1.3) に帰着する。

(2.3.2) $\{\{1,2\}\} \times P_2(\{3,\ldots,8\})$ の最小元 $\{1,2,3,4\}$ を取り、$A_{3,5}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{4,18} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,9,10\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\\ &\quad \{3,4,5,6,7,8,9,10\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{4,18}) &= \{\{1,2,5,6,7,8,9,10\}\}\\ &\cup \{\{1,2\}\} \times \{\{3,4\}\} \times P_2(\{5,6,7,8\}) \times \{\{9,10\}\}\\ &\cup \{\{1,2\}\} \times P_2(\{5,6,7,8\})\\ &\cup \{\{5,6,7,8\}\}\\ &\cup \{\{3,4\}\} \times P_2(\{5,6,7,8,\})\\ &\cup \{\{3,4,9,10\}\}\\ &\cup P_2(\{5,6,7,8\}) \times \{\{9,10\}\} \end{aligned}$$

となる。$\{\{3,4,9,10\},\{5,6,7,8\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\}\}$ はそれぞれ対蹠的で $A(A_{4,18})$ において他の元とも対蹠的なので $A_{4,18}$ に加えられ

$$\begin{aligned} A_{7,6} &= \{\{1,2,7,8\},\{1,2,9,10\},\{7,8,9,10\},\{3,4,5,6\},\\ &\quad \{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\},\\ &\quad \{3,4,5,6,7,8,9,10\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって (1.2.4) に帰着する。

(2.3.3) $P_4(\{3,\ldots,8\})$ の最小元 $\{3,4,5,6\}$ を取り $A_{3,5}$ に加え、

$$\begin{aligned} A_{4,19} &= \{\{1,2,9,10\},\{3,4,5,6\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\\ &\quad \{3,4,5,6,7,8,9,10\}\} \end{aligned}$$

が得られる。後は (2.3.1) に帰着していく。

(2.3.4) $P_2(\{3,\ldots,8\}) \times \{\{9,10\}\}$ の最小元 $\{3,4,9,10\}$ を取り $A_{3,5}$ に加え、

$$\begin{aligned} A_{4,20} &= \{\{1,2,9,10\},\{3,4,9,10\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\\ &\quad \{3,4,5,6,7,8,9,10\}\} \end{aligned}$$

が得られる。後は (2.3.2) に帰着していく。

□

9.4 $P(11)$ の場合

定理 9.5 $P(11)$ の極大対蹠的部分集合は

(1) $A_{15,1} = B(4,8) \cup \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}$

(2) $A_{15,2} = A(4,10) \cup A(8,10)$

(3)

$$\begin{aligned} A_{15,3} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\\ &\quad \{1,3,5,7\},\{1,4,6,7\},\{2,3,6,7\},\\ &\quad \{2,4,5,7\},\{8,9,10,11\},\{1,3,5,7,8,9,10,11\},\\ &\quad \{1,2,3,4,8,9,10,11\},\{1,2,5,6,8,9,10,11\},\\ &\quad \{3,4,5,6,8,9,10,11\},\{1,4,6,7,8,9,10,11\},\\ &\quad \{2,3,6,7,8,9,10,11\},\{2,4,5,7,8,9,10,11\}\} \end{aligned}$$

である。

証明 $P(11) = P_4(11) \cup P_8(11)$ の極大対蹠的部分群を求める。

(1) $A_{1,1} = \{1,2,3,4\}$ を取る。よって

$$\begin{aligned} A(A_{1,1}) &= P_2(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,\ldots,11\})\\ &\cup P_4(\{5,\ldots,11\})\\ &\cup P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_4(\{5,\ldots,11\})\\ &\cup P_2(\{1,2,3,4\}) \times P_6(\{5,\ldots,11\}) \end{aligned}$$

となる。これらは $S(A_{1,1}) = \mathrm{Sym}(\{1,2,3,4\}) \times \mathrm{Sym}(\{5,\ldots,11\})$ の軌道になっている。

(1.1) $P_2(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,\ldots,11\})$ の最小元 $\{1,2,5,6\}$ を取り、$A_{1,1}$ に加え

$$A_{2,1} = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\}\}$$

が得られる。よって

$$
\begin{aligned}
A(A_{2,1}) &= \{3,4,5,6\} \\
&\cup \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\} \times P_2(\{7,\ldots,11\}) \\
&\cup P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \times P_1(\{5,6\}) \\
&\quad \times P_1(\{7,\ldots,11\}) \\
&\cup P_4(\{7,\ldots,11\}) \\
&\cup P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5.6\}) \\
&\quad \times P_2(\{7,\ldots,11\}) \\
&\cup P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_4(\{7,\ldots,11\}) \\
&\cup P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \times P_1(\{5,6\}) \\
&\quad \times P_5(\{7,\ldots,11\}) \\
&\cup \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_2(\{5,6\}) \\
&\quad \times P_4(\{7,\ldots,11\})
\end{aligned}
$$

となる。$\{\{3,4,5,6\}\}$ は $A(A_{2,1})$ において他の元と対蹠的だから $A_{2,1}$ に加え

$$A_{3,1} = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\}\}$$

が得られる。よって

$$
\begin{aligned}
A(A_{3,1}) &= P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \times P_1(\{5,6\}) \\
&\quad \times P_1(\{7,\ldots,11\}) \\
&\cup \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\} \times P_2(\{7,\ldots,11\}) \\
&\cup P_4(\{7,\ldots,11\}) \\
&\cup P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5.6\}) \\
&\quad \times P_2(\{7,\ldots,11\}) \\
&\cup P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_4(\{7,\ldots,11\}) \\
&\cup P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \times P_1(\{5,6\}) \\
&\quad \times P_5(\{7,\ldots,11\}) \\
&\cup \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_2(\{5,6\}) \\
&\quad \times P_4(\{7,\ldots,11\})
\end{aligned}
$$

となり、これらは $S(A_{3,1})$ の軌道になっている。

(1.1.1) $P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \times P_1(\{5,6\}) \times P_1(\{7,\ldots,11\})$ の最小元 $\{1,3,5,7\}$ を取り、$A_{3,1}$ に加え

$$A_{4,1} = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,3,5,7\}\}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned}
A(A_{4,1}) &= \{\{1,4,6,7\},\{2,3,6,7\},\{2,4,5,7\}\} \\
&\cup \{\{1,3,6\},\{1,4,5\},\{2,3,5\},\{2,4,6\}, \\
&\quad \{1,2,7\},\{3,4,7\},\{5.6.7\}\} \times P_1(\{8,9,10,11\}) \\
&\cup \{\{8,9,10,11\}\} \\
&\cup P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6\}) \times P_1(\{7\}) \\
&\quad \times P_1(\{8,9,10,11\}) \\
&\cup \{\{1,2,3,4,8,9,10,11\}\} \\
&\cup \{\{1,3,5\},\{1,4,6\},\{2,3,6\},\{2,4,5\}\} \\
&\quad \times \{\{7,\ldots,11\}\} \\
&\cup \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_2(\{5,6\}) \\
&\quad P_4(\{8,9,10,11\})
\end{aligned}$$

となり、$\{\{1,4,6,7\},\{2,3,6,7\},\{2,4,5,7\}\}$ は互いに対蹠的で、$A(A_{4,1})$ において他の元とも対蹠的なので $A_{4,1}$ に付け加えられ

$$\begin{aligned}
A_{7,1} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,3,5,7\} \\
&\quad \{1,4,6,7\},\{2,3,6,7\},\{2,4,5,7\}\}
\end{aligned}$$

が得られる。$A_{7,1}$ と $B(4,7) = B^c(3,7)$ は合同なので

$$\begin{aligned}
A(A_{7,1}) &= \{\{1,3,6\},\{1,4,5\},\{2,3,5\},\{2,4,6\}, \\
&\quad \{1,2,7\},\{3,4,7\},\{5.6.7\}\} \times P_1(\{8,9,10,11\}) \\
&\cup \{\{8,9,10,11\}\} \\
&\cup P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6\}) \times P_1(\{7\}) \\
&\quad \times P_1(\{8,9,10,11\}) \\
&\cup \{\{1,2,3,4,8,9,10,11\}\} \\
&\cup \{\{1,3,5\},\{1,4,6\},\{2,3,6\},\{2,4,5\}\} \\
&\quad \times P_5(\{7,\ldots,11\}) \\
&\cup \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_2(\{5,6\}) \\
&\quad \times P_4(\{8,9,10,11\})
\end{aligned}$$

となり、これらは $S(A_{7,1})$ の軌道になる。

(1.1.1.1)

$$\begin{aligned}
&\{\{1,3,6\},\{1,4,5\},\{2,3,5\},\{2,4,6\}, \\
&\{1,2,7\},\{3,4,7\},\{5.6.7\}\} \times P_1(\{8,9,10,11\})
\end{aligned}$$

の最小元 $\{1,2,7,8\}$ を取り、$A_{7,1}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,1} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{1,2,7,8\},\{3,4,5,6\}, \\ &\quad \{1,3,5,7\},\{1,4,6,7\},\{2,3,6,7\},\{2,4,5,7\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{8,1}) &= \{\{1,3,6\},\{1,4,5\},\{2,3,5\},\{2,4,6\}, \\ &\quad \{3,4,7\},\{5.6.7\}\} \times P_1(\{8\}) \\ &\cup \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\} \end{aligned}$$

となる。これらを $A_{8,1}$ に加え、極大対蹠的部分集合 $A_{15,1} = B(4,8) \cup \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}$ が得られる。

(1.1.1.2) $\{8,9,10,11\}$ を取り、$A_{7,1}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,2} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{8,9,10,11\}, \\ &\quad \{1,3,5,7\},\{1,4,6,7\},\{2,3,6,7\},\{2,4,5,7\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{8,2}) &= \{\{1,2,3,4,8,9,10,11\}\} \\ &\cup \{\{1,3,5\},\{1,4,6\},\{2,3,6\},\{2,4,5\}\} \\ &\quad \times P_5(\{7,\dots,11\}) \\ &\cup \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_2(\{5,6\}) \\ &\quad P_4(\{8,9,10,11\}) \end{aligned}$$

となり、これらを $A_{8,2}$ に加えると極大対蹠的部分集合

$$\begin{aligned} A_{15,2} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\}, \\ &\quad \{1,3,5,7\},\{1,4,6,7\},\{2,3,6,7\}, \\ &\quad \{2,4,5,7\},\{8,9,10,11\},\{1,3,5,7,8,9,10,11\}, \\ &\quad \{1,2,3,4,8,9,10,11\},\{1,2,5,6,8,9,10,11\}, \\ &\quad \{3,4,5,6,8,9,10,11\},\{1,4,6,7,8,9,10,11\}, \\ &\quad \{2,3,6,7,8,9,10,11\},\{2,4,5,7,8,9,10,11\}\} \end{aligned}$$

が得られる。

(1.1.1.3)

$$\begin{aligned} &P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6\}) \times P_1(\{7\}) \\ &\times P_1(\{8,9,10,11\}) \end{aligned}$$

の最小元 $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ を取り、$A_{7,1}$ に加え

$$\begin{aligned}A_{8,3} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,3,5,7\}\\ &\{1,4,6,7\},\{2,3,6,7\},\{2,4,5,7\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}\end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned}A(A_{8,3}) &= \{\{1,3,6\},\{1,4,5\},\{2,3,5\},\{2,4,6\},\\ &\{1,2,7\},\{3,4,7\},\{5.6.7\}\}\times P_1(\{8\})\end{aligned}$$

となる。これらを $A_{8,3}$ に加え、極大対蹠的部分集合 $A_{15,1} = B(4,8)\cup\{\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}$ が得られる。

(1.1.1.4) $\{1,2,3,4,8,9,10,11\}$ を取り、$A_{7,1}$ に加え

$$\begin{aligned}A_{8,4} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,3,5,7\}\\ &\{1,4,6,7\},\{2,3,6,7\},\{2,4,5,7\},\{1,2,3,4,8,9,10,11\}\}\end{aligned}$$

が得られる。これは (1.1.1.2) に帰着する。

(1.1.1.5) $\{\{1,3,5\},\{1,4,6\},\{2,3,6\},\{2,4,5\}\}\times P_5(\{7,\dots,11\})$ の最小元 $\{1,3,5,7,8,9,10,11\}$ を取り、$A_{7,1}$ に加え

$$\begin{aligned}A_{8,5} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,3,5,7\}\\ &\{1,4,6,7\},\{2,3,6,7\},\{2,4,5,7\},\\ &\{1,3,5,7,8,9,10,11\}\}\end{aligned}$$

が得られる。これは (1.1.1.2) に帰着する。

(1.1.1.6) $\{\{1,2\},\{3,4\}\}\times P_2(\{5,6\})\times P_4(\{8,9,10,11\})$ の最小元 $\{1,2,5,6,8,9,10,11\}$ を取り、$A_{7,1}$ に加え

$$\begin{aligned}A_{8,6} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,3,5,7\}\\ &\{1,4,6,7\},\{2,3,6,7\},\{2,4,5,7\},\\ &\{1,2,5,6,8,9,10,11\}\}\end{aligned}$$

が得られる。これは (1.1.1.2) に帰着する。

(1.1.2) $\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\}\times P_2(\{7,\dots,11\})$ の最小元 $\{1,2,7,8\}$ を取り、$A_{3,1}$ に加え

$$A_{4,2} = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,2,7,8\}\}$$

が得られる。よって

$$
\begin{aligned}
A(A_{4,2}) &= P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \times P_1(\{5,6\}) \\
&\quad \times P_1(\{7,8\}) \\
&\cup\ \{\{3,4\},\{5,6\}\} \times P_2(\{7,8\}) \\
&\cup\ \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\} \times P_2(\{9,10,11\}) \\
&\cup\ P_2(\{7,8\}) \times P_2(\{9,10,11\}) \\
&\cup\ P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5.6\}) \\
&\quad \times P_2(\{7,8\}) \\
&\cup\ P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5.6\}) \\
&\quad \times P_2(\{9,10,11\}) \\
&\cup\ P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{7,8\}) \\
&\quad \times P_2(\{9,10,11\}) \\
&\cup\ \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_2(\{5,6\}) \\
&\quad \times P_2(\{7,8\}) \times P_2(\{9,10,11\})
\end{aligned}
$$

となる。$\{\{3,4,7,8\},\{5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}$ はそれぞれ対蹠的で $A(A_{4,2})$ において他の元とも対蹠的なので付け加えられ

$$
\begin{aligned}
A_{7,2} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,2,7,8\} \\
&\quad \{3,4,7,8\},\{5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\} \\
&= A(4,8) \cup \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}
\end{aligned}
$$

が得られる。よって

$$
\begin{aligned}
A(A_{7,2}) &= P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \times P_1(\{5,6\}) \\
&\quad \times P_1(\{7,8\}) \\
&\cup\ \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\} \times P_2(\{9,10,11\}) \\
&\cup\ P_2(\{7,8\}) \times P_2(\{9,10,11\}) \\
&\cup\ P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5.6\}) \\
&\quad \times P_2(\{9,10,11\}) \\
&\cup\ P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{7,8\}) \\
&\quad \times P_2(\{9,10,11\}) \\
&\cup\ \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_2(\{5,6\}) \\
&\quad \times P_2(\{7,8\}) \times P_2(\{9,10,11\})
\end{aligned}
$$

となる。これらは $S(A_{7,2})$ の軌道になっている。

(1.1.2.1) $P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \times P_1(\{5,6\})$
$\times P_1(\{7,8\})$ の最小元 $\{1,3,5,7\}$ を取り、$A_{7,2}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,7} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,2,7,8\} \\ &\quad \{1,3,5,7\},\{3,4,7,8\},\{5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{8,7}) &= \{\{1,3,6,8\},\{1,4,5,8\},\{1,4,6,7\}, \\ &\quad \{2,3,5,8\},\{2,3,6,7\},\{2,4,5,7\}\} \\ &\cup \{\{2,4,6,8\}\} \end{aligned}$$

となり、これらを $A_{8,7}$ に加え、極大対蹠的部分集合 $A_{15,1} = B(4,8) \cup \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}$ が得られる。

(1.1.2.2) $\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\} \times P_2(\{9,10,11\})$ の最小元 $\{1,2,9,10\}$ を取り、$A_{7,2}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,8} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,2,7,8\} \\ &\quad \{1,2,9,10\},\{3,4,7,8\},\{5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{8,8}) &= \{\{3,4\},\{5,6\}\} \times \{\{9,10\}\} \\ &\cup \{\{7,8,9,10\}\} \\ &\cup \{\{1,2,3,4,5,6,9,10\}\} \\ &\cup \{\{1,2,3,4,7,8,,9,10\}\} \\ &\cup \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_2(\{5,6\}) \\ &\quad P_2(\{7,8\}) \times P_2(\{9,10\}) \end{aligned}$$

となり、これらを $A_{8,8}$ に加え、極大対蹠的部分集合 $A_{15,3} = A(4,10) \cup A(8,10)$ が得られる。

(1.1.2.3) $P_2(\{7,8\}) \times P_2(\{9,10,11\})$ の最小元 $\{7,8,9,10\}$ を取り、$A_{7,2}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,9} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,2,7,8\} \\ &\quad \{1,2,9,10\},\{3,4,7,8\},\{5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって (1.1.2.2) に帰着する。

(1.1.2.4) $P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5.6\}) \times P_2(\{9,10,11\})$ の最小元
$\{\{1,2,3,4,5,6,9,10\}\}$ を取り、$A_{7,2}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,10} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,2,7,8\} \\ &\quad \{3,4,7,8\},\{5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}, \\ &\quad \{1,2,3,4,5,6,9,10\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって (1.1.2.2) に帰着する。

(1.1.2.5) $P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{7,8\}) \times P_2(\{9,10,11\})$ の最小元 $\{\{1,2,3,4,7,8,9,10\}\}$ を取り、$A_{7,2}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,11} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,2,7,8\} \\ &\quad \{3,4,7,8\},\{5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}, \\ &\quad \{1,2,3,4,7,8,9,10\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって (1.1.2.2) に帰着する。

(1.1.2.6) $\{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_2(\{5,6\}) \times P_2(\{7,8\}) \times P_2(\{9,10,11\})$ の最小元 $\{1,2,5,6,7,8,9,10\}$ を取り、$A_{7,2}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,12} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,2,7,8\} \\ &\quad \{3,4,7,8\},\{5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}, \\ &\quad \{1,2,5,6,7,8,9,10\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって (1.1.2.2) に帰着する

(1.1.3) $P_4(\{7,\ldots,11\})$ の最小元 $\{7,8,9,10\}$ を取り、$A_{3,1}$ に加え

$$A_{4,3} = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{7,8,9,10\}\}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{4,3}) &= P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \\ &\quad \times P_1(\{5,6\}) \times P_1(\{11\}) \\ &\cup \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\} \\ &\quad \times P_2(\{7,8,9,10\}) \\ &\cup P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6\}) \\ &\quad \times P_2(\{7,8,9,10\}) \\ &\cup \{\{1,2,3,4,7,8,9,10\}\} \\ &\cup P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \\ &\quad \times P_1(\{5,6\}) \times P_5(\{7,\ldots,11\}) \\ &\cup \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_2(\{5,6\}) \\ &\quad \times P_4(\{7,8,9,10\}) \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\{\{1,2,3,4,7,8,9,10\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\},$$
$$\{3,4,5,6,7,8,9,10\}\}$$

はそれぞれ互いに対蹠的であり、$A(A_{4,3})$ において他の元とも対蹠的なので $A_{4,3}$ に加えられ

$$\begin{aligned}A_{7,3} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{7,8,9,10\},\\ &\quad \{1,2,3,4,7,8,9,10\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\\ &\quad \{3,4,5,6,7,8,9,10\}\}\end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned}A(A_{7,3}) &= P_1(\{1,2\})\times P_1(\{3,4\})\\ &\quad \times P_1(\{5,6\})\times P_1(\{11\})\\ &\cup \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\}\\ &\quad \times P_2(\{7,8,9,10\})\\ &\cup P_4(\{1,2,3,4\})\times P_2(\{5,6\})\\ &\quad \times P_2(\{7,8,9,10\})\\ &\cup P_1(\{1,2\})\times P_1(\{3,4\})\\ &\quad \times P_1(\{5,6\})\times P_5(\{7,\ldots,11)\end{aligned}$$

となる。これらは $S(A_{7,3})$ の軌道になっている。

(1.1.3.1) $P_1(\{1,2\})\times P_1(\{3,4\})\times P_1(\{5,6\})\times P_1(\{11\})$ の最小元 $\{1,3,5,11\}$ を取り、$A_{7,3}$ に加え

$$\begin{aligned}A_{8,13} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{7,8,9,10\},\\ &\quad \{1,3,5,11\},\{1,2,3,4,7,8,9,10\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\\ &\quad \{3,4,5,6,7,8,9,10\}\}\end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned}A(A_{8,13}) &= \{\{1,4,6,11\},\{2,3,6,11\},\{2,4,5,11\}\}\\ &\cup \{\{1,3,5,7,8,9,10,11\},\{1,4,6,7,8,9,10,11\},\\ &\quad \{2,3,6,7,8,9,10,11\},\{2,4,5,7,8,9,10,11\}\}\end{aligned}$$

となり、これらを $A_{8,13}$ に加えると極大対蹠的部分集合

$$\begin{aligned}A_{15,4} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{7,8,9,10\},\\ &\quad \{1,4,6,11\},\{2,3,6,11\},\{2,4,5,11\},\{1,3,5,11\},\\ &\quad \{1,2,3,4,7,8,9,10\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\\ &\quad \{3,4,5,6,7,8,9,10\},\{1,3,5,7,8,9,10,11\},\\ &\quad \{1,4,6,7,8,9,10,11\},\{2,3,6,7,8,9,10,11\},\\ &\quad \{2,4,5,7,8,9,10,11\}\}\end{aligned}$$

が得られる。これは $A_{15,3}$ と合同である。

(1.1.3.2) $\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\} \times P_2(\{7,8,9,10\})$ の最小元 $\{1,2,7,8\}$ を取り、$A_{7,3}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,14} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{7,8,9,10\}, \\ &\quad \{1,2,3,4,7,8,9,10\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\}, \\ &\quad \{3,4,5,6,7,8,9,10\},\{1,2,7,8\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{8,14}) &= \{\{3,4\},\{5,6\}\} \times \{\{7,8\}\} \\ &\cup \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\} \times \{\{9,10\}\} \\ &\cup P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6\}) \\ &\quad \times\{\{7,8\},\{9,10\}\} \end{aligned}$$

となり、これらを $A_{8,14}$ に加え、極大対蹠的部分集合 $A_{15,2} = A(4,10) \cup A(8,10)$ が得られる。

(1.1.3.3) $P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6\}) \times P_2(\{7,8,9,10\})$ の最小元 $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ を取り、$A_{7,3}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,15} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{7,8,9,10\}, \\ &\quad \{1,2,3,4,7,8,9,10\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\}, \\ &\quad \{3,4,5,6,7,8,9,10\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって (1.1.3.1) に帰着する。

(1.1.3.4) $P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \times P_1(\{5,6\}) \times P_5(\{7,\ldots,11)$ の最小元 $\{1,3,5,7,8,9,10,11\}$ を取り、$A_{7,3}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,16} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{7,8,9,10\}, \\ &\quad \{1,2,3,4,7,8,9,10\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\}, \\ &\quad \{3,4,5,6,7,8,9,10\},\{1,3,5,7,8,9,10,11\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって (1.1.3.1) に帰着する。

(1.1.4) $P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5.6\}) \times P_2(\{7,\ldots,11\})$ の最小元 $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ を取り、$A_{3,1}$ に加え

$$A_{4,4} = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned}
A(A_{4,4}) &= P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \\
&\quad \times P_1(\{5,6\}) \times P_1(\{7,8\}) \\
&\cup \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\} \times \{\{7,8\}\} \\
&\cup \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\} \times P_2(\{9,10,11\}) \\
&\cup \{\{7,8\}\} \times P_2(\{9,10,11\}) \\
&\cup P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6\}) \\
&\quad P_2(\{9,10,11\}) \\
&\cup P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{7,8\}) \\
&\quad P_2(\{9,10,11\}) \\
&\cup \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_2(\{5,6\}) \\
&\quad P_2(\{7,8\}) \times P_2(\{9,10,11\})
\end{aligned}$$

となり、$\{\{1,2,7,8\},\{3,4,7,8\},\{5,6,7,8\}\}$ はそれぞれ互いに対蹠的であり、$A(A_{4,2})$ において他の元とも対蹠的なので $A_{4,2}$ に加えられ

$$\begin{aligned}
A_{7,2} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,2,7,8\}, \\
&\quad \{3,4,7,8\},\{5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}
\end{aligned}$$

が得られ、(1.1.2) に帰着する。

(1.1.5) $P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_4(\{7,\ldots,11\})$ の最小元 $\{1,2,3,4,7,8,9,10\}$ を取り、$A_{3,1}$ に加え

$$A_{4,5} = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,2,3,4,7,8,9,10\}\}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned}
A(A_{4,5}) &= P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \\
&\quad \times P_1(\{5,6\}) \times P_1(\{11\}) \\
&\cup \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\} \times P_2(\{7,8,9,10\}) \\
&\cup \{\{7,8,9,10\}\} \\
&\cup P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6\}) \\
&\quad P_2(\{7,8,9,10\}) \\
&\cup P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \\
&\quad \times P_1(\{5,6\}) \times P_5(\{7,\ldots,11\}) \\
&\cup \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_2(\{5,6\}) \\
&\quad P_4(\{7,8,9,10\})
\end{aligned}$$

となる。ここで $\{\{7,8,9,10\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}\}$ はそれぞれ互いに対蹠的であり、$A(A_{4,5})$ において他の元とも対蹠的なので $A_{4,5}$ に加えられ

$$\begin{aligned}A_{7,3} = \{&\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,2,3,4,7,8,9,10\},\\&\{7,8,9,10\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}\}\end{aligned}$$

となる。よって (1.1.3) に帰着する。

(1.1.6) $P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \times P_1(\{5,6\}) \times P_5(\{7,\dots,11\})$ の最小元 $\{1,3,5,7,8,9,10,11\}$ を取り、$A_{3,1}$ に加え

$$A_{4,6} = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,3,5,7,8,9,10,11\}\}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned}A(A_{4,6}) &= \{\{1,3,5\},\{1,4,6\},\{2,3,6\},\{2,4,5\}\}\\&\quad \times P_1(\{7,\dots,11\})\\&\cup\ P_4(\{7,\dots,11\})\\&\cup\ P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_4(\{7,\dots,11\})\\&\cup\ \{\{1,4,6\},\{2,3,6\},\{2,4,5\}\}\\&\quad \times P_5(\{7,\dots,11\})\\&\cup\ \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_2(\{5,6\})\\&\quad \times P_4(\{7,\dots,11\})\end{aligned}$$

となる。ここで $\{\{1,4,6\},\{2,3,6\},\{2,4,5\}\} \times P_5(\{7,\dots,11\})$ は互いに対蹠的であり、$A(A_{4,6})$ において他の元とも対蹠的なので $A_{4,6}$ に加えられる。よって

$$\begin{aligned}A_{7,4} = &\{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,3,5,7,8,9,10,11\}\\&\{1,4,6,7,8,9,10,11\},\{2,3,6,7,8,9,10,11\},\\&\{2,4,5,7,8,9,10,11\}\}\end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned}A(A_{7,4}) &= \{\{1,3,5\},\{1,4,6\},\{2,3,6\},\{2,4,5\}\}\\&\quad \times P_1(\{7,\dots,11\})\\&\cup\ P_4(\{7,\dots,11\})\\&\cup\ P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_4(\{7,\dots,11\})\\&\cup\ \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_2(\{5,6\})\\&\quad \times P_4(\{7,\dots,11\})\end{aligned}$$

となる。これらは $S(A_{7,4})$ の軌道になる。

(1.1.6.1) $\{\{1,3,5\},\{1,4,6\},\{2,3,6\},\{2,4,5\}\} \times P_1(\{7,\ldots,11\})$ の最小元 $\{1,3,5,7\}$ を取り、$A_{7,4}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,17} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,3,5,7,8,9,10,11\} \\ &\quad \{1,4,6,7,8,9,10,11\},\{2,3,6,7,8,9,10,11\}, \\ &\quad \{2,4,5,7,8,9,10,11\},\{1,3,5,7\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{8,17}) &= \{\{1,4,6,7\},\{2,3,6,7\},\{2,4,5,7\}\} \\ &\cup \{\{8,9,10,11\}\} \\ &\cup \{\{1,2,3,4,8,9,10,11\}\} \\ &\cup \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_2(\{5,6\}) \\ &\quad \times P_4(\{8,9,10,11\}) \end{aligned}$$

となり、これらを $A_{8,17}$ に加え極大対蹠的部分集合

$$\begin{aligned} A_{15,3} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\}, \\ &\quad \{1,3,5,7\},\{1,4,6,7\},\{2,3,6,7\}, \\ &\quad \{2,4,5,7\},\{8,9,10,11\},\{1,3,5,7,8,9,10,11\}, \\ &\quad \{1,2,3,4,8,9,10,11\},\{1,2,5,6,8,9,10,11\}, \\ &\quad \{3,4,5,6,8,9,10,11\},\{1,4,6,7,8,9,10,11\}, \\ &\quad \{2,3,6,7,8,9,10,11\},\{2,4,5,7,8,9,10,11\}\} \end{aligned}$$

が得られる。

(1.1.6.2) $P_4(\{7,\ldots,11\})$ の最小元 $\{7,8,9,10\}$ を取り、$A_{7,4}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,18} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\}, \\ &\quad \{1,3,5,7,8,9,10,11\},\{1,4,6,7,8,9,10,11\}, \\ &\quad \{2,3,6,7,8,9,10,11\},\{2,4,5,7,8,9,10,11\}, \\ &\quad \{7,8,9,10\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{8,18}) &= \{\{1,3,5\},\{1,4,6\},\{2,3,6\},\{2,4,5\}\} \\ &\quad \times \{\{11\}\} \\ &\cup \{\{1,2,3,4,7,8,9,10\}\} \\ &\cup \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_2(\{5,6\}) \\ &\quad P_4(\{7,8,9,10\}) \end{aligned}$$

となり、これらを $A_{8,18}$ に加え極大対蹠的部分集合

$$\begin{aligned}
A_{15,4} \quad = \quad & \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{7,8,9,10\},\\
& \{1,4,6,11\},\{2,3,6,11\},\{2,4,5,11\},\{1,3,5,11\},\\
& \{1,2,3,4,7,8,9,10\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\\
& \{3,4,5,6,7,8,9,10\},\{1,3,5,7,8,9,10,11\},\\
& \{1,4,6,7,8,9,10,11\},\{2,3,6,7,8,9,10,11\},\\
& \{2,4,5,7,8,9,10,11\}\}
\end{aligned}$$

が得られる。これは $A_{15,3}$ と合同である。なぜなら補題 7.1 より $A_{15,4}$ の 8 個の成分からなる部分集合は

$$\{\{1,4,5\},\{1,2,11\},\{1,3,6\},\{2,4,6\},\\
\{2,3,5\},\{3,4,11\},\{5,6,11\}\}$$

と合同になり、同様に $A_{15,3}$ の 8 個の成分からなる部分集合も

$$\{\{1,4,5\},\{1,2,7\},\{1,3,6\},\{2,4,6\},\\
\{2,3,5\},\{3,4,7\},\{5,6,7\}\}$$

と合同になる。この二つは $(7,11)$ の置換作用で写り合うことが分かり、実際に $A_{15,3}$ と $A_{15,4}$ は $(7,11)$ の置換作用で写り合うので合同であることが分かる。

(1.1.6.3) $P_4(\{1,2,3,4\})\times P_4(\{7,\dots,11\})$ の最小元 $\{1,2,3,4,7,8,9,10\}$ を取り、$A_{7,4}$ に加え

$$\begin{aligned}
A_{8,19} \quad = \quad & \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,3,5,7,8,9,10,11\}\\
& \{1,4,6,7,8,9,10,11\},\{2,3,6,7,8,9,10,11\},\\
& \{2,4,5,7,8,9,10,11\},\{1,2,3,4,7,8,9,10\}\}
\end{aligned}$$

が得られる。よって (1.1.6.2) に帰着する。

(1.1.6.4) $\{\{1,2\},\{3,4\}\}\times P_2(\{5,6\})\times P_4(\{7,\dots,11\})$ の最小元 $\{1,2,5,6,7,8,9,10\}$ を取り、$A_{7,4}$ に加え

$$\begin{aligned}
A_{8,20} \quad = \quad & \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,3,5,7,8,9,10,11\}\\
& \{1,4,6,7,8,9,10,11\},\{2,3,6,7,8,9,10,11\},\\
& \{2,4,5,7,8,9,10,11\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\}\}
\end{aligned}$$

が得られる。よって (1.1.6.2) に帰着する。

(1.1.7) $\{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_2(\{5,6\}) \times P_4(\{7,\ldots,11\})$ の最小元 $\{1,2,5,6,7,8,9,10\}$ を取り、$A_{3,1}$ に加え

$$A_{4,7} = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\}\}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{4,7}) &= P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \times P_1(\{5,6\}) \\ &\quad \times P_1(\{11\}) \\ &\cup \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\} \times P_2(\{7,8,9,10\}) \\ &\cup \{\{7,8,9,10\}\} \\ &\cup P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5.6\}) \\ &\quad \times P_2(\{7,8,9,10\}) \\ &\cup \{\{1,2,3,4,7,8,9,10\}\} \\ &\cup P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \times P_1(\{5,6\}) \\ &\quad \times P_5(\{7,\ldots,11\}) \\ &\cup \{\{3,4,5,6,7,8,9,10\}\} \end{aligned}$$

となる。$\{\{7,8,9,10\},\{1,2,3,4,7,8,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}\}$ はそれぞれ互いに対蹠的であり、$A(A_{4,7})$ において他の元とも対蹠的なので $A_{4,7}$ に加えられ

$$\begin{aligned} A_{7,3} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\} \\ &\quad \{7,8,9,10\},\{1,2,3,4,7,8,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって (1.1.3) に帰着する。

(1.2) $P_4(\{5,\ldots,11\})$ の最小元 $\{5,6,7,8\}$ を取り、$A_{1,1}$ に加え

$$A_{2,1} = \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\}\}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned}
A(A_{2,1}) &= P_2(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6,7,8\}) \\
&\cup P_2(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{9,10,11\}) \\
&\cup \{\{5,6\},\{7,8\}\} \times P_2(\{9,10,11\}) \\
&\cup \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\} \\
&\cup P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6\}) \\
&\quad \times P_2(\{9,10,11\}) \\
&\cup P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{7,8\}) \\
&\quad \times P_2(\{9,10,11\}) \\
&\cup P_2(\{1,2,3,4\}) \times P_4(\{5,6,7,8\}) \\
&\quad \times P_2(\{9,10,11\})
\end{aligned}$$

となる。$\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ は $A(A_{2,1})$ において他の元と対蹠的なので、$A_{2,1}$ に加えられ

$$A_{3,2} = \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned}
A(A_{3,2}) &= P_2(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6,7,8\}) \\
&\cup P_2(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{9,10,11\}) \\
&\cup \{\{5,6\},\{7,8\}\} \times P_2(\{9,10,11\}) \\
&\cup P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6\}) \\
&\quad \times P_2(\{9,10,11\}) \\
&\cup P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{7,8\}) \\
&\quad \times P_2(\{9,10,11\}) \\
&\cup P_2(\{1,2,3,4\}) \times P_4(\{5,6,7,8\}) \\
&\quad \times P_2(\{9,10,11\})
\end{aligned}$$

となる。これらは $S(A_{3,2})$ の軌道になる。

(1.2.1) $P_2(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6,7,8\})$ の最小元 $\{1,2,5,6\}$ を取り、$A_{3,2}$ に加え

$$A_{4,8} = \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{1,2,5,6\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}$$

が得られる。よって

$$
\begin{aligned}
A(A_{4,8}) &= P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \\
&\quad \times P_1(\{5,6\}) \times P_1(\{7,8\}) \\
&\cup \{\{3,4,5,6\}\} \\
&\cup \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times \{\{7,8\}\} \\
&\cup \{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\} \times P_2(\{9,10,11\}) \\
&\cup \{\{7,8\}\} \times P_2(\{9,10,11\}) \\
&\cup P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6\}) \\
&\quad \times P_2(\{9,10,11\}) \\
&\cup P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{7,8\}) \\
&\quad \times P_2(\{9,10,11\}) \\
&\cup \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_2(\{5,6\}) \\
&\quad \times P_2(\{7,8\}) \times P_2(\{9,10,11\})
\end{aligned}
$$

となるので (1.1.4) に帰着する。

(1.2.2) $P_2(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{9,10,11\})$ の最小元 $\{1,2,9,10\}$ を取り、$A_{3,2}$ に加え

$$A_{4,9} = \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,9,10\}\}$$

が得られる。よって

$$
\begin{aligned}
A(A_{4,9}) &= P_2(\{1,2\}) \times P_2(\{5,6,7,8\}) \\
&\cup P_2(\{3,4\}) \times P_2(\{5,6,7,8\}) \\
&\cup P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \times P_1(\{9,10\}) \\
&\quad \times P_1(\{11\}) \\
&\cup \{\{3,4,9,10\},\{5,6,9,10\},\{7,8,9,10\}\} \\
&\cup \{\{1,2,3,4,5,6,9,10\},\{1,2,3,4,7,8,9,10\}\} \\
&\cup P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \times P_4(\{5,6,7,8\}) \\
&\quad P_1(\{9,10\}) \times P_1(\{11\}) \\
&\cup \{\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}\}
\end{aligned}
$$

となり、$\{\{3,4,9,10\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}\}$ は互いに対蹠的であり、$A(A_{4,9})$ において他の元とも対蹠的なので $A_{4,9}$ に加えられ

$$
\begin{aligned}
A_{7,5} &= \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,9,10\} \\
&\quad \{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\}, \\
&\quad \{3,4,5,6,7,8,9,10\}\}
\end{aligned}
$$

が得られる。よって

$$
\begin{aligned}
A(A_{7,5}) &= P_2(\{1,2\}) \times P_2(\{5,6,7,8\}) \\
&\cup \ P_2(\{3,4\}) \times P_2(\{5,6,7,8\}) \\
&\cup \ P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \times P_1(\{9,10\}) \\
&\quad \times P_1(\{11\}) \\
&\cup \ \{\{5,6,9,10\},\{7,8,9,10\}\} \\
&\cup \ \{\{1,2,3,4,5,6,9,10\},\{1,2,3,4,7,8,9,10\}\} \\
&\cup \ P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \times P_4(\{5,6,7,8\}) \\
&\quad \times P_1(\{9,10\}) \times P_1(\{11\})
\end{aligned}
$$

となる。しかし、$P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \times P_1(\{9,10\}) \times P_1(\{11\})$ と $P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \times P_4(\{5,6,7,8\}) \times P_1(\{9,10\}) \times P_1(\{11\})$ は $S(A_{7,5})$ の軌道にならない。よって

$$
\begin{aligned}
A(A_{7,5}) &= P_2(\{1,2\}) \times P_2(\{5,6,7,8\}) \\
&\cup \ P_2(\{3,4\}) \times P_2(\{5,6,7,8\}) \\
&\cup \ \{\{5,6,9,10\},\{7,8,9,10\}\} \\
&\cup \ \{\{1,2,3,4,5,6,9,10\},\{1,2,3,4,7,8,9,10\}\}
\end{aligned}
$$

(1.2.2.1) $P_2(\{1,2\}) \times P_2(\{5,6,7,8\})$ の最小元 $\{1,2,5,6\}$ を取り、$A_{7,5}$ に加え

$$
\begin{aligned}
A_{8,21} &= \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,9,10\} \\
&\quad \{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\}, \\
&\quad \{3,4,5,6,7,8,9,10\},\{1,2,5,6\}\}
\end{aligned}
$$

が得られる。よって

$$
\begin{aligned}
A(A_{8,21}) &= \{\{1,2,7,8\}\} \\
&\cup \ \{\{3,4,5,6\},\{3,4,7,8\}\} \\
&\cup \ \{\{5,6,9,10\},\{7,8,9,10\} \\
&\cup \ \{\{1,2,3,4,5,6,9,10\},\{1,2,3,4,7,8,9,10\}\}
\end{aligned}
$$

となり、これらを $A_{8,21}$ に加えると極大対蹠的部分集合 $A_{15,2} = A(4,10) \cup$ $A(8,10)$ が得られる。

(1.2.2.2) $P_2(\{3,4\}) \times P_2(\{5,6,7,8\})$ の最小元 $\{3,4,5,6\}$ を取り、$A_{7,5}$ に加え

$$
\begin{aligned}
A_{8,22} &= \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,9,10\} \\
&\quad \{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\}, \\
&\quad \{3,4,5,6,7,8,9,10\},\{3,4,5,6\}\}
\end{aligned}
$$

が得られる。よって後は (1.2.2.1) に帰着する。

(1.2.2.3) $\{\{5,6,9,10\},\{7,8,9,10\}\}$ の最小元 $\{5,6,9,10\}$ を取り、$A_{7,5}$ に加え

$$\begin{aligned}A_{8,23} &= \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,9,10\}\\&\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\\&\{3,4,5,6,7,8,9,10\},\{5,6,9,10\}\}\end{aligned}$$

が得られる。よって後は (1.2.2.1) に帰着する。

(1.2.2.4) $\{\{1,2,3,4,5,6,9,10\},\{1,2,3,4,7,8,9,10\}\}$ の最小元 $\{1,2,3,4,5,6,9,10\}$ を取り、$A_{7,5}$ に加え

$$\begin{aligned}A_{8,24} &= \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,9,10\}\\&\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\\&\{3,4,5,6,7,8,9,10\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\}\}\end{aligned}$$

が得られる。よって後は (1.2.2.1) に帰着する。

(1.2.3) $\{\{5,6\},\{7,8\}\}\times P_2(\{9,10,11\})$ の最小元 $\{5,6,9,10\}$ を取り、$A_{3,2}$ に加え

$$A_{4,9}=\{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{5,6,9,10\}\}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned}A(A_{4,9}) &= P_2(\{1,2,3,4\})\times\{\{5,6\},\{7,8\}\}\\&\cup\ P_2(\{1,2,3,4\})\times P_2(\{9,10\})\\&\cup\ \{\{7,8,9,10\}\}\\&\cup\ \{\{1,2,3,4,5,6,9,10\},\{1,2,3,4,7,8,9,10\}\}\\&\cup\ P_2(\{1,2,3,4\})\times P_4(\{5,6,7,8\})\\&\quad\times P_2(\{9,10\})\end{aligned}$$

となる。$\{\{7,8,9,10\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\},\{1,2,3,4,7,8,9,10\}\}$ はそれぞれ対蹠的で $A(A_{4,9})$ において他の元とも対蹠的なので $A_{4,9}$ に加え

$$\begin{aligned}A_{7,6} &= \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{5,6,9,10\}\\&\{7,8,9,10\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\},\{1,2,3,4,7,8,9,10\}\}\end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned}A(A_{7,6}) &= P_2(\{1,2,3,4\})\times\{\{5,6\},\{7,8\},\{9,10\}\}\\&\cup\ P_2(\{1,2,3,4\})\times P_4(\{5,6,7,8\})\\&\quad\times P_2(\{9,10\})\end{aligned}$$

となる。これらは $S(A_{7,6})$ の軌道になっている。

(1.2.3.1) $P_2(\{1,2,3,4\}) \times \{\{5,6\},\{7,8\},\{9,10\}\}$ の最小元 $\{1,2,5,6\}$ を取り、$A_{7,6}$ に加えると

$$\begin{aligned} A_{8,25} &= \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{5,6,9,10\} \\ &\quad \{7,8,9,10\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\},\{1,2,3,4,7,8,9,10\}, \\ &\quad \{1,2,5,6\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{8,25}) &= \{\{1,2,7,8\},\{3,4,5,6\},\{3,4,7,8\}\} \\ &\cup \{\{1,2,9,10\},\{3,4,9,10\}\} \\ &\cup \{\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}\} \end{aligned}$$

となり、これらを $A_{8,25}$ に加えると極大対蹠的部分集合 $A_{15,2} = A(4,10) \cup A(8,10)$ が得られる。

(1.2.3.2) $P_2(\{1,2,3,4\}) \times P_4(\{5,6,7,8\}) \times P_2(\{9,10\})$ の最小元 $\{1,2,5,6,7,8,9,10\}$ を取り、$A_{7,6}$ に加えると

$$\begin{aligned} A_{8,26} &= \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{5,6,9,10\} \\ &\quad \{7,8,9,10\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\}, \\ &\quad \{1,2,3,4,7,8,9,10\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって (1.2.3.1) に帰着する。

(1.2.4) $P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6\}) \times P_2(\{9,10,11\})$ の最小元 $\{1,2,3,4,5,6,9,10\}$ を取り、$A_{3,2}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{4,10} &= \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}, \\ &\quad \{1,2,3,4,5,6,9,10\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{4,10}) &= P_2(\{1,2,3,4\}) \times \{\{5,6\},\{7,8\},\{9,10\}\} \\ &\cup \{\{5,6,9,10\},\{7,8,9,10\}\} \\ &\cup \{\{1,2,3,4,7,8,9,10\}\} \\ &\cup P_2(\{1,2,3,4\}) \times \{\{5,\ldots,10\}\} \end{aligned}$$

となる。よって (1.2.3) に帰着する。

(1.2.5) $P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{7,8\}) \times P_2(\{9,10,11\})$ の最小元 $\{1,2,3,4,7,8,9,10\}$ を取り、$A_{3,2}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{4,11} &= \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}, \\ &\quad \{1,2,3,4,7,8,9,10\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって (1.2.4) に帰着する。

(1.2.6) $P_2(\{1,2,3,4\}) \times P_4(\{5,6,7,8\}) \times P_2(\{9,10,11\})$ の最小元 $\{1,2,5,6,7,8,9,10\}$ を取り、$A_{3,2}$ に加え

$$
\begin{aligned}
A_{4,12} \quad = \quad & \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\\
& \{1,2,5,6,7,8,9,10\}\}
\end{aligned}
$$

が得られる。よって

$$
\begin{aligned}
A(A_{4,12}) \quad = \quad & \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_2(\{5,6,7,8\})\\
\cup \quad & P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\})\\
& \times P_1(\{9,10\}) \times P_1(\{11\})\\
\cup \quad & \{\{1,2,9,10\},\{3,4,9,10\},\\
\cup \quad & \{5,6,9,10\},\{7,8,9,10\}\}\\
\cup \quad & \{\{1,2,3,4,5,6,9,10\}\}\\
\cup \quad & \{\{1,2,3,4,7,8,9,10\}\}\\
\cup \quad & P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\})\\
& \times P_4(\{5,6,7,8\}) \times P_1(\{9,10\})\\
& \times \{\{11\}\}\\
\cup \quad & \{\{3,4,5,6,7,8,9,10\}\}
\end{aligned}
$$

となる。$\{\{1,2,9,10\},\{3,4,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}\}$ はそれぞれ互いに対蹠的であり、$A(A_{4,11})$ において他の元とも対蹠的なので $A_{4,11}$ に加えられ

$$
\begin{aligned}
A_{7,7} \quad = \quad & \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\\
& \{1,2,9,10\},\{3,4,9,10\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\\
& \{3,4,5,6,7,8,9,10\}\}
\end{aligned}
$$

が得られる。よって

$$
\begin{aligned}
A(A_{7,7}) \quad = \quad & \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_2(\{5,6,7,8\})\\
\cup \quad & P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\})\\
& \times P_1(\{9,10\}) \times P_1(\{11\})\\
\cup \quad & \{5,6,9,10\},\{7,8,9,10\}\}\\
\cup \quad & \{\{1,2,3,4,5,6,9,10\}\}\\
\cup \quad & \{\{1,2,3,4,7,8,9,10\}\}\\
\cup \quad & P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\})\\
& \times P_4(\{5,6,7,8\}) \times P_1(\{9,10\})\\
& \times \{\{11\}\}
\end{aligned}
$$

となる。これらは、$S(A_{7,7})$ の軌道になっている。「

(1.2.6.1) $\{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_2(\{5,6,7,8\})$ の最小元 $\{1,2,5,6\}$ を取り、$A_{7,7}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,27} &= \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\\ &\quad \{1,2,9,10\},\{3,4,9,10\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\\ &\quad \{3,4,5,6,7,8,9,10\}\{1,2,5,6\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{8,27}) &= \{\{3,4,5,6\},\{1,2,7,8\},\{3,4,7,8\}\}\\ &\cup \{\{5,6,9,10\},\{7,8,9,10\}\}\\ &\cup \{\{1,2,3,4\} \times \{\{5,6\},\{7,8\}\}\\ &\quad \times \{\{9,10\}\} \end{aligned}$$

となり、これらを $A_{8,27}$ に加えると極大対蹠的部分集合 $A_{15,2} = A(4,10) \cup A(8,10)$ が得られる。

(1.2.6.2) $P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \times P_1(\{9,10\}) \times P_1(\{11\})$ の最小元 $\{1,3,9,11\}$ を取り、$A_{7,7}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,28} &= \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\\ &\quad \{1,2,9,10\},\{3,4,9,10\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\\ &\quad \{3,4,5,6,7,8,9,10\}\{1,3,9,11\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{8,28}) &= \{\{1,4,10,11\},\{2,3,10,11\},\{2,4,9,11\},\\ &\quad \{1,3,5,6,7,8,9,11\},\{1,4,5,6,7,8,10,11\},\\ &\quad \{2,3,5,6,7,8,10,11\},\{2,4,5,6,7,8,9,11\}\} \end{aligned}$$

となり、これらを $A_{8,28}$ に加えると極大対蹠的部分集合 $A_{15,6}$ が得られる。

(1.2.6.3) $\{\{5,6\},\{7,8\}\} \times \{\{9,10\}\}$ の最小元 $\{5,6,9,10\}$ を取り、$A_{7,7}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,29} &= \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\\ &\quad \{1,2,9,10\},\{3,4,9,10\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\\ &\quad \{3,4,5,6,7,8,9,10\}\{5,6,9,10\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって (1.2.6.1) に帰着する。

(1.2.6.4) $\{\{1,2,3,4\} \times \{\{5,6\},\{7,8\}\} \times \{\{9,10\}\}$ の最小元 $\{1,2,3,4,5,6,9,10\}$ を取り、$A_{7,7}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,30} &= \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\\ &\quad \{1,2,9,10\},\{3,4,9,10\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\\ &\quad \{3,4,5,6,7,8,9,10\}\{1,2,3,4,5,6,9,10\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって (1.2.6.1) に帰着する。

(1.2.6.5) $P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \times P_4(\{5,6,7,8\}) \times P_1(\{9,10\}) \times \{\{11\}\}$ の最小元 $\{1,3,5,6,7,8,9,11\}$ を取り、$A_{7,7}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,31} &= \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\\ &\quad \{1,2,9,10\},\{3,4,9,10\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\\ &\quad \{3,4,5,6,7,8,9,10\}\{1,3,5,6,7,8,9,11\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって (1.2.6.2) に帰着する。

(1.3) $P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_4(\{5,\ldots,11\})$ の最小元 $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ を取り、$A_{1,1}$ に加え

$$A_{2,3} = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{2,1}) &= P_2(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6,7,8\})\\ &\cup\ P_2(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{9,10,11\})\\ &\cup\ \{\{5,6,7,8\}\}\\ &\cup\ P_2(\{5,6,7,8\}) \times P_2(\{9,10,11\})\\ &\cup\ P_4(\{1,2,3,4\}) \times \{\{5,6\},\{7,8\}\}\\ &\quad \times P_2(\{9,10,11\})\\ &\cup\ P_2(\{1,2,3,4\}) \times P_4(\{5,6,7,8\}) \times P_2(\{9,10,11\}) \end{aligned}$$

となり、$\{\{5,6,7,8\}\}$ は $A(A_{2,1})$ の他の元と対蹠的なので $A_{2,1}$ に加えられ

$$A_{3,2} = \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}$$

が得られる。よって $(1,2)$ に帰着する。

(1.4) $P_2(\{1,2,3,4\}) \times P_6(\{5,\ldots,11\})$ の最小元 $\{1,2,5,6,7,8,9,10\}$ を取り、$A_{1,1}$ に加え

$$A_{2,4} = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\}\}$$

が得られる。よって

$$\begin{array}{rcl} A(A_{2,4}) & = & \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_2(\{5,\dots,10\}) \\ & \cup & P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \\ & & \times P_1(\{5,\dots,10\}) \times \{\{11\}\} \\ & \cup & P_4(\{5,\dots,10\}) \\ & \cup & P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_4(\{5,\dots,10\}) \\ & \cup & \{\{3,4,5,6,7,8,9,10\}\} \\ & \cup & P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \\ & & \times P_5(\{5,\dots,10\}) \times \{\{11\}\} \end{array}$$

となる。$\{\{3,4,5,6,7,8,9,10\}\}$ は $A(A_{2,4})$ において他の元と対蹠的なので $A_{2,4}$ に加えられ

$$A_{3,3} = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}\}$$

が得られる。よって

$$\begin{array}{rcl} A(A_{3,3}) & = & \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_2(\{5,\dots,10\}) \\ & \cup & P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \\ & & \times P_1(\{5,\dots,10\}) \times \{\{11\}\} \\ & \cup & P_4(\{5,\dots,10\}) \\ & \cup & P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_4(\{5,\dots,10\}) \\ & \cup & P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \\ & & \times P_5(\{5,\dots,10\}) \times \{\{11\}\} \end{array}$$

となる。これらは $S(A_{3,3})$ の軌道になっている。

(1.4.1) $\{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_2(\{5,\dots,10)$ の最小元 $\{1,2,5,6\}$ を取り、$A_{3,3}$ に加え

$$\begin{array}{rcl} A_{4.13} & = & \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}, \\ & & \{1,2,5,6\}\} \end{array}$$

が得られる。よって

$$
\begin{aligned}
A(A_{4,13}) &= \{\{3,4,5,6\}\} \\
&\cup \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_2(\{7,8,9,10\}) \\
&\cup P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \\
&\quad \times P_1(\{5,6\}) \times \{\{11\}\} \\
&\cup \{\{5,6\}\} \times P_2(\{7,8,9,10\}) \\
&\cup \{\{7,8,9,10\}\} \\
&\cup P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_2(\{5,6\}) \\
&\quad \times P_4(\{7,8,9,10\}) \\
&\cup \{\{1,2,3,4,7,8,9,10\}\} \\
&\cup P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \\
&\quad \times P_1(\{5,6\}) \times P_4(\{7,8,9,10\}) \\
&\quad \times \{\{11\}\}
\end{aligned}
$$

となる。$\{\{3,4,5,6\},\{7,8,9,10\},\{1,2,3,4,7,8,9,10\}\}$ はそれぞれ対蹠的であり、$A(A_{4,13})$ において他の元とも対蹠的なので $A_{4,13}$ に加えられ

$$
\begin{aligned}
A_{7,3} = &\{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}, \\
&\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\},\{7,8,9,10\},\{1,2,3,4,7,8,9,10\}\}
\end{aligned}
$$

が得られる。よって (1.2) に帰着する。

(1.4.2) $P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \times P_1(\{5,\dots,10\}) \times \{\{11\}\}$ の最小元 $\{1,3,5,11\}$ を取り、$A_{3,3}$ に加え

$$
\begin{aligned}
A_{4.14} = &\{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}, \\
&\{1,3,5,11\}\}
\end{aligned}
$$

が得られる。よって

$$
\begin{aligned}
A(A_{4,14}) &= \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_1(\{5\}) \\
&\quad \times P_1(\{6,\dots,10\}) \\
&\cup \{\{1,4\},\{2,3\}\} \times P_1(\{6,\dots,10\}) \\
&\quad \times\{\{11\}\} \\
&\cup \{\{2,4,5,11\}\} \\
&\cup P_4(\{6,\dots,10\}) \\
&\cup P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_4(\{6,\dots,10\}) \\
&\cup \{\{1,4,6,7,8,9,10,11\},\{2,3,6,7,8,9,10,11\}\} \\
&\cup \{\{1,3\},\{2,4\}\} \times \{\{5\}\} \\
&\quad \times P_4(\{6,\dots,10\}) \times \{\{11\}\}
\end{aligned}
$$

となり、$\{\{2,4,5,11\},\{1,4,6,7,8,9,10,11\},\{2,3,6,7,8,9,10,11\}\}$ はそれぞれ対蹠的であり、$A(A_{4,14})$ において他の元と対蹠的なので $A_{4,14}$ に加えられ

$$
\begin{aligned}
A_{7,8} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}, \\
&\quad \{1,3,5,11\},\{2,4,5,11\},\{1,4,6,7,8,9,10,11\} \\
&\quad \{2,3,6,7,8,9,10,11\}\}
\end{aligned}
$$

が得られる。よって

$$
\begin{aligned}
A(A_{7,8}) &= \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_1(\{5\}) \\
&\quad \times P_1(\{6,\dots,10\}) \\
&\cup \{\{1,4\},\{2,3\}\} \times P_1(\{6,\dots,10\}) \\
&\quad \times\{\{11\}\} \\
&\cup P_4(\{6,\dots,10\}) \\
&\cup P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_4(\{6,\dots,10\}) \\
&\cup \{\{1,3\},\{2,4\}\} \times \{\{5\}\} \\
&\quad \times P_4(\{6,\dots,10\}) \times \{\{11\}\}
\end{aligned}
$$

となる。これらは $S(A_{7,8})$ の軌道になる。

(1.4.2.1) $\{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_1(\{5\}) \times P_1(\{6,\dots,10\})$ の最小元 $\{1,2,5,6\}$ を取り、

$A_{7,8}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,30} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}, \\ &\quad \{1,3,5,11\},\{2,4,5,11\},\{1,4,6,7,8,9,10,11\} \\ &\quad \{2,3,6,7,8,9,10,11\},\{1,2,5,6\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{8,32}) &= \{\{3,4,5,6\}\} \\ &\cup \{\{1,4,6,11\},\{2,3,6,11\}\} \\ &\cup \{\{7,8,9,10\}\} \\ &\cup \{\{1,2,3,4,7,8,9,10\}\} \\ &\cup \{\{1,3,5,7,8,9,10,11\},\{2,4,5,7,8,9,10,11\}\} \end{aligned}$$

となる。これらを $A_{8,30}$ に加え、極大対蹠的部分集合 $A_{15,4}$ が得られる。

(1.4.2.2) $\{\{1,4\},\{2,3\}\} \times P_1(\{6,\ldots,10\}) \times \{\{11\}\}$ の最小元 $\{1,4,6,11\}$ を取り、$A_{7,8}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,33} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}, \\ &\quad \{1,3,5,11\},\{2,4,5,11\},\{1,4,6,7,8,9,10,11\} \\ &\quad \{2,3,6,7,8,9,10,11\},\{1,4,6,11\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって (1.4.2.1) に帰着する。

(1.4.2.3) $P_4(\{6,\ldots,10\})$ の最小元 $\{6,7,8,9\}$ を取り、$A_{7,8}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,34} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}, \\ &\quad \{1,3,5,11\},\{2,4,5,11\},\{1,4,6,7,8,9,10,11\} \\ &\quad \{2,3,6,7,8,9,10,11\},\{6,7,8,9\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{8,34}) &= \{\{1,2,5,10\},\{3,4,5,10\}\} \\ &\quad \{\{1,4,10,11\},\{2,3,10,11\}\} \\ &\quad \{\{1,2,3,4,6,7,8,9\}\} \\ &\quad \{\{1,3,5,6,7,8,9,11\},\{2,4,5,6,7,8,9,11\}\} \end{aligned}$$

となり、これらを $A_{8,32}$ に加え、極大対蹠的部分集合

$$\begin{aligned} A_{15,5} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,10\},\{3,4,5,10\}, \\ &\quad \{1,3,5,11\},\{2,4,5,11\},\{1,4,10,11\} \\ &\quad \{2,3,10,11\},\{6,7,8,9\}, \\ &\quad \{1,2,5,6,7,8,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\} \\ &\quad \{1,4,6,7,8,9,10,11\},\{2,3,6,7,8,9,10,11\}, \\ &\quad \{1,3,5,6,7,8,9,11\},\{2,4,5,6,7,8,9,11\} \\ &\quad \{1,2,3,4,6,7,8,9\}\} \end{aligned}$$

が得られる。これも $A_{15,3}$ と合同である。

(1.4.2.4) $P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_4(\{6,\ldots,10\})$ の最小元 $\{1,2,3,4,6,7,8,9\}$ を取り、$A_{7,8}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,35} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}, \\ &\quad \{1,3,5,11\},\{2,4,5,11\},\{1,4,6,7,8,9,10,11\} \\ &\quad \{2,3,6,7,8,9,10,11\},\{1,2,3,4,6,7,8,9\}\} \end{aligned}$$

が得られる。後は (1.4.2.4) に帰着する。

(1.4.2.5) $\{\{1,3\},\{2,4\}\} \times \{\{5\}\} \times P_4(\{6,\ldots,10\}) \times \{\{11\}\}$ の最小元 $\{\{1,3,5,6,7,8,9,11\}\}$ を取り、$A_{7,8}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,36} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}, \\ &\quad \{1,3,5,11\},\{2,4,5,11\},\{1,4,6,7,8,9,10,11\} \\ &\quad \{2,3,6,7,8,9,10,11\},\{1,3,5,6,7,8,9,11\}\} \end{aligned}$$

が得られる。後は (1.4.2.4) に帰着する。

(1.4.3) $P_4(\{5,\ldots,10\})$ の最小元 $\{5,6,7,8\}$ を取り、$A_{3,3}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{4.15} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}, \\ &\quad \{5,6,7,8\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって

$$
\begin{aligned}
A(A_{4,15}) &= \{\{1,2\},\{3,4\}\}\times P_2(\{5,6,7,8\})\\
&\cup \{\{1,2,9,10\},\{3,4,9,10\}\}\\
&\cup P_1(\{1,2\})\times P_1(\{3,4\})\\
&\quad \times P_1(\{9,10\})\times\{\{11\}\}\\
&\cup P_2(\{5,6,7,8\})\times\{\{9,10\}\}\\
&\cup \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}\\
&\cup P_4(\{1,2,3,4\})\times P_2(\{5,6,7,8\})\\
&\quad \times\{\{9,10\}\}\\
&\cup P_1(\{1,2\})\times P_1(\{3,4\})\\
&\quad P_4(\{5,6,7,8\})\times P_1(\{9,10\})\times\{\{11\}\}
\end{aligned}
$$

となる。$\{\{1,2,9,10\},\{3,4,9,10\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}$ はそれぞれ対蹠的であり、$A(A_{4,15})$ において他の元と対蹠的なので $A_{4,15}$ に加えられ、

$$
\begin{aligned}
A_{7,7} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\},\\
&\quad \{5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,9,10\}\\
&\quad \{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}
\end{aligned}
$$

となる。よって (1.2.6) に帰着する。

(1.4.4) $P_4(\{1,2,3,4\})\times P_4(\{5,\dots,10\})$ の最小元 $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ を取り、$A_{3,3}$ に加え

$$
\begin{aligned}
A_{4.16} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\},\\
&\quad \{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}
\end{aligned}
$$

が得られる。よって

$$
\begin{aligned}
A(A_{4,16}) &= \{\{1,2\},\{3,4\}\}\times P_2(\{5,6,7,8\})\\
&\cup \{\{1,2,9,10\},\{3,4,9,10\}\}\\
&\cup P_1(\{1,2\})\times P_1(\{3,4\})\\
&\quad \times P_1(\{9,10\})\times\{\{11\}\}\\
&\cup \{\{5,6,7,8\}\}\\
&\cup P_2(\{5,6,7,8\})\times\{\{9,10\}\}\\
&\cup P_4(\{1,2,3,4\})\times P_2(\{5,6,7,8\})\\
&\quad \times\{\{9,10\}\}\\
&\cup P_1(\{1,2\})\times P_1(\{3,4\})\\
&\quad P_4(\{5,6,7,8\})\times P_1(\{9,10\})\times\{\{11\}\}
\end{aligned}
$$

となる。$\{\{1,2,9,10\},\{3,4,9,10\},\{5,6,7,8\}\}$ はそれぞれ対蹠的であり、$A(A_{4,16})$ において他の元と対蹠的なので $A_{4,16}$ に加えられ、

$$\begin{aligned}A_{7,7} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\},\\ &\quad \{5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,9,10\}\\ &\quad \{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}\}\end{aligned}$$

となる。よって (1.2.6) に帰着する。

(1.4.5) $P_1(\{1,2\})\times P_1(\{3,4\})\times P_5(\{5,\ldots,10\})\times\{\{11\}\}$
の最小元 $\{1,3,5,6,7,8,9,11\}$ を取り、$A_{3,3}$ に加え

$$\begin{aligned}A_{4.17} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\},\\ &\quad \{1,3,5,6,7,8,9,11\}\}\end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned}A(A_{4,17}) &= \{\{1,2\},\{3,4\}\}\times P_1(\{5,\ldots,9\})\\ &\quad \times\{\{10\}\}\\ &\cup\ \{\{1,4,10,11\},\{2,3,10,11\}\}\\ &\cup\ \{\{1,3\},\{2,4\}\}\times P_1(\{5,\ldots,9\})\\ &\quad \times\{\{11\}\}\\ &\cup\ P_4(\{5,\ldots,9\})\\ &\cup\ P_4(\{1,2,3,4\})\times P_4(\{5,\ldots,9\})\\ &\cup\ \{\{2,4,5,6,7,8,9,11\}\}\\ &\cup\ \{\{1,4\},\{2,3\}\}\times P_4(\{5,\ldots,9\})\\ &\quad \times\{\{10,11\}\}\end{aligned}$$

ここで

$$\{\{1,4,10,11\},\{2,3,10,11\},\{2,4,5,6,7,8,9,11\}\}$$

はそれぞれ対蹠的であり、$A(A_{4,17})$ において他の元と対蹠的なので $A_{4,17}$ に加えられ、

$$\begin{aligned}A_{7,9} &= \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\},\\ &\quad \{1,3,5,6,7,8,9,11\},\{1,4,10,11\},\{2,3,10,11\},\\ &\quad \{2,4,5,6,7,8,9,11\},\}\end{aligned}$$

が得られる。よって

$$
\begin{aligned}
A(A_{7,9}) &= \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_1(\{5,\dots,9\}) \\
&\quad \times\{\{10\}\} \\
&\cup \{\{1,3\},\{2,4\}\} \times P_1(\{5,\dots,9\}) \\
&\quad \times\{\{11\}\} \\
&\cup P_4(\{5,\dots,9\}) \\
&\cup P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_4(\{5,\dots,9\}) \\
&\cup \{\{1,4\},\{2,3\}\} \times P_4(\{5,\dots,9\}) \\
&\quad \times\{\{10,11\}\}
\end{aligned}
$$

となる。これらは $S(A_{7,9})$ の軌道になる。

(1.4.5.1) $\{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_1(\{5,\dots,9\}) \times \{\{10\}\}$
の最小元 $\{1,2,5,10\}$ を取り、$A_{7,9}$ に加えると

$$
\begin{aligned}
A_{8,37} = \{&\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}, \\
&\{1,3,5,6,7,8,9,11\},\{1,4,10,11\},\{2,3,10,11\}, \\
&\{2,4,5,6,7,8,9,11\},\{1,2,5,10\}\}
\end{aligned}
$$

が得られる。よって

$$
\begin{aligned}
A(A_{8,37}) &= \{\{3,4,5,10\}\} \\
&\cup \{\{1,3,5,11\},\{2,4,5,11\}\} \\
&\cup \{\{6,7,8,9\}\} \\
&\cup \{\{1,2,3,4,6,7,8,9\}\} \\
&\cup \{\{1,4,6,7,8,9,10,11\},\{2,3,6,7,8,9,10,11\}\}
\end{aligned}
$$

となり、これらを $A_{8,35}$ に加え極大対蹠的部分集合 $A_{15,5}$ が得られる。

(1.4.5.2) $\{\{1,3\},\{2,4\}\} \times P_1(\{5,\dots,9\}) \times \{\{11\}\}$
の最小元 $\{1,3,5,11\}$ を取り、$A_{7,9}$ に加えると

$$
\begin{aligned}
A_{8,38} = \{&\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}, \\
&\{1,3,5,6,7,8,9,11\},\{1,4,10,11\},\{2,3,10,11\}, \\
&\{2,4,5,6,7,8,9,11\},\{1,3,5,11\}\}
\end{aligned}
$$

が得られる。よって (1.4.5.1) に帰着する。

(1.4.5.3) $P_4(\{5,\dots,9\})$ の最小元 $\{5,6,7,8\}$ をを取り、$A_{7,9}$ に加えると

$$
\begin{aligned}
A_{8,39} = \{&\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}, \\
&\{1,3,5,6,7,8,9,11\},\{1,4,10,11\},\{2,3,10,11\}, \\
&\{2,4,5,6,7,8,9,11\},\{5,6,7,8\}\}
\end{aligned}
$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{8,39}) &= \{\{1,2,9,10\},\{3,4,9,10\}\} \\ &\cup \{\{1,3,9,11\},\{2,4,9,11\}\} \\ &\cup \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\} \\ &\cup \{\{1,4,5,6,7,8,10,11\},\{2,3,5,6,7,8,10,11\}\} \end{aligned}$$

となり、これらを $A_{8,37}$ に加え極大対蹠的部分集合

$$\begin{aligned} A_{15,6} = \ &\{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{1,2,9,10\}, \\ &\{3,4,9,10\},\{1,3,9,11\},\{2,4,9,11\}, \\ &\{1,4,10,11\},\{2,3,10,11\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}, \\ &\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}, \\ &\{1,3,5,6,7,8,9,11\},\{2,4,5,6,7,8,9,11\}, \\ &\{1,4,5,6,7,8,10,11\},\{2,3,5,6,7,8,10,11\}\} \end{aligned}$$

が得られる。これも $A_{15,3}$ と合同である。

(1.4.5.4) $P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_4(\{5,\dots,9\})$ の最小元 $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ を取り、$A_{7,9}$ に加えると

$$\begin{aligned} A_{8,40} = \ &\{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}, \\ &\{1,3,5,6,7,8,9,11\},\{1,4,10,11\},\{2,3,10,11\}, \\ &\{2,4,5,6,7,8,9,11\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって (1.4.5.3) に帰着する。

(1.4.5.5) $\{\{1,4\},\{2,3\}\} \times P_4(\{5,\dots,9\}) \times \{\{10,11\}\}$
の最小元 $\{1,4,5,6,7,8,10,11\}$ を取り、$A_{7,9}$ に加えると

$$\begin{aligned} A_{8,41} = \ &\{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}, \\ &\{1,3,5,6,7,8,9,11\},\{1,4,10,11\},\{2,3,10,11\}, \\ &\{2,4,5,6,7,8,9,11\},\{1,4,5,6,7,8,10,11\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって (1.4.5.3) に帰着する。

(2) $A_{1,2} = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ を取る。よって

$$\begin{aligned} A(A_{1,2}) &= P_4(\{1,\dots,8) \\ &\cup P_2(\{1,\dots,8\}) \times P_2(\{9,10,11\}) \\ &\cup P_6(\{1,\dots,8\}) \times P_2(\{9,10,11\}) \end{aligned}$$

となる。これらは $S(A_{1,2}) = \mathrm{Sym}(\{1,\dots,8\}) \times \mathrm{Sym}(\{9,10,11\})$ の軌道になっている。

(2.1) $P_4(\{1,\dots,8)$ の最小元 $\{1,2,3,4\}$ を取り、$A_{1,2}$ に加え

$$A_{2,3} = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}$$

が得られる。これは (1.3) に帰着する。

(2.2) $P_2(\{1,\dots,8\}) \times P_2(\{9,10,11\})$ の最小元 $\{1,2,9,10\}$ を取り、$A_{1,2}$ に加え

$$A_{2,5} = \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,9,10\}\}$$

が得られる。よって

$$\begin{array}{rcl} A(A_{2,5}) & = & \{\{1,2\}\} \times P_2(\{3,\dots,8\}) \\ & \cup & P_4(\{3,\dots,8\}) \\ & \cup & P_2(\{3,\dots,8\}) \times \{\{9,10\}\} \\ & \cup & P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,\dots,8\}) \\ & & \times P_1(\{9,10\}) \times \{\{11\}\} \\ & \cup & \{\{1,2\}\} \times P_4(\{3,\dots,8\}) \\ & & \times \{\{9,10\}\} \\ & \cup & P_1(\{1,2\}) \times P_5(\{3,\dots,8\}) \\ & & P_1(\{9,10\}) \times \{\{11\}\} \\ & \cup & \{\{3,4,5,6,7,8,9,10\}\} \end{array}$$

となる。$\{\{3,4,5,6,7,8,9,10\}\}$ は $A(A_{2,5})$ において他の元と対蹠的なので $A_{2,5}$ に加えられ

$$A_{3,4} = \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}\}$$

が得られる。よって

$$\begin{array}{rcl} A(A_{3,4}) & = & \{\{1,2\}\} \times P_2(\{3,\dots,8\}) \\ & \cup & P_4(\{3,\dots,8\}) \\ & \cup & P_2(\{3,\dots,8\}) \times \{\{9,10\}\} \\ & \cup & P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,\dots,8\}) \\ & & \times P_1(\{9,10\}) \times \{\{11\}\} \\ & \cup & \{\{1,2\}\} \times P_4(\{3,\dots,8\}) \\ & & \times \{\{9,10\}\} \\ & \cup & P_1(\{1,2\}) \times P_5(\{3,\dots,8\}) \\ & & \times P_1(\{9,10\}) \times \{\{11\}\} \end{array}$$

となる。

(2.2.1) $\{\{1,2\}\} \times P_2(\{3,\ldots,8\})$ の最小元 $\{1,2,3,4\}$ を取り、$A_{3,4}$ に加え

$$
\begin{aligned}
A_{4,18} \quad = \quad & \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}\} \\
& \{1,2,3,4\}\}
\end{aligned}
$$

が得られる。よって

$$
\begin{aligned}
A(A_{4,18}) \quad = \quad & \{\{1,2\}\} \times P_2(\{5,\ldots,8\}) \\
\cup \quad & \{\{3,4\}\} \times P_2(\{5,\ldots,8\}) \\
\cup \quad & \{\{5,6,7,8\}\} \\
\cup \quad & \{\{3,4,9,10\}\} \\
\cup \quad & P_2(\{5,\ldots,8\}) \times \{\{9,10\}\} \\
\cup \quad & P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \\
& \times P_1(\{9,10\}) \times \{\{11\}\} \\
\cup \quad & \{\{1,2\}\} \times \{\{3,4\}\} \\
& \times P_2(\{5,\ldots,8\}) \times \{\{9,10\}\} \\
\cup \quad & \{\{1,2,5,6,7,8,9,10\}\} \\
\cup \quad & P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \\
& \times P_4(\{5,\ldots,8\}) \times P_1(\{9,10\}) \\
& \times \{\{11\}\}
\end{aligned}
$$

となり、$\{\{5,6,7,8\},\{3,4,9,10\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\}\}$ はそれぞれ対蹠的で、$A(A_{4,18})$ において他の元とも対蹠的なので $A_{4,18}$ に加えられ

$$
\begin{aligned}
A_{7,7} \quad = \quad & \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}\} \\
& \{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{3,4,9,10\}, \\
& \{1,2,5,6,7,8,9,10\}\}
\end{aligned}
$$

が得られる。よって (1.2.6) に帰着する。

(2.2.2) $P_4(\{3,\ldots,8\})$ の最小元 $\{3,4,5,6\}$ を取り、$A_{3,4}$ に加え

$$
\begin{aligned}
A_{4,19} \quad = \quad & \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}\} \\
& \{3,4,5,6\}\}
\end{aligned}
$$

が得られる。よって

$$
\begin{aligned}
A(A_{4,19}) &= \{\{1,2\}\} \times P_2(\{3,4,5,6\}) \\
&\cup \{\{1,2,7,8\}\} \\
&\cup \{\{3,4,7,8\},\{5,6,7,8\}\} \\
&\cup P_2(\{3,4,5,6\}) \times \{\{9,10\}\} \\
&\cup \{\{7,8,9,10\}\} \\
&\cup P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{7,8\}) \\
&\quad \times P_1(\{9,10\}) \times \{\{11\}\} \\
&\cup \{\{1,2,3,4,5,6,9,10\}\} \\
&\cup \{\{1,2\}\} \times P_2(\{3,4,5,6\}) \\
&\quad \times \{\{7,8,9,10\}\} \\
&\cup P_1(\{1,2\}) \times P_4(\{3,4,5,6\}) \\
&\quad \times P_1(\{7,8\}) \times P_1(\{9,10\}) \\
&\quad \times \{\{11\}\}
\end{aligned}
$$

となる。$\{\{1,2,7,8\},\{7,8,9,10\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\}$ はそれぞれ対蹠的であり、$A(A_{4,19})$ において他の元とも対蹠的なので $A_{4,19}$ に加えられ、

$$
\begin{aligned}
A_{7,10} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}\} \\
&\quad \{3,4,5,6\},\{1,2,7,8\},\{7,8,9,10\}, \\
&\quad \{1,2,3,4,5,6,9,10\}\}
\end{aligned}
$$

が得られる。よって

$$
\begin{aligned}
A(A_{7,10}) &= \{\{1,2\}\} \times P_2(\{3,4,5,6\}) \\
&\cup \{\{3,4,7,8\},\{5,6,7,8\}\} \\
&\cup P_2(\{3,4,5,6\}) \times \{\{9,10\}\} \\
&\cup P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{7,8\}) \\
&\quad \times P_1(\{9,10\}) \times \{\{11\}\} \\
&\cup \{\{1,2\}\} \times P_2(\{3,4,5,6\}) \\
&\quad \times \{\{7,8,9,10\}\} \\
&\cup P_1(\{1,2\}) \times P_4(\{3,4,5,6\}) \\
&\quad \times P_1(\{7,8\}) \times P_1(\{9,10\}) \\
&\quad \times \{\{11\}\}
\end{aligned}
$$

となる。

(2.2.2.1) $\{\{1,2\}\} \times P_2(\{3,4,5,6\})$ の最小元 $\{1,2,3,4\}$ を取り、$A_{7,10}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,42} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}\} \\ &\quad \{3,4,5,6\},\{1,2,7,8\},\{7,8,9,10\}, \\ &\quad \{1,2,3,4,5,6,9,10\},\{1,2,3,4\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{8,42}) &= \{\{1,2,5,6\}\} \\ &\cup \{\{3,4,7,8\},\{5,6,7,8\}\} \\ &\cup \{\{3,4,9,10\},\{5,6,9,10\}\} \\ &\cup \{\{1,2,3,4,7,8,9,10\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\}\} \end{aligned}$$

となるので、極大対蹠的部分集合 $A_{15,2} = A(4,10) \cup A(8,10)$ が得られる。

(2.2.2.2) $\{\{3,4,7,8\},\{5,6,7,8\}\}$ の最小元 $\{\{3,4,7,8\}\}$ を取り $A_{7,10}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,43} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}\} \\ &\quad \{3,4,5,6\},\{1,2,7,8\},\{7,8,9,10\}, \\ &\quad \{1,2,3,4,5,6,9,10\},\{3,4,7,8\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって (2.2.2.1) に帰着する。

(2.2.2.3) $P_2(\{3,4,5,6\}) \times \{\{9,10\}\}$ の最小元 $\{\{3,4,9,10\}\}$ を取り $A_{7,10}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,44} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}\} \\ &\quad \{3,4,5,6\},\{1,2,7,8\},\{7,8,9,10\}, \\ &\quad \{1,2,3,4,5,6,9,10\},\{3,4,7,8\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって (2.2.2.1) に帰着する。

(2.2.2.4) $P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{7,8\}) \times P_1(\{9,10\}) \times \{\{11\}\}$ の最小元 $\{1,7,9,11\}$ を取り、$A_{7,10}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,45} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}\} \\ &\quad \{3,4,5,6\},\{1,2,7,8\},\{7,8,9,10\}, \\ &\quad \{1,2,3,4,5,6,9,10\},\{1,7,9,11\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{8,45}) &= \{\{1,8,10,11\},\{2,7,10,11\},\{2,8,9,11\}\} \\ &\cup \{\{1,3,4,5,6,7,9,11\},\{1,3,4,5,6,8,10,11\}, \\ &\quad \{2,3,4,5,6,7,10,11\},\{2,3,4,5,6,8,9,11\}\} \end{aligned}$$

が得られる。これらを $A_{8,43}$ に加え、極大対蹠的部分集合

$$\begin{aligned}A_{15,7} &= \{\{1,2,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,5,6\},\\ &\quad \{7,8,9,10\},\{1,7,9,11\},\{1,8,10,11\}\\ &\quad \{2,7,10,11\},\{2,8,9,11\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\\ &\quad \{3,4,5,6,7,8,9,10\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\}\\ &\quad \{1,3,4,5,6,7,9,11\},\{1,3,4,5,6,8,10,11\}\\ &\quad \{2,3,4,5,6,7,10,11\},\{2,3,4,5,6,8,9,11\}\end{aligned}$$

が得られる。これも $A_{15,3}$ と合同である。

(2.2.2.5) $\{\{1,2\}\}\times P_2(\{3,4,5,6\})\times\{\{7,8,9,10\}\}$ の最小元 $\{1,2,3,4,7,8,9,10\}$ を取り、$A_{7,10}$ に加え

$$\begin{aligned}A_{8,46} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}\}\\ &\quad \{3,4,5,6\},\{1,2,7,8\},\{7,8,9,10\},\\ &\quad \{1,2,3,4,5,6,9,10\},\{1,2,3,4,7,8,9,10\}\}\end{aligned}$$

が得られる。よって (2.2.2.1) に帰着する。

(2.2.2.6)

$$\begin{aligned}&P_1(\{1,2\})\times P_4(\{3,4,5,6\})\\ &\times P_1(\{7,8\})\times P_1(\{9,10\})\\ &\times\{\{11\}\}\end{aligned}$$

の最小元 $\{1,3,4,5,6,7,9,11\}$ を取り、$A_{7,10}$ に加え

$$\begin{aligned}A_{8,47} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}\}\\ &\quad \{3,4,5,6\},\{1,2,7,8\},\{7,8,9,10\},\\ &\quad \{1,2,3,4,5,6,9,10\},\{1,3,4,5,6,7,9,11\}\}\end{aligned}$$

が得られる。よって (2.2.2.4) に帰着する。

(2.2.3) $P_2(\{3,\ldots,8\})\times\{\{9,10\}\}$ の最小元 $\{3,4,9,10\}$ を取り、$A_{3,4}$ に加え

$$\begin{aligned}A_{4,19} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\},\\ &\quad \{3,4,9,10\}\}\end{aligned}$$

が得られる。よって

$$
\begin{aligned}
A(A_{4,19}) &= \{\{1,2,3,4\}\} \\
&\cup \{\{1,2\},\{3,4\}\} \times P_2(\{5,6,7,8\}) \\
&\cup \{\{5,6,7,8\}\} \\
&\cup P_2(\{5,6,7,8\}) \times \{\{9,10\}\} \\
&\cup P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \\
&\quad \times P_1(\{9,10\}) \times \{\{11\}\} \\
&\cup \{\{1,2,3,4\}\} \times P_2(\{5,6,7,8\}) \\
&\quad \times \{\{9,10\}\} \\
&\cup \{\{1,2,5,6,7,8,9,10\}\} \\
&\cup P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,4\}) \\
&\quad \times P_4(\{5,6,7,8\}) \times P_1(\{9,10\}) \\
&\quad \times \{\{11\}\}
\end{aligned}
$$

となり、$\{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\}$ はそれぞれ対蹠的であり、$A(A_{4,19})$ において他の元とも対蹠的なので $A_{4,19}$ に加えられ、

$$
\begin{aligned}
A_{7,7} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}, \\
&\quad \{3,4,9,10\},\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\}, \\
&\quad \{1,2,5,6,7,8,9,10\}\}
\end{aligned}
$$

が得られ、(1.2.6) に帰着する。

(2.2.4) $P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{3,\ldots,8\}) \times P_1(\{9,10\}) \times \{\{11\}\}$ の最小元 $\{1,3,9,11\}$ を取り、$A_{3,4}$ に加え

$$
\begin{aligned}
A_{4,20} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}, \\
&\quad \{1,3,9,11\}\}
\end{aligned}
$$

が得られる。よって

$$
\begin{aligned}
A(A_{4,20}) &= \{\{1,2,3\}\} \times P_1(\{4,\ldots,8\}) \\
&\cup\ P_4(\{4,\ldots,8\}) \\
&\cup\ \{\{3\}\} \times P_1(\{4,\ldots,8\}) \times \{\{9,10\}\} \\
&\cup\ \{\{1\}\} \times P_1(\{4,\ldots,8\}) \\
&\quad \times\{\{10,11\}\} \\
&\cup\ \{\{2,3,10,11\}\} \\
&\cup\ \{\{2\}\} \times P_1(\{4,\ldots,8\}) \\
&\quad \times\{\{9,11\}\} \\
&\cup\ \{\{1,2\}\} \times P_4(\{4,\ldots,8\}) \\
&\quad \times\{\{9,10\}\} \\
&\cup\ \{1,4,5,6,7,8,10,11\} \\
&\cup\ \{\{2,3\}\} \times P_4(\{4,\ldots,8\}) \\
&\quad \{\{10,11\}\} \\
&\cup\ \{\{2,4,5,6,7,8,9,11\}\} \\
&\cup\ \{\{1,3\}\} \times P_4(\{4,\ldots,8\}) \\
&\quad \times\{\{9,11\}\}
\end{aligned}
$$

となる。また $\{\{2,3,10,11\},\{1,4,5,6,7,8,10,11\},\{2,4,5,6,7,8,9,11\}\}$ はそれぞれ対蹠的であり、$A(A_{4,20})$ において他の元とも対蹠的なので $A_{4,20}$ に加えられ、

$$
\begin{aligned}
A_{7,11} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}, \\
&\quad \{1,3,9,11\},\{2,3,10,11\},\{1,4,5,6,7,8,10,11\}, \\
&\quad \{2,4,5,6,7,8,9,11\}\}
\end{aligned}
$$

が得られる。よって

$$
\begin{aligned}
A(A_{7,11}) &= \{\{1,2,3\}\} \times P_1(\{4,\dots,8\}) \\
&\cup\ P_4(\{4,\dots,8\}) \\
&\cup\ \{\{3\}\} \times P_1(\{4,\dots,8\}) \times \{\{9,10\}\} \\
&\cup\ \{\{1\}\} \times P_1(\{4,\dots,8\}) \\
&\quad \times\{\{10,11\}\} \\
&\cup\ \{\{2\}\} \times P_1(\{4,\dots,8\}) \\
&\quad \times\{\{9,11\}\} \\
&\cup\ \{\{1,2\}\} \times P_4(\{4,\dots,8\}) \\
&\quad \times\{\{9,10\}\} \\
&\cup\ \{\{2,3\}\} \times P_4(\{4,\dots,8\}) \\
&\quad \times\{\{10,11\}\} \\
&\cup\ \{\{1,3\}\} \times P_4(\{4,\dots,8\}) \\
&\quad \times\{\{9,11\}\}
\end{aligned}
$$

となる。これらは $S(A_{7,11})$ の軌道になっている。

(2.2.4.1) $\{\{1,2,3\}\} \times P_1(\{4,\dots,8\})$ の最小元 $\{1,2,3,4\}$ を取り、$A_{7,11}$ に加えると、

$$
\begin{aligned}
A_{8,48} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}, \\
&\quad \{1,3,9,11\},\{2,3,10,11\},\{1,4,5,6,7,8,10,11\}, \\
&\quad \{2,4,5,6,7,8,9,11\},\{1,2,3,4\}\}
\end{aligned}
$$

が得られる。よって

$$
\begin{aligned}
A(A_{8,48}) &= \{\{5,6,7,8\},\{3,4,9,10\}, \\
&\quad \{1,4,10,11\},\{2,4,9,11\},\{1,2,5,6,7,8,9,10\}, \\
&\quad \{2,3,5,6,7,8,10,11\},\{1,3,5,6,7,8,9,11\}\}
\end{aligned}
$$

となり、これらを $A_{8,46}$ に加えると極大対蹠的部分集合 $A_{15,6}$ が得られる。

(2.2.4.2) $P_4(\{4,\dots,8\})$ の最小元 $\{4,5,6,7\}$ を取り、$A_{7,11}$ に加えると、

$$
\begin{aligned}
A_{8,49} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}, \\
&\quad \{1,3,9,11\},\{2,3,10,11\},\{1,4,5,6,7,8,10,11\}, \\
&\quad \{2,4,5,6,7,8,9,11\},\{4,5,6,7\}\}
\end{aligned}
$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{8,49}) &= \{\{1,2,3,8\},\{3,8,9,10\}, \\ &\quad \{1,8,10,11\},\{2,8,9,11\},\{1,2,4,5,6,7,9,10\}, \\ &\quad \{2,3,4,5,6,7,10,11\},\{1,3,4,5,6,7,9,11\}\} \end{aligned}$$

となり、これらを $A_{8,47}$ に加えると極大対蹠的部分集合

$$\begin{aligned} A_{15,8} &= \{\{1,2,3,8\},\{1,2,9,10\},\{1,3,9,11\}, \\ &\quad \{1,8,10,11\},\{2,3,10,11\},\{2,8,9,11\}, \\ &\quad \{3,8,9,10\},\{4,5,6,7\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}, \\ &\quad \{3,4,5,6,7,8,9,10\},\{1,2,4,5,6,7,9,10\}, \\ &\quad \{1,3,4,5,6,7,9,11\},\{1,4,5,6,7,8,10,11\}, \\ &\quad \{2,3,4,5,6,7,10,11\},\{2,4,5,6,7,8,9,11\}\} \end{aligned}$$

が得られる。これも $A_{15,3}$ と合同である。

(2.2.4.3) $\{\{3\}\} \times P_1(\{4,\ldots,8\}) \times \{\{9,10\}\}$ の最小元 $\{3,4,9,10\}$ を取り、$A_{7,11}$ に加えると、

$$\begin{aligned} A_{8,50} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}, \\ &\quad \{1,3,9,11\},\{2,3,10,11\},\{1,4,5,6,7,8,10,11\}, \\ &\quad \{2,4,5,6,7,8,9,11\},\{3,4,9,10\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって (2.2.4.1) に帰着する。

(2.2.4.4) $\{\{1\}\} \times P_1(\{4,\ldots,8\}) \times \{\{10,11\}\}$ の最小元 $\{1,4,10,11\}$ を取り、$A_{7,11}$ に加えると、

$$\begin{aligned} A_{8,51} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}, \\ &\quad \{1,3,9,11\},\{2,3,10,11\},\{1,4,5,6,7,8,10,11\}, \\ &\quad \{2,4,5,6,7,8,9,11\},\{1,4,10,11\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって (2.2.4.1) に帰着する。

(2.2.4.5) $\{\{2\}\} \times P_1(\{4,\ldots,8\}) \times \{\{9,11\}\}$ の最小元 $\{2,4,9,11\}$ を取り、$A_{7,11}$ に加えると、

$$\begin{aligned} A_{8,52} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}, \\ &\quad \{1,3,9,11\},\{2,3,10,11\},\{1,4,5,6,7,8,10,11\}, \\ &\quad \{2,4,5,6,7,8,9,11\},\{2,4,9,11\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって (2.2.4.1) に帰着する。

(2.2.4.6) $\{\{1,2\}\} \times P_4(\{4,\dots,8\}) \times \{\{9,10\}\}$ の最小元 $\{1,2,4,5,6,7,9,10\}$ を取り、$A_{7,11}$ に加えると、

$$\begin{aligned} A_{8,53} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\},\\ &\quad \{1,3,9,11\},\{2,3,10,11\},\{1,4,5,6,7,8,10,11\},\\ &\quad \{2,4,5,6,7,8,9,11\},\{1,2,4,5,6,7,9,10\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって (2.2.4.2) に帰着する。

(2.2.4.7) $\{\{2,3\}\} \times P_4(\{4,\dots,8\}) \times \{\{10,11\}\}$ の最小元 $\{2,3,4,5,6,7,10,11\}$ を取り、$A_{7,11}$ に加えると、

$$\begin{aligned} A_{8,54} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\},\\ &\quad \{1,3,9,11\},\{2,3,10,11\},\{1,4,5,6,7,8,10,11\},\\ &\quad \{2,4,5,6,7,8,9,11\},\{2,3,4,5,6,7,10,11\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって (2.2.4.2) に帰着する。

(2.2.4.8) $\{\{1,3\}\} \times P_4(\{4,\dots,8\}) \times \{\{9,11\}\}$ の最小元 $\{1,3,4,5,6,7,9,11\}$ を取り、$A_{7,11}$ に加えると、

$$\begin{aligned} A_{8,55} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\},\\ &\quad \{1,3,9,11\},\{2,3,10,11\},\{1,4,5,6,7,8,10,11\},\\ &\quad \{2,4,5,6,7,8,9,11\},\{1,3,4,5,6,7,9,11\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって (2.2.4.2) に帰着する。

(2.2.5) $\{\{1,2\}\} \times P_4(\{3,\dots,8\}) \times \{\{9,10\}\}$ の最小元 $\{1,2,3,4,5,6,9,10\}$ を取り、$A_{3,4}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{4,21} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\},\\ &\quad \{1,2,3,4,5,6,9,10\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって

$$
\begin{aligned}
A(A_{4,21}) &= \{\{1,2\}\} \times P_2(\{3,4,5,6\}) \\
&\cup \{\{1,2,7,8\}\} \\
&\cup \{\{3,4,5,6\}\} \\
&\cup P_2(\{3,4,5,6\}) \times \{\{7,8\},\{9,10\}\} \\
&\cup \{\{7,8,9,10\}\} \\
&\cup P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{7,8\}) \\
&\quad \times P_1(\{9,10\}) \times \{\{11\}\} \\
&\cup \{\{1,2\}\} \times P_2(\{3,4,5,6\}) \\
&\quad \times \{\{7,8,9,10\}\} \\
&\cup P_1(\{1,2\}) \times P_4(\{3,4,5,6\}) \\
&\quad P_1(\{7,8\}) \times P_1(\{9,10\}) \times \{\{11\}\}
\end{aligned}
$$

となる。$\{\{1,2,7,8\},\{3,4,5,6\},\{7,8,9,10\}\}$ はそれぞれ対蹠的で、$A(A_{4,21})$ において他の元とも対蹠的なので $A_{4,21}$ に加え

$$
\begin{aligned}
A_{7,12} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}, \\
&\quad \{1,2,3,4,5,6,9,10\},\{1,2,7,8\},\{3,4,5,6\}, \\
&\quad \{7,8,9,10\}\}
\end{aligned}
$$

が得られる。よって

$$
\begin{aligned}
A(A_{7,12}) &= \{\{1,2\}\} \times P_2(\{3,4,5,6\}) \\
&\cup P_2(\{3,4,5,6\}) \times \{\{7,8\},\{9,10\}\} \\
&\cup P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{7,8\}) \\
&\quad \times P_1(\{9,10\}) \times \{\{11\}\} \\
&\cup \{\{1,2\}\} \times P_2(\{3,4,5,6\}) \\
&\quad \times \{\{7,8,9,10\}\} \\
&\cup P_1(\{1,2\}) \times P_4(\{3,4,5,6\}) \\
&\quad \times P_1(\{7,8\}) \times P_1(\{9,10\}) \times \{\{11\}\}
\end{aligned}
$$

となる。これらは $S(A_{7,12})$ の軌道になっている。

(2.2.5.1) $\{\{1,2\}\} \times P_2(\{3,4,5,6\})$ の最小元 $\{1,2,3,4\}$ を取り、$A_{7,12}$ に加え

$$
\begin{aligned}
A_{8,56} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}, \\
&\quad \{1,2,3,4,5,6,9,10\},\{1,2,7,8\},\{3,4,5,6\}, \\
&\quad \{7,8,9,10\},\{1,2,3,4\}\}
\end{aligned}
$$

が得られる。よって

$$
\begin{aligned}
A(A_{8,56}) &= \{\{1,2,5,6\},\{3,4,7,8\},\{3,4,9,10\},\\
&\quad \{5,6,7,8\},\{5,6,9,10\},\{1,2,3,4,7,8,9,10\},\\
&\quad \{1,2,5,6,7,8,9,10\}\}
\end{aligned}
$$

となり、これらを $A_{8,54}$ に加えると極大対蹠的部分集合 $A_{15,3}$ が得られる。

(2.2.5.2) $P_2(\{3,4,5,6\}) \times \{\{7,8\},\{9,10\}\}$ の最小元 $\{3,4,7,8\}$ を取り、$A_{7,12}$ に加え

$$
\begin{aligned}
A_{8,57} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\},\\
&\quad \{1,2,3,4,5,6,9,10\},\{1,2,7,8\},\{3,4,5,6\},\\
&\quad \{7,8,9,10\},\{3,4,7,8\}\}
\end{aligned}
$$

が得られる。よって (2.2.5.1) に帰着する。

(2.2.5.3) $P_1(\{1,2\}) \times P_1(\{7,8\}) \times P_1(\{9,10\}) \times \{\{11\}\}$ の最小元 $\{1,7,9,11\}$ を取り、$A_{7,12}$ に加え

$$
\begin{aligned}
A_{8,58} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\},\\
&\quad \{1,2,3,4,5,6,9,10\},\{1,2,7,8\},\{3,4,5,6\},\\
&\quad \{7,8,9,10\},\{1,7,9,11\}\}
\end{aligned}
$$

が得られる。よって (2.2.2.4) に帰着する。

(2.2.5.4) $\{\{1,2\}\} \times P_2(\{3,4,5,6\}) \times \{\{7,8,9,10\}\}$ の最小元 $\{1,2,3,4,7,8,9,10\}$ を取り、$A_{7,12}$ に加え

$$
\begin{aligned}
A_{8,59} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\},\\
&\quad \{1,2,3,4,5,6,9,10\},\{1,2,7,8\},\{3,4,5,6\},\\
&\quad \{7,8,9,10\},\{1,2,3,4,7,8,9,10\}\}
\end{aligned}
$$

が得られる。よって (2.2.5.1) に帰着する。

(2.2.5.5) $P_1(\{1,2\}) \times P_4(\{3,4,5,6\}) \times P_1(\{7,8\}) \times P_1(\{9,10\}) \times \{\{11\}\}$ の最小元 $\{1,3,4,5,6,7,9,11\}$ を取り、$A_{7,12}$ に加え

$$
\begin{aligned}
A_{8,60} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\},\\
&\quad \{1,2,3,4,5,6,9,10\},\{1,2,7,8\},\{3,4,5,6\},\\
&\quad \{7,8,9,10\},\{1,7,9,11\}\}
\end{aligned}
$$

が得られる。よって (2.2.2.4) に帰着する。

(2.2.6) $P_1(\{1,2\}) \times P_5(\{3,\dots,8\}) \times P_1(\{9,10\}) \times \{\{11\}\}$ の最小元 $\{1,3,4,5,6,7,9,11\}$ を取り、$A_{3,4}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{4,21} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}, \\ &\quad \{1,3,4,5,6,7,9,11\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{4,21}) &= \{\{1,2\}\} \times P_1(\{3,\dots,7\}) \times \{\{8\}\} \\ &\cup\ P_4(\{3,\dots,7\}) \\ &\cup\ P_1(\{3,\dots,7\}) \times \{\{8,9,10\}\} \\ &\cup\ \{\{1,8,10,11\}\} \\ &\cup\ \{\{2\}\} \times P_1(\{3,\dots,7\}) \times \{\{10,11\}\} \\ &\cup\ \{\{2,8,9,11\}\} \\ &\cup\ \{\{1\}\} \times P_1(\{3,\dots,7\}) \times \{\{9,11\}\} \\ &\cup\ \{\{1,2\}\} \times P_4(\{3,\dots,7\}) \times \{\{9,10\}\} \\ &\cup\ \{\{1\}\} \times P_4(\{3,\dots,7\}) \times \{\{8,10,11\}\} \\ &\cup\ \{\{2,3,4,5,6,7,10,11\}\} \\ &\cup\ \{\{2\}\} \times P_4(\{3,\dots,7\}) \times \{\{8,9,11\}\} \end{aligned}$$

となる。$\{\{1,8,10,11\},\{2,8,9,11\},\{2,3,4,5,6,7,10,11\}\}$ はそれぞれ互いに対蹠的であり、$A(A_{4,21})$ において他の元とも対蹠的なので $A_{4,21}$ に加えられ

$$\begin{aligned} A_{7,13} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}, \\ &\quad \{1,3,4,5,6,7,9,11\},\{1,8,10,11\},\{2,8,9,11\}, \\ &\quad \{2,3,4,5,6,7,10,11\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{7,13}) &= \{\{1,2\}\} \times P_1(\{3,\dots,7\}) \times \{\{8\}\} \\ &\cup\ P_4(\{3,\dots,7\}) \\ &\cup\ P_1(\{3,\dots,7\}) \times \{\{8,9,10\}\} \\ &\cup\ \{\{2\}\} \times P_1(\{3,\dots,7\}) \times \{\{10,11\}\} \\ &\cup\ \{\{1\}\} \times P_1(\{3,\dots,7\}) \times \{\{9,11\}\} \\ &\cup\ \{\{1,2\}\} \times P_4(\{3,\dots,7\}) \times \{\{9,10\}\} \\ &\cup\ \{\{1\}\} \times P_4(\{3,\dots,7\}) \times \{\{8,10,11\}\} \\ &\cup\ \{\{2\}\} \times P_4(\{3,\dots,7\}) \times \{\{8,9,11\}\} \end{aligned}$$

となる。これらは $S(A_{7,13})$ の軌道になっている。

(2.2.6.1) $\{\{1,2\}\}\times P_1(\{3,\ldots,7\})\times\{\{8\}\}$ の最小元 $\{1,2,3,8\}$ を取り、$A_{7,13}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,61} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\},\\ &\quad \{1,3,4,5,6,7,9,11\},\{1,8,10,11\},\{2,8,9,11\},\\ &\quad \{2,3,4,5,6,7,10,11\},\{1,2,3,8\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{8,61}) &= \{\{4,5,6,7\},\{3,8,9,10\}\{2,3,10,11\},\\ &\quad \{1,3,9,11\},\{1,2,4,5,6,7,9,10\},\\ &\quad \{1,4,5,6,7,8,10,11\},\{2,4,5,6,7,8,9,11\}\} \end{aligned}$$

となり、これらを $A_{8,59}$ に加え極大対蹠的部分集合 $A_{15,8}$ を得る。

(2.2.6.2) $P_4(\{3,\ldots,7\})$ の最小元 $\{3,4,5,6\}$ を取り、$A_{7,13}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,62} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\},\\ &\quad \{1,3,4,5,6,7,9,11\},\{1,8,10,11\},\{2,8,9,11\},\\ &\quad \{2,3,4,5,6,7,10,11\},\{3,4,5,6\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{8,62}) &= \{\{1,2,7,8\},\{7,8,9,10\},\{2,7,10,11\},\\ &\quad \{1,7,9,11\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\},\\ &\quad \{1,3,4,5,6,8,10,11\},\{2,3,4,5,6,8,9,11\}\} \end{aligned}$$

となり、これらを $A_{8,60}$ に加えると極大対蹠的部分集合 $A_{15,7}$ が得られる。

(2.2.6.3) $P_1(\{3,\ldots,7\})\times\{\{8,9,10\}\}$ の最小元 $\{3,8,9,10\}$ を取り、$A_{7,13}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,63} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\},\\ &\quad \{1,3,4,5,6,7,9,11\},\{1,8,10,11\},\{2,8,9,11\},\\ &\quad \{2,3,4,5,6,7,10,11\},\{3,8,9,10\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって (2.2.6.1) に帰着する。

(2.2.6.4) $\{\{2\}\}\times P_1(\{3,\ldots,7\})\times\{\{10,11\}\}$ の最小元 $\{2,3,10,11\}$ を取り、$A_{7,13}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,64} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\},\\ &\quad \{1,3,4,5,6,7,9,11\},\{1,8,10,11\},\{2,8,9,11\},\\ &\quad \{2,3,4,5,6,7,10,11\},\{2,3,10,11\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって (2.2.6.1) に帰着する。

(2.2.6.5) $\{\{1\}\} \times P_1(\{3,\ldots,7\}) \times \{\{9,11\}\}$ の最小元 $\{1,3,9,11\}$ を取り、$A_{7,13}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,65} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}, \\ &\quad \{1,3,4,5,6,7,9,11\},\{1,8,10,11\},\{2,8,9,11\}, \\ &\quad \{2,3,4,5,6,7,10,11\},\{1,3,9,11\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって (2.2.6.1) に帰着する。

(2.2.6.6) $\{\{1,2\}\} \times P_4(\{3,\ldots,7\}) \times \{\{9,10\}\}$ の最小元 $\{1,2,3,4,5,6,9,10\}$ を取り、$A_{7,13}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,66} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}, \\ &\quad \{1,3,4,5,6,7,9,11\},\{1,8,10,11\},\{2,8,9,11\}, \\ &\quad \{2,3,4,5,6,7,10,11\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって (2.2.6.2) に帰着する。

(2.2.6.7) $\{\{1\}\} \times P_4(\{3,\ldots,7\}) \times \{\{8,10,11\}\}$ の最小元 $\{1,3,4,5,6,8,10,11\}$ を取り、$A_{7,13}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,67} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}, \\ &\quad \{1,3,4,5,6,7,9,11\},\{1,8,10,11\},\{2,8,9,11\}, \\ &\quad \{2,3,4,5,6,7,10,11\},\{1,3,4,5,6,8,10,11\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって (2.2.6.2) に帰着する。

(2.2.6.8) $\{\{2\}\} \times P_4(\{3,\ldots,7\}) \times \{\{8,9,11\}\}$ の最小元 $\{2,3,4,5,6,8,9,11\}$ を取り、$A_{7,13}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,68} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}, \\ &\quad \{1,3,4,5,6,7,9,11\},\{1,8,10,11\},\{2,8,9,11\}, \\ &\quad \{2,3,4,5,6,7,10,11\},\{2,3,4,5,6,8,9,11\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって (2.2.6.2) に帰着する。

(2.3) $P_6(\{1,\ldots,8\}) \times P_2(\{9,10,11\})$ の最小元 $\{1,2,3,4,5,6,9,10\}$ を取り、$A_{1,2}$ に加え

$$A_{2,6} = \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\}\}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned}
A(A_{2,6}) &= P_4(\{1,\ldots,6\}) \\
&\cup\ P_2(\{1,\ldots,6\}) \times \{\{7,8\},\{9,10\}\} \\
&\cup\ \{\{7,8,9,10\}\} \\
&\cup\ P_1(\{1,\ldots,6\}) \times P_1(\{7,8\}) \\
&\quad \times P_1(\{9,10\}) \times \{\{11\}\} \\
&\cup\ P_4(\{1,\ldots,6\}) \times \{\{7,8,9,10\}\} \\
&\cup\ P_5(\{1,\ldots,6\}) \times P_1(\{7,8\}) \\
&\quad \times P_1(\{9,10\}) \times \{\{11\}\}
\end{aligned}$$

となる。$\{\{7,8,9,10\}\}$ は $A(A_{2,6})$ において他の元と対蹠的なので $A_{2,6}$ に加えられ

$$A_{3,5} = \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\},\{7,8,9,10\}\}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned}
A(A_{3,5}) &= P_4(\{1,\ldots,6\}) \\
&\cup\ P_2(\{1,\ldots,6\}) \times \{\{7,8\},\{9,10\}\} \\
&\cup\ P_1(\{1,\ldots,6\}) \times P_1(\{7,8\}) \\
&\quad \times P_1(\{9,10\}) \times \{\{11\}\} \\
&\cup\ P_4(\{1,\ldots,6\}) \times \{\{7,8,9,10\}\} \\
&\cup\ P_5(\{1,\ldots,6\}) \times P_1(\{7,8\}) \\
&\quad \times P_1(\{9,10\}) \times \{\{11\}\}
\end{aligned}$$

となる。これらは $S(A_{3,5})$ の軌道になっている。

(2.3.1) $P_4(\{1,\ldots,6\})$ の最小元 $\{1,2,3,4\}$ を取り、$A_{3,5}$ に加え

$$\begin{aligned}
A_{4,22} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\},\{7,8,9,10\}, \\
&\quad \{1,2,3,4\}\}
\end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned}
A(A_{4,22}) &= P_2(\{1,2,3,4\}) \times \{\{5,6\},\{7,8\},\{9,10\}\} \\
&\cup\ \{\{5,6,7,8\},\{5,6,9,10\}\} \\
&\cup\ \{\{1,2,3,4,7,8,9,10\}\} \\
&\cup\ P_2(\{1,2,3,4\}) \times \{\{5,6,7,8,9,10\}\} \\
&\cup\ P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_1(\{5,6\}) \\
&\quad \times P_1(\{7,8\}) \times P_1(\{9,10\}) \times \{\{11\}\}
\end{aligned}$$

となり、$\{\{5,6,7,8\},\{5,6,9,10\},\{1,2,3,4,7,8,9,10\}\}$ は互いに対蹠的であり、$A(A_{4,22})$ において他の元とも対蹠的なので $A_{4,22}$ に加えられる。よって

$$\begin{aligned}A_{7,6} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\},\{7,8,9,10\},\\ &\quad \{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{5,6,9,10\},\\ &\quad \{1,2,3,4,7,8,9,10\}\}\end{aligned}$$

が得られ、(1.2.3) に帰着される。

(2.3.2) $P_2(\{1,\dots,6\})\times\{\{7,8\},\{9,10\}\}$ の最小元 $\{1,2,7,8\}$ を取り、$A_{3,5}$ に加え

$$\begin{aligned}A_{4,23} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\},\{7,8,9,10\},\\ &\quad \{1,2,7,8\}\}\end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned}A(A_{4,23}) &= \{\{1,2\}\}\times P_2(\{3,4,5,6\})\\ &\cup \{\{3,4,5,6\}\}\\ &\cup \{\{1,2,9,10\}\}\\ &\cup P_2(\{3,4,5,6\})\times\{\{7,8\},\{9,10\}\}\\ &\cup P_1(\{1,2\})\times P_1(\{7,8\})\\ &\quad \times P_1(\{9,10\})\times\{\{11\}\}\\ &\cup \{\{3,4,5,6,7,8,9,10\}\}\\ &\cup \{\{1,2\}\}\times P_2(\{3,4,5,6\})\\ &\quad \times\{\{7,8,9,10\}\}\\ &\cup P_1(\{1,2\})\times P_4(\{3,4,5,6\})\\ &\quad P_1(\{7,8\})\times P_1(\{9,10\})\{\{11\}\}\end{aligned}$$

となり、$\{\{3,4,5,6\},\{1,2,9,10\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}\}$ はそれぞれ対蹠的であり、$A(A_{4,23})$ において他の元とも対蹠的なので $A_{4,23}$ に加えられ

$$\begin{aligned}A_{710} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\},\{7,8,9,10\},\\ &\quad \{1,2,7,8\},\{3,4,5,6\},\{1,2,9,10\},\\ &\quad \{3,4,5,6,7,8,9,10\}\}\end{aligned}$$

が得られる。よって (2.2.5) に帰着する。

(2.3.3) $P_1(\{1,\dots,6\})\times P_1(\{7,8\})\times P_1(\{9,10\})\times\{\{11\}\}$ の最小元 $\{1,7,9,11\}$

を取り、$A_{3,5}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{4,24} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\},\{7,8,9,10\}, \\ &\quad \{1,7,9,11\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{4,24}) &= P_4(\{2,\ldots,6\}) \\ &\cup \{\{1\}\} \times P_1(\{2,\ldots,6\}) \\ &\quad \times\{\{7,8\},\{9,10\}\} \\ &\cup \{\{1,8,10,11\}\} \\ &\cup P_1(\{2,\ldots,6\}) \times \{\{7,10,11\}\} \\ &\cup P_1(\{2,\ldots,6\}) \times \{\{8,9,11\}\} \\ &\cup P_4(\{2,\ldots,6\}) \times \{\{7,8,9,10\}\} \\ &\cup \{\{1\}\} \times P_4(\{2,\ldots,6\}) \\ &\quad \times\{\{8,10,11\}\} \\ &\cup \{\{2,3,4,5,6,7,10,11\}\} \\ &\cup \{\{2,3,4,5,6,8,9,11\}\} \\ &\cup \{\{1\}\} \times P_4(\{2,\ldots,6\}) \\ &\quad \times\{\{7,9,11\}\} \end{aligned}$$

となり、$\{\{1,8,10,11\},\{2,3,4,5,6,7,10,11\},\{2,3,4,5,6,8,9,11\}\}$ はそれぞれ対蹠的であり、$A(A_{4,24})$ において他の元とも対蹠的なので $A_{4,24}$ に加えられ

$$\begin{aligned} A_{7,14} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\},\{7,8,9,10\}, \\ &\quad \{1,7,9,11\},\{1,8,10,11\},\{2,3,4,5,6,7,10,11\}, \\ &\quad \{2,3,4,5,6,8,9,11\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって

$$
\begin{aligned}
A(A_{7,14}) &= \{\{1\}\} \times P_1(\{2,\ldots,6\}) \\
&\quad \times\{\{7,8\},\{9,10\}\} \\
&\cup\ P_4(\{2,\ldots,6\}) \\
&\cup\ P_1(\{2,\ldots,6\}) \times \{\{7,10,11\}\} \\
&\cup\ P_1(\{2,\ldots,6\}) \times \{\{8,9,11\}\} \\
&\cup\ P_4(\{2,\ldots,6\}) \times \{\{7,8,9,10\}\} \\
&\cup\ \{\{1\}\} \times P_4(\{2,\ldots,6\}) \\
&\quad \times\{\{8,10,11\}\} \\
&\cup\ \{\{1\}\} \times P_4(\{2,\ldots,6\}) \\
&\quad \times\{\{7,9,11\}\}
\end{aligned}
$$

となる。これらは $S(A_{7,14})$ の軌道になっている。

(2.3.3.1) $\{\{1\}\} \times P_1(\{2,\ldots,6\}) \times \{\{7,8\},\{9,10\}\}$ の最小元 $\{1,2,7,8\}$ を取り、$A_{7,14}$ に加え

$$
\begin{aligned}
A_{8,69} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\},\{7,8,9,10\}, \\
&\quad \{1,7,9,11\},\{1,8,10,11\},\{2,3,4,5,6,7,10,11\}, \\
&\quad \{2,3,4,5,6,8,9,11\},\{1,2,7,8\}\}
\end{aligned}
$$

が得られる。よって

$$
\begin{aligned}
A(A_{8,69}) &= \{\{3,4,5,6\},\{1,2,9,10\},\{2,7,10,11\}, \\
&\quad \{2,8,9,11\},\{3,4,5,6,7,8,9,10\}, \\
&\quad \{1,3,4,5,6,8,10,11\},\{1,3,4,5,6,7,9,11\}\}
\end{aligned}
$$

となり、これらを $A_{8,67}$ に加えると極大対蹠的部分集合 $A_{15,7}$ が得られる。

(2.3.3.2) $\{2,3,4,5\}$ を $A_{7,14}$ に加え

$$
\begin{aligned}
A_{8,70} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\},\{7,8,9,10\}, \\
&\quad \{1,7,9,11\},\{1,8,10,11\},\{2,3,4,5,6,7,10,11\}, \\
&\quad \{2,3,4,5,6,8,9,11\},\{2,3,4,5\}\}
\end{aligned}
$$

が得られる。よって

$$
\begin{aligned}
A(A_{8,70}) &= \{\{1,6,7,8\},\{1,6,9,10\},\{6,7,10,11\} \\
&\quad \{6,8,9,11\},\{2,3,4,5,7,8,9,10\}, \\
&\quad \{1,2,3,4,5,8,10,11\},\{1,2,3,4,5,7,9,11\}\}
\end{aligned}
$$

となり、これらを $A_{8,68}$ に加え極大対蹠的部分集合

$$\begin{aligned} A_{15,9} &= \{\{1,6,7,8\},\{1,6,9,10\},\{1,7,9,11\},\\ &\{1,8,10,11\},\{2,3,4,5\},\{6,7,10,11\},\\ &\{6,8,9,11\},\{7,8,9,10\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\\ &\{1,2,3,4,5,6,9,10\},\{1,2,3,4,5,8,10,11\},\\ &\{1,2,3,4,5,7,9,11\},\{2,3,4,5,6,7,10,11\},\\ &\{2,3,4,5,6,8,9,11\},\{2,3,4,5,7,8,9,10\}\} \end{aligned}$$

が得られる。これも $A_{15,3}$ と合同である。

(2.3.3.3) $P_1(\{2,\ldots,6\})\times\{\{7,10,11\}\}$ の最小元 $\{2,7,10,11\}$ を取り、$A_{7,14}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,71} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\},\{7,8,9,10\},\\ &\{1,7,9,11\},\{1,8,10,11\},\{2,3,4,5,6,7,10,11\},\\ &\{2,3,4,5,6,8,9,11\},\{2,7,10,11\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって (2.3.3.1) に帰着する。

(2.3.3.4) $P_1(\{2,\ldots,6\})\times\{\{8,9,11\}\}$ の最小元 $\{2,8,9,11\}$ を取り、$A_{7,14}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,72} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\},\{7,8,9,10\},\\ &\{1,7,9,11\},\{1,8,10,11\},\{2,3,4,5,6,7,10,11\},\\ &\{2,3,4,5,6,8,9,11\},\{2,8,9,11\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって (2.3.3.1) に帰着する。

(2.3.3.5) $P_4(\{2,\ldots,6\})\times\{\{7,8,9,10\}\}$ の最小元 $\{2,3,4,5,7,8,9,10\}$ を取り、$A_{7,14}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,73} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\},\{7,8,9,10\},\\ &\{1,7,9,11\},\{1,8,10,11\},\{2,3,4,5,6,7,10,11\},\\ &\{2,3,4,5,6,8,9,11\},\{2,3,4,5,7,8,9,10\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって (2.3.3.2) に帰着する。

(2.3.3.6) $\{\{1\}\}\times P_4(\{2,\ldots,6\})\times\{\{8,10,11\}\}$ の最小元 $\{1,2,3,4,5,8,10,11\}$ を取り、$A_{7,14}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,74} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\},\{7,8,9,10\},\\ &\{1,7,9,11\},\{1,8,10,11\},\{2,3,4,5,6,7,10,11\},\\ &\{2,3,4,5,6,8,9,11\},\{1,2,3,4,5,8,10,11\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって (2.3.3.2) に帰着する。

(2.3.3.7) $\{\{1\}\} \times P_4(\{2,\ldots,6\}) \times \{\{7,9,11\}\}$ の最小元 $\{1,2,3,4,5,7,9,11\}$ を取り、$A_{7,14}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{8,75} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\},\{7,8,9,10\}, \\ &\quad \{1,7,9,11\},\{1,8,10,11\},\{2,3,4,5,6,7,10,11\}, \\ &\quad \{2,3,4,5,6,8,9,11\},\{1,2,3,4,5,7,9,11\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって (2.3.3.2) に帰着する。

(2.3.4) $P_4(\{1,\ldots,6\}) \times \{\{7,8,9,10\}\}$ の最小元 $\{1,2,3,4,7,8,9,10\}$ を取り、$A_{3,5}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{4,25} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\},\{7,8,9,10\}, \\ &\quad \{1,2,3,4,7,8,9,10\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって

$$\begin{aligned} A(A_{4,25}) &= \{1,2,3,4\} \\ &\cup\ P_2(\{1,2,3,4\}) \times \{\{5,6\},\{7,8\},\{9,10\}\} \\ &\cup\ \{\{5,6,7,8\},\{5,6,9,10\}\} \\ &\cup\ P_2(\{1,2,3,4\}) \times \{\{5,\ldots,10\}\} \\ &\cup\ P_4(\{1,2,3,4\}) \times P_1(\{5,6\}) \\ &\quad \times P_1(\{7,8\}) \times P_1(\{9,10\}) \\ &\quad \times \{\{11\}\} \end{aligned}$$

となり、$\{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{5,6,9,10\}\}$ はそれぞれ対蹠的であり、$A(A_{4,25})$ において他の元とも対蹠的なので $A_{4,25}$ に加えられ

$$\begin{aligned} A_{4,25} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\},\{7,8,9,10\}, \\ &\quad \{1,2,3,4,7,8,9,10\},\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\}, \\ &\quad \{5,6,9,10\}\} \end{aligned}$$

が得られ、(1.2.3) に帰着する。

(2.3.5) $P_5(\{1,\ldots,6\}) \times P_1(\{7,8\}) \times P_1(\{9,10\}) \times \{\{11\}\}$ の最小元 $\{1,2,3,4,5,7,9,11\}$ を取り、$A_{3,5}$ に加え

$$\begin{aligned} A_{4,26} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\},\{7,8,9,10\}, \\ &\quad \{1,2,3,4,5,7,9,11\}\} \end{aligned}$$

が得られる。よって

$$
\begin{aligned}
A(A_{4,26}) &= P_4(\{1,\ldots,5\}) \\
&\cup\ P_1(\{1,\ldots,5) \times P_1(\{6\}) \\
&\quad \times\{\{7,8\},\{9,10\}\} \\
&\cup\ P_1(\{1,\ldots,5\}) \times \{\{7,9,11\}\} \\
&\cup\ P_1(\{1,\ldots,5) \times \{\{8,10,11\}\} \\
&\cup\ \{\{6,7,10,11\},\{6,8,9,11\}\} \\
&\cup\ P_4(\{1,\ldots,5) \times \{\{7,8,9,10\}\} \\
&\cup\ \{\{1,2,3,4,5,8,10,11\}\} \\
&\cup\ P_4(\{1,\ldots,5) \times \{\{6,7,10,11\}\} \\
&\cup\ P_4(\{1,\ldots,5) \times \{\{6,8,9,11\}\}
\end{aligned}
$$

となり、$\{\{6,7,10,11\},\{6,8,9,11\},\{1,2,3,4,5,8,10,11\}\}$ はそれぞれ対蹠的であり、$A(A_{4,26})$ において他の元とも対蹠的なので $A_{4,26}$ に加えられ

$$
\begin{aligned}
A_{7,13} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\},\{7,8,9,10\}, \\
&\quad \{1,2,3,4,5,7,9,11\},\{6,7,10,11\},\{6,8,9,11\}, \\
&\quad \{1,2,3,4,5,8,10,11\}\}
\end{aligned}
$$

が得られる。よって

$$
\begin{aligned}
A(A_{7,15}) &= P_4(\{1,\ldots,5\}) \\
&\cup\ P_1(\{1,\ldots,5) \times P_1(\{6\}) \\
&\quad \times\{\{7,8\},\{9,10\}\} \\
&\cup\ P_1(\{1,\ldots,5\}) \times \{\{7,9,11\}\} \\
&\cup\ P_1(\{1,\ldots,5) \times \{\{8,10,11\}\} \\
&\cup\ P_4(\{1,\ldots,5) \times \{\{7,8,9,10\}\} \\
&\cup\ P_4(\{1,\ldots,5) \times \{\{6,7,10,11\}\} \\
&\cup\ P_4(\{1,\ldots,5) \times \{\{6,8,9,11\}\}
\end{aligned}
$$

となり、これらは $S(A_{7,15})$ の軌道になる。

(2.3.5.1) $P_4(\{1,\ldots,5\})$ の最小元 $\{1,2,3,4\}$ を取り、$A_{7,15}$ に加え

$$
\begin{aligned}
A_{8,76} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\},\{7,8,9,10\}, \\
&\quad \{1,2,3,4,5,7,9,11\},\{6,7,10,11\},\{6,8,9,11\}, \\
&\quad \{1,2,3,4,5,8,10,11\},\{1,2,3,4\}\}
\end{aligned}
$$

が得られる。よって

$$
\begin{aligned}
A(A_{8,76}) &= \{\{5,6,7,8\},\{5,6,9,10\},\{5,7,9,11\} \\
&\quad \{5,8,10,11\},\{1,2,3,4,7,8,9,10\}, \\
&\quad \{1,2,3,4,6,7,10,11\},\{1,2,3,4,6,8,9,11\}\}
\end{aligned}
$$

となり、これらを $A_{8,74}$ に加えると極大対蹠的部分集合

$$
\begin{aligned}
A_{15,10} &= \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{5,6,9,10\}, \\
&\quad \{5,7,9,11\},\{5,8,10,11\},\{6,7,10,11\}, \\
&\quad \{6,8,9,11\},\{7,8,9,10\},\{1,2,3,4,5,6,7,8\}, \\
&\quad \{1,2,3,4,5,6,9,10\},\{1,2,3,4,5,7,9,11\}, \\
&\quad \{1,2,3,4,5,8,10,11\},\{1,2,3,4,7,8,9,10\} \\
&\quad \{1,2,3,4,6,7,10,11\},\{1,2,3,4,6,8,9,11\}\}
\end{aligned}
$$

が得られる。これも $A_{15,3}$ と合同である。

(2.3.5.2) $P_1(\{1,\dots,5)\times P_1(\{6\})\times\{\{7,8\},\{9,10\}\}$ の最小元 $\{1,6,7,8\}$ を取り、$A_{7,15}$ に加え

$$
\begin{aligned}
A_{8,77} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\},\{7,8,9,10\}, \\
&\quad \{1,2,3,4,5,7,9,11\},\{6,7,10,11\},\{6,8,9,11\}, \\
&\quad \{1,2,3,4,5,8,10,11\},\{1,6,7,8\}\}
\end{aligned}
$$

が得られる。よって

$$
\begin{aligned}
A(A_{8,77}) &= \{\{2,3,4,5\},\{1,6,9,10\},\{1,8,10,11\}, \\
&\quad \{1,7,9,11\},\{2,3,4,5,7,8,9,10\}, \\
&\quad \{2,3,4,5,6,7,10,11\},\{2,3,4,5,6,8,9,11\}\}
\end{aligned}
$$

となり、これらを $A_{8,75}$ に加えると極大対蹠的部分集合 $A_{15,9}$ が得られる。

(2.3.5.3) $P_1(\{1,\dots,5\})\times\{\{7,9,11\}\}$ の最小元 $\{1,7,9,11\}$ を取り、$A_{7,15}$ に加え

$$
\begin{aligned}
A_{8,78} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\},\{7,8,9,10\}, \\
&\quad \{1,2,3,4,5,7,9,11\},\{6,7,10,11\},\{6,8,9,11\}, \\
&\quad \{1,2,3,4,5,8,10,11\},\{1,7,9,11\}\}
\end{aligned}
$$

が得られる。よって (2.3.5.2) に帰着する。

(2.3.5.4) $P_1(\{1,\ldots,5)\times\{\{8,10,11\}\}$ の最小元 $\{1,8,10,11\}$ を取り、$A_{7,15}$ に加え

$$\begin{aligned}A_{8,79} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\},\{7,8,9,10\},\\ &\{1,2,3,4,5,7,9,11\},\{6,7,10,11\},\{6,8,9,11\},\\ &\{1,2,3,4,5,8,10,11\},\{1,8,10,11\}\}\end{aligned}$$

が得られる。よって (2.3.5.2) に帰着する。

(2.3.5.5) $P_4(\{1,\ldots,5)\times\{\{7,8,9,10\}\}$ の最小元 $\{1,2,3,4,7,8,9,10\}$ を取り、$A_{7,15}$ に加え

$$\begin{aligned}A_{8,80} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\},\{7,8,9,10\},\\ &\{1,2,3,4,5,7,9,11\},\{6,7,10,11\},\{6,8,9,11\},\\ &\{1,2,3,4,5,8,10,11\},\{1,2,3,4,7,8,9,10\}\}\end{aligned}$$

が得られる。よって (2.3.5.1) に帰着する。

(2.3.5.6) $P_4(\{1,\ldots,5)\times\{\{6,7,10,11\}\}$ の最小元 $\{1,2,3,4,6,7,10,11\}$ を取り、$A_{7,15}$ に加え

$$\begin{aligned}A_{8,81} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\},\{7,8,9,10\},\\ &\{1,2,3,4,5,7,9,11\},\{6,7,10,11\},\{6,8,9,11\},\\ &\{1,2,3,4,5,8,10,11\},\{1,2,3,4,6,7,10,11\}\}\end{aligned}$$

が得られる。よって (2.3.5.1) に帰着する。

(2.3.5.7) $P_4(\{1,\ldots,5)\times\{\{6,8,9,11\}\}$ の最小元 $\{1,2,3,4,6,8,9,11\}$ を取り、$A_{7,15}$ に加え

$$\begin{aligned}A_{8,82} &= \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{1,2,3,4,5,6,9,10\},\{7,8,9,10\},\\ &\{1,2,3,4,5,7,9,11\},\{6,7,10,11\},\{6,8,9,11\},\\ &\{1,2,3,4,5,8,10,11\},\{1,2,3,4,6,8,9,11\}\}\end{aligned}$$

が得られる。よって (2.3.5.1) に帰着する。

□

10 結論

よって $P(11)$ までの全ての極大対蹠的部分集合の合同類の分類ができた。これらの結果と系 8.1 から $P(n)$ の極大対蹠的部分集合の濃度と $Spin(n)$ の 2-number が一致するので、$Spin(n)$ の大対蹠集合となり、$P(n)$ の極大対蹠的部分集合が $Spin(n)$ の極大対蹠的部分群に対応していることが分かるので、

8 節の予想が成り立っていることが分かる。さらにこの分類から $n \leq 11$ のとき $Spin(n)$ の極大対蹠的部分群が全て同じ元の個数を持つことが分かる。また、得られた分類結果は田崎博之氏 [10] の有向実グラスマン多様体の分類結果を含んでおり、鈴木絢人氏 [11] の見つけた大対蹠集合も含んでいることが分かる。そして $n = 10, 11$ の場合に出てくる 2 つの大対蹠集合は互いに合同ではないので、次の系が成り立つことが分かる。

系 10.1 $n \leq 11$ のとき, スピノル群 $Spin(n)$ の対蹠集合に関して以下の (A)、(B) が成り立つ。

(A) 任意の対蹠集合に対し、それを含む大対蹠集合が存在する。

(B) 二つの大対蹠集合が合同でないものが存在する。

11 課題

$n = 13$ までの完全な分類を成し遂げたい. また, 一般論でスピノル群の極大対蹠的部分群と $P(n)$ の極大対蹠的部分集合が完全に対応することを証明していきたい.

参考文献

[1] B. -Y. Chen and T. Nagano, A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre, Trans. Amer. Math. Soc., 308 (1988), 273-297.

[2] S. Helgason, Differntial Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces, Amer. Math. Soc, 2001.

[3] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Antipodal sets of symmetric R-spaces, Osaka J. Math., 50 (2013), 161-169

[4] P.R. Halmos, Measure Theory, New York, Van Nostrand, 1950.

[5] 伊勢幹夫, 竹内勝, リー群論 1.2, 岩波書店, 1992.

[6] 小林俊行, 大島利雄, リー群論と表現論, 岩波書店, 2005.

[7] 横田一郎, 群と位相, 裳華房, 1971.

[8] 横田一郎, 群と表現, 裳華房, 1973.

[9] H. Blaine Lawson, Jr. and Marie-Louise Michelsohn, Spin Geometry, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1989.

[10] H. Tasaki, Antipodal sets in oriented real Grassmann manifold, Int. J. Math. Vol 24, No.8 (2013), 1350061(28pages) .

[11] 鈴木絢人, コンパクトリーマン対称空間としてのスピン群の対蹠集合について, 2013 年度, 修士論文, 東京理科大学.

[12] 松崎真理亜, コンパクト対称空間の対蹠集合, 2014 年度, 修士論文, 筑波大学.

[13] 田崎博之, 対称空間入門 (第 1〜3 回)-大阪市立大学数学研究所連続講義-(数学院生談話会連続講義), 2010〜2012.