B_σ 空間の前双対について

吉田紘子

Abstract. It is confirmed that the various operators on the predual of Morrey spaces and $B_\sigma - L^p$ spaces are bounded. At first, we check their boundedness and define $B_\sigma-$Morrey the predual space. This space is the set of all the measurable functions decomposed into $f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j B_j$ with some $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty} \in \ell^1(\mathbb{N})$ and some sequence $\{B_j\}_{j=1}^{\infty}$ of $(p', q', \sigma; Q_j, r_j)$-blocks. Then the predual of $B_\sigma-$Morrey spaces is shown to satisfy Fatou's lemma and the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator , the singular integral operator and the fractional integral operator.

1. 前提知識

1.1. モレー空間.

定義 1.1. $1 < q \le p < \infty$,$\mathcal{Q}$:座標軸に平行な辺からなる立方体全体のなす集合族とする．このとき，モレー空間 $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ とは，

$$\|f\|_{\mathcal{M}^p_q} \equiv \sup_{Q\in\mathcal{Q}} |Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\int_Q |f(y)|^q \, dy \right)^{\frac{1}{q}}$$

が有限なもの全体のなす空間である．

定義 1.2. $1 < q \le p < \infty$ とする．

(1) $L^{q'}$ 関数 A が (p', q') ブロックであるとは，$\mathrm{supp}(A) \subset Q$, $\|A\|_{L^{q'}} \le |Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$ を満たすような立方体 Q が存在することである．ただし，p', q' はそれぞれ $1/p + 1/p' = 1$, $1/q + 1/q' = 1$ を満たすものとする．

(2) 可測関数 f 全体で，$\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty} \in \ell^1(\mathbb{N})$ と (p', q') ブロックの列 $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ を用いて

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j A_j \tag{1.1}$$

と表すことができるもの全体を $\mathcal{B}^{p'}_{q'}(\mathbb{R}^n)$ とする．ここで，(1.1) はほとんどいたるところ収束である．この f に対して，f のノルムを

$$\|f\|_{\mathcal{B}^{p'}_{q'}} = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| : \{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty} \in \ell^1(\mathbb{N}), \quad \{A_j\}_{j=1}^{\infty} \text{はブロック}, \quad f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j A_j \right\}$$

と定める．

定理 1.3. $1 < q \le p < \infty$ とする．このとき，$\mathcal{B}^{p'}_{q'}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p'}$ である．

証明. $f \in \mathcal{B}^{p'}_{q'}(\mathbb{R}^n)$ とすると，$\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty} \in \ell^1(\mathbb{N})$ と (p', q') ブロックの列 $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ を用いて

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j A_j$$

と表すことができる．このとき，

$$\|A_j\|_{L^{p'}} = \left(\int_{Q_j} |A_j(y)|^{p'}\,dy\right)^{1/p'} = \left(\int_{Q_j} |A_j(y)|^{p'}\chi_{Q_j}(y)\,dy\right)^{1/p'}$$

より，$\theta = \dfrac{q'}{p'}$，$\dfrac{1}{\theta} + \dfrac{1}{\theta'} = 1$ とすると，

$$\begin{aligned}\int_{Q_j} |A_j(y)|^{p'}\chi_Q(y)dy &\le \left(\int_{Q_j} |A_j(y)|^{p'\cdot\theta}\,dy\right)^{1/\theta} \cdot \left(\int_{Q_j} |\chi_{Q_j}(y)\,dy\right)^{1/\theta'} \\ &= \|A_j\|_{L^{q'}}^{p'} \cdot |Q_j|^{1-\frac{p'}{q'}} \le |Q_j|^{\frac{p'}{q'}-1} \cdot |Q_j|^{1-\frac{p'}{q'}} = 1\end{aligned}$$

であるので，

$$\left\|\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j A_j\right\|_{L^{p'}} \le \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \cdot \|A_j\|_{L^{p'}} < \infty$$

が得られる． □

1.2. 前双対．

定義 1.4. バナッハ空間 Y がバナッハ空間 X の前双対であるとは，Y の双対空間 Y^* が X と同型となることである．

例 1.5. $1 < p < \infty$ とする．$L^p(\mathbb{R}^n)$ の前双対は $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ である．

例 1.6. $1 < q \le p < \infty$ とする．$\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$ の前双対は $\mathcal{B}_{q'}^{p'}(\mathbb{R}^n)$ である．

証明． まず、$f \in \mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)$，$g \in \mathcal{B}_{q'}^{p'}(\mathbb{R}^n)$ を与える．このとき，$\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty} \in \ell^1(\mathbb{N})$ と (p', q') ブロックの列 $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ により $g = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j A_j$ と表されるので，$|f(x)g(x)| \le \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j f(x) A_j(x)|$ である．これより，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|\,dx &\le \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)A_j(x)|\,dx \\ &\le \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)A_j(x)\chi_Q(x)|\,dx \\ &\le \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \cdot |Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\int_Q |f(x)|^q\,dx\right)^{1/q} \\ &\le \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \cdot \|f\|_{\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)}\end{aligned}$$

となる．さらに，$\mathcal{B}_{q'}^{p'}(\mathbb{R}^n)$ ノルムの定義から，任意の $\varepsilon > 0$ をとると，

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \le (1+\varepsilon)\|g\|_{\mathcal{B}_{q'}^{p'}(\mathbb{R}^n)}$$

を満たすような分解 $g = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j A_j$ が存在するので，

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|dx \le (1+\varepsilon)\|f\|_{\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n)} \cdot \|g\|_{\mathcal{B}_{q'}^{p'}(\mathbb{R}^n)} < \infty$$

となる．よって $f{\cdot}g \in L^1$ である．従って，$f \in \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ に対し、有界線形汎関数 $L_f : \mathcal{B}^{p'}_{q'}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ を

$$L_f(g) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx, \quad g \in \mathcal{B}^{p'}_{q'}(\mathbb{R}^n)$$

と定義できる．また，ε は任意だったので，$\varepsilon \to 0$ として，

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|\, dx \le \|f\|_{\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)} \cdot \|g\|_{\mathcal{B}^{p'}_{q'}(\mathbb{R}^n)}.$$

これより，

$$\|L_f\|_{(\mathcal{B}^{p'}_{q'}(\mathbb{R}^n))^*} = \sup_{g\neq 0} \frac{|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx|}{\|g\|_{\mathcal{B}^{p'}_{q'}(\mathbb{R}^n)}} \le \sup_{g \neq 0} \frac{\|f\|_{\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)} \cdot \|g\|_{\mathcal{B}^{p'}_{q'}(\mathbb{R}^n)}}{\|g\|_{\mathcal{B}^{p'}_{q'}(\mathbb{R}^n)}} = \|f\|_{\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)}$$

が得られる．次に，有界線形汎関数 $L : \mathcal{B}^{p'}_{q'}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ を与える．各立方体 Q に対して，$\lambda_1 = \|g\|_{L^{q'}}$，$A_1 = \dfrac{|Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\chi_Q g}{\|g\|_{L^{q'}}}$ とすると，$\mathrm{supp}(A_1) \subset Q$ であり，$\|A_1\|_{L^{q'}} = \dfrac{\|\,|Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\chi_Q g\|_{L^{q'}}}{\|g\|_{L^{q'}}} \le |Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$ より，A_1 は (p', q') ブロックである．ここで，$\lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = 0$，$A_2 = A_3 = \cdots = 0$ とすると，

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j A_j = |Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\chi_Q g \in \mathcal{B}^{p'}_{q'}(\mathbb{R}^n)$$

となる．このとき，

$$\|\,|Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\chi_Q g\|_{\mathcal{B}^{p'}_{q'}(\mathbb{R}^n)} \le \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| = \|g\|_{L^{q'}}$$

であるので，$L_Q : L^{q'} \to \mathbb{C}$ を $L_Q(g) = L(|Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\chi_Q g)$ とすると，各立方体 Q に対して $f_Q \in L^q(\mathbb{R}^n)$ が存在して，$L_Q(g) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f_Q(x)g(x)\,dx$ とできる．ここで，

$$\begin{aligned}
\|L_Q\|_{(L^{q'}(\mathbb{R}^n))^*} &= \sup_{g \neq 0} \frac{|L(|Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\chi_Q g)|}{\|g\|_{L^{q'}}} \le \sup_{g\neq 0} \frac{\|L\|_{(\mathcal{B}^{p'}_{q'}(\mathbb{R}^n))^*} \||Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\chi_Q g\|_{\mathcal{B}^{p'}_{q'}(\mathbb{R}^n)}}{\|g\|_{L^{q'}}} \\
&\le \sup_{g\neq 0} \frac{\|L\|_{(\mathcal{B}^{p'}_{q'}(\mathbb{R}^n))^*} \|g\|_{L^{q'}}}{\|g\|_{L^{q'}}} = \|L\|_{(\mathcal{B}^{p'}_{q'}(\mathbb{R}^n))^*}
\end{aligned}$$

が得られる．さらに，$\|f_Q\|_{L^q} = \|L_Q\|_{(L^{q'}(\mathbb{R}^n))^*}$ より，$\|f_Q\|_{L^q} \le \|L\|_{(\mathcal{B}^{p'}_{q'}(\mathbb{R}^n))^*}$ が得られる．

$Q_1 \subset Q_2$ とすると，$L(\chi_Q g) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |Q|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} f_Q(x)g(x)\,dx$ であるので，

$$\begin{aligned}
|Q_1|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \int_{\mathbb{R}^n} f_{Q_1}(x)\chi_{Q_1}(x)g(x)\,dx &= |Q_2|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \int_{\mathbb{R}^n} f_{Q_2(x)}\chi_{Q_2}(x)\chi_{Q_1}(x)g(x)\,dx \\
&= |Q_2|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \int_{\mathbb{R}^n} f_{Q_2(x)}\chi_{Q_1}(x)g(x)\,dx.
\end{aligned}$$

よってほとんどすべての $x \in Q_1$ に対して，$|Q_1|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} f_{Q_1}(x) = |Q_2|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} f_{Q_2}(x)$ であるので，

$$f(x) = |Q|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} f_Q(x), \quad x \in Q$$

とできる．以上より，

$$|Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\int_Q |f(x)|^q dx \right)^{1/q} = \left(\int_Q |f_Q(x)|^q dx \right)^{1/q} \le \|f_Q\|_{L^q} < \infty.$$

よって $f \in \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ であり，$\|f\|_{\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)} \le \|L\|_{(\mathcal{B}^{p'}_{q'}(\mathbb{R}^n))^*}$ となる．また，

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_Q(x)g(x)\,dx = |Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\chi_Q(x)g(x)\,dx = |Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} L_f(\chi_Q g)$$

であり，一方，

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_Q(x)g(x)\,dx = L(|Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\chi_Q g) = |Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} L(\chi_Q g)$$

であるので，$L = L_f$ が得られる．従って，$\|f\|_{\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)} \le \|L_f\|_{(\mathcal{B}^{p'}_{q'}(\mathbb{R}^n))^*}$ が得られる．以上より，

$$\|f\|_{\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)} = \|L_f\|_{(\mathcal{B}^{p'}_{q'}(\mathbb{R}^n))^*}$$

が成り立つので，$\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ の前双対は $\mathcal{B}^{p'}_{q'}(\mathbb{R}^n)$ である． □

1.3. ハーディー・リトルウッドの極大作用素.

定義 1.7. $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ に対して，

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{(2r)^n} \int_{(-r,r)^n} |f(x-y)|\,dy$$

と定義する．

1.4. 特異積分作用素.

定義 1.8. $L^0(\mathbb{R}^n)$ を可測関数全体としたとき，線形作用素 $T : L^1(\mathbb{R}^n) + L^\infty(\mathbb{R}^n) \to L^0(\mathbb{R}^n)$ が特異積分作用素であるとは次の条件を満たしている可測関数 $K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ が存在していることである．

(1) $1 < p \le \infty$ とする．$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ならば，$Tf \in L^p(\mathbb{R}^n)$ となる．さらに，$A_p > 0$ が存在して，$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ならば $\|Tf\|_{L^p} \le A_p\|f\|_{L^p}$ が成り立つ．

(2) $A_1 > 0$ が存在して，$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ならば，

$$\sup_{\lambda>0} \lambda|\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |Tf(x)| > \lambda\}| \le A_1\|f\|_{L^1}$$

となる．

(3) K は次の不等式を満たしている．

(a) サイズ条件

$$|K(x,y)| \le C|x-y|^{-n} \tag{1.2}$$

(b) ヘルマンダー条件

$$|K(y,x) - K(z,x)| \le C|x-y|^{-n-1}|y-z|, \quad |K(x,y) - K(x,z)| \le C|x-y|^{-n-1}|y-z| \tag{1.3}$$

(4) $\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{supp}(f)$ 上ほとんどいたるところ

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)\,dy$$

となる．

1.5. 分数冪積分作用素.

定義 1.9. I_α を

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy$$

と定義する．

2. $B_\sigma(L^p)(\mathbb{R}^n)$ 空間

2.1. $B_\sigma(L^p)(\mathbb{R}^n)$ 空間.

定義 2.1. $1 < p < \infty, \sigma \geq 0$，$B(r)$ を原点を中心とし半径が r の球とする．

(1) 可測関数 f 全体で，

$$\|f\|_{B_\sigma(L^p)} \equiv \sup_{r>0} \frac{1}{r^\sigma} \|f\chi_{B(r)}\|_{L^p}$$

が有限なもの全体のなす空間を，$\dot{B}_\sigma(L^p)(\mathbb{R}^n)$ 空間と定義する．

(2) 可測関数 f 全体で，

$$\|f\|_{B_\sigma(L^p)} \equiv \sup_{r>1} \frac{1}{r^\sigma} \|f\chi_{B(r)}\|_{L^p}$$

が有限なもの全体のなす空間を，$B_\sigma(L^p)(\mathbb{R}^n)$ 空間と定義する．

一般に $\dot{B}_\sigma$ が付いた空間を斉次 B_σ 空間といい，B_σ が付いた空間を非斉次 B_σ 空間という．

命題 2.2. $1 < p < \infty, \sigma \geq 0$ とするとき，$\|f\|_{B_\sigma(L^p)(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{\dot{B}_\sigma(L^p)(\mathbb{R}^n)}$ より，$\dot{B}_\sigma(L^p)(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_\sigma(L^p)(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ．

2.2. $B_\sigma(L^p)(\mathbb{R}^n)$ 空間の前双対.

定義 2.3. $1 < p < \infty, \sigma \geq 0$ とする．

(1) $r > 0$ とする．$L^{p'}$ 関数 A が (p', σ, r) アトムであるとは，$\mathrm{supp} A \subset B(r)$ かつ $\|A\|_{L^{p'}} \leq r^{-\sigma}$ を満たしていることである．

(2) $A_k \in (p', \sigma, r_k), r_k > 0$ を満たしている $\{(A_k, r_k)\}_{k=1}^\infty$ の全体を $\dot{\mathcal{B}}_\sigma(L^p)$ とする．このとき，可測関数 f 全体で，$\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty \in \ell^1(\mathbb{N})$ と $\{(A_j, r_j)\}_{j=1}^\infty \in \dot{\mathcal{B}}_\sigma(L^p)$ を用いて

$$f = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j A_j \tag{2.1}$$

と表すことができるもの全体を $\dot{H}_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)$ とする．ここで，(2.1) はほとんどいたるところ収束である．この f に対して，f のノルムを

$$\|f\|_{\dot{H}_\sigma(L^p)} = \inf \left\{ \sum_{k=1}^\infty |\lambda_k| : \{\lambda_j\}_{j=1}^\infty \in \ell^1(\mathbb{N}), \quad \{(A_j, r_j)\}_{j=1}^\infty \in \dot{\mathcal{B}}_\sigma(L^p), \quad f = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k A_k \right\}$$

と定める．

(3) $A_k \in (p', \sigma, r_k), r_k > 1$ を満たしている $\{(A_k, r_k)\}_{k=1}^\infty$ の全体を $\mathcal{B}_\sigma(L^p)$ とする．このとき，可測関数 f 全体で，$\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty \in \ell^1(\mathbb{N})$ と $\{(A_j, r_j)\}_{j=1}^\infty \in \mathcal{B}_\sigma(L^p)$ を用いて

$$f = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j A_j \tag{2.2}$$

と表すことができるもの全体を $H_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)$ とする．ここで，(2.2) はほとんどいたるところ収束である．この f に対して，f のノルムを

$$\|f\|_{H_\sigma(L^p)} = \inf \left\{ \sum_{k=1}^\infty |\lambda_k| : \{\lambda_j\}_{j=1}^\infty \in \ell^1(\mathbb{N}), \quad \{(A_j, r_j)\}_{j=1}^\infty \in \mathcal{B}_\sigma(L^p), \quad f = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k A_k \right\}$$

と定める．

定理 2.4. $1 < p < \infty$, $\sigma \geq 0$ とする．

(1) $B_\sigma(L^p)(\mathbb{R}^n)$ の前双対は $H_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)$ である．

(2) $\dot{B}_\sigma(L^p)(\mathbb{R}^n)$ の前双対は $\dot{H}_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)$ である．

証明.

(1) まず、$f \in B_\sigma(L^p)(\mathbb{R}^n)$，$g \in H_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)$ を与える．このとき，$\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty \in \ell^1(\mathbb{N})$ と $\{(A_k, r_k)\}_{k=1}^\infty \in \mathcal{B}_\sigma(L^{p'})$ により $g = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k A_k$ と表されるので，

$$|f(x)g(x)| \le \sum_{k=1}^\infty |\lambda_k f(x) A_k(x)|$$

である．これより，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|\,dx &\le \sum_{k=1}^\infty |\lambda_k| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\chi_{B(r_k)}(x)A_k(x)|\,dx \\ &\le \sum_{k=1}^\infty |\lambda_k| \cdot \|f\chi_{B(r_k)}\|_{L^p}\|A_k\|_{L^{p'}} \\ &\le \sum_{k=1}^\infty |\lambda_k| \cdot r_k^{-\sigma}\|f\chi_{B(r_k)}\|_{L^p} \\ &\le \sum_{k=1}^\infty |\lambda_k| \cdot \|f\|_{B_\sigma(L^p)}\end{aligned}$$

となる．さらに，$H_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)$ ノルムの定義から，任意の $\varepsilon > 0$ をとると，

$$\sum_{k=1}^\infty |\lambda_k| \le (1+\varepsilon)\|g\|_{H_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)}$$

を満たすような分解 $f = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k A_k$ が存在するので，

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|dx \le (1+\varepsilon)\|f\|_{B_\sigma(L^p)} \cdot \|g\|_{H_\sigma(L^{p'})} < \infty$$

となる．よって $f \cdot g \in L^1$ である．従って，$f \in B_\sigma(L^p)(\mathbb{R}^n)$ に対し、有界線形汎関数 $L_f : H_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ を

$$L_f(g) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx, \quad g \in H_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)$$

と定義できる．また，ε は任意だったので，$\varepsilon \to 0$ として，

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)g(x)|dx \le \|f\|_{B_\sigma(L^p)} \cdot \|g\|_{H_\sigma(L^{p'})}.$$

これより，

$$\begin{aligned}\|L_f\|_{(H_\sigma(L^{p'}))^*} &= \sup_{g\neq 0} \frac{|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx|}{\|g\|_{H_\sigma(L^{p'})}} \\ &\le \sup_{g\neq 0} \frac{\|f\|_{B_\sigma(L^p)} \cdot \|g\|_{H_\sigma(L^{p'})}}{\|g\|_{H_\sigma(L^{p'})}} \\ &= \|f\|_{B_\sigma(L^p)}\end{aligned}$$

であるので，

$$\|L_f\|_{(H_\sigma(L^{p'}))^*} \le \|f\|_{B_\sigma(L^p)} \tag{2.3}$$

が得られる．

次に，有界線形汎関数 $L : H_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ を与える．各 $r > 1$ に対して，$\lambda_1 = \|g\|_{L^{p'}}$，$A_1 = \dfrac{r^{-\sigma}\chi_{B(r)}g}{\|g\|_{L^{p'}}}$ とすると，$\mathrm{supp}(A_1) \subset B(r)$ であり，また，

$\|A_1\|_{L^{p'}} = \dfrac{\|r^{-\sigma}\chi_{B(r)}g\|_{L^{p'}}}{\|g\|_{L^{p'}}} \le r^{-\sigma}$ より，A_1 は (p', σ, r)-アトムである．ここで，$\lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = 0$，$A_2 = A_3 = \cdots = 0$ とすると，

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k A_k = r^{-\sigma}\chi_{B(r)}g \in H_\sigma(L^{p'})$$

となる．このとき，

$$\|r^{-\sigma}\chi_{B(r)}g\|_{H_\sigma(L^{p'})} \le \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| = \|g\|_{L^{p'}}$$

であるので，$L_r : L^{p'} \to \mathbb{C}$ を $L_r(g) = L(r^{-\sigma}\chi_{B(r)}g)$ とすると，各 $r > 1$ に対して $f_r \in L^p(\mathbb{R}^n)$ が存在して，$L_r(g) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f_r(x)g(x)\,dx$ とできる．ここで，

$$\begin{aligned}
\|L_r\|_{(L^{p'}(\mathbb{R}^n))^*} &= \sup_{g\neq 0} \frac{|L(r^{-\sigma}\chi_{B(r)}g)|}{\|g\|_{L^{p'}}} \\
&\le \sup_{g\neq 0} \frac{\|L\|_{(H_\sigma(L^{p'}))^*}\|r^{-\sigma}\chi_{B(r)}g\|_{H_\sigma(L^{p'})}}{\|g\|_{L^{p'}}} \\
&\le \sup_{g\neq 0} \frac{\|L\|_{(H_\sigma(L^{p'}))^*}\|g\|_{L^{p'}}}{\|g\|_{L^{p'}}} \\
&= \|L\|_{(H_\sigma(L^{p'}))^*}
\end{aligned}$$

が得られる．さらに，$\|f_r\|_{L^p} = \|L_r\|_{(L^{p'}(\mathbb{R}^n))^*}$ より，$\|f_r\|_{L^p} \le \|L\|_{(H_\sigma(L^{p'}))^*}$ が得られる．

$r_1 < r_2$ とすると，$L(\chi_{B(r)}g) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} r^\sigma f_r(x)g(x)dx$ であるので，

$$\begin{aligned}
r_1^\sigma \int_{\mathbb{R}^n} f_{r_1}(x)\chi_{B(r_1)}(x)g(x)\,dx = L(\chi_{B(r_1)}g) &= L(\chi_{B(r_2)}g) \\
&= r_2^\sigma \int_{\mathbb{R}^n} f_{r_2}(x)\chi_{B(r_1)}(x)\chi_{B(r_2)}(x)g(x)\,dx \\
&= r_2^\sigma \int_{\mathbb{R}^n} f_{r_2}(x)\chi_{B(r_1)}(x)g(x)\,dx.
\end{aligned}$$

よってほとんどすべての $x \in B(r_1)$ に対して，$r_1^\sigma f_{r_1} = r_2^\sigma f_{r_2}$ であるので，

$$f(x) = r^\sigma f_r(x), \quad x \in B(r)$$

とできる．以上より，

$$r^{-\sigma}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_r(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

よって $f \in B_\sigma(L^p)$ であり，$\|f\|_{B_\sigma(L^p)} \le \|L\|_{(H_\sigma(L^{p'}))^*}$ となる．また，

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_r(x)g(x)\,dx = r^{-\sigma}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\chi_{B(r)}(x)g(x)\,dx = r^{-\sigma}L_f(\chi_{B(r)}g)$$

であり，一方，

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_r(x)g(x)\,dx = L(r^{-\sigma}\chi_{B(r)}g) = r^{-\sigma}L(\chi_{B(r)}g)$$

であるので，$L = L_f$ が得られる．従って，

$$\|f\|_{B_\sigma(L^p)} \le \|L_f\|_{(H_\sigma(L^{p'}))^*} \tag{2.4}$$

が得られる．(2.3)，(2.4) より，

$$\|f\|_{B_\sigma(L^p)} = \|L_f\|_{(H_\sigma(L^{p'}))^*}$$

が成り立つので，$B_\sigma(L^p)$ の前双対は $H_\sigma(L^{p'})$ である．

(2) $f \in \dot{B}_\sigma(L^p)(\mathbb{R}^n)$，$g \in \dot{H}_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)$ を与え，$\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty \in \ell^1(\mathbb{N})$ と $\{(A_k, r_k)\}_{k=1}^\infty \in \dot{\mathcal{B}}_\sigma(L^{p'})$ により $g = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k A_k$ と表すことで，(1) と同様の方法で $L_f : \dot{H}_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ を $L_f(g) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx$ と定義することができて，

$$\|L_f\|_{(\dot{H}_\sigma(L^{p'}))^*} \le \|f\|_{\dot{B}_\sigma(L^p)}$$

が得られる．次に，$L : \dot{H}_\sigma(L^{p'}) \to \mathbb{C}$ を与える．$H_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{H}_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)$ であるので，$L \in (H_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n))^*$ とみなせる．従って (1) より，$\|f\|_{\dot{B}_\sigma(L^p)} \le \|L_f\|_{(\dot{H}_\sigma(L^{p'}))^*}$ が得られるので，

$$\|L_f\|_{(\dot{H}_\sigma(L^{p'}))^*} = \|f\|_{\dot{B}_\sigma(L^p)}$$

が成り立つ．

□

命題 2.5. $1 < p < \infty, \sigma \ge 0$ とする．

(1) $f \in H_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)$ がある $r > 1$ に対して，ほとんどいたるところ

$$\mathrm{supp} f \subset B(r) \tag{2.5}$$

を満たしているとすると，有限個の実数列 $\{\lambda_k\}_{k=1}^K$ とその数列と同じ長さの部分族 $\{(A_k, r_k)\}_{k=1}^K \subset \mathcal{B}_\sigma(L^p)$ を用いて

$$f = \sum_{k=1}^K \lambda_k A_k$$

と表すことができ，さらに，

$$\sum_{k=1}^K |\lambda_k| \le 2^{1+\sigma} \|f\|_{H_\sigma(L^{p'})}$$

が成り立つ．

(2) $f \in \dot{H}_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)$ がある $r > 1$ に対して，ほとんどいたるところ

$$\mathrm{supp} f \subset B(r) \setminus B(r^{-1}) \tag{2.6}$$

を満たしているとすると，有限個の実数列 $\{\lambda_k\}_{k=1}^K$ とその数列と同じ長さの部分族 $\{(A_k, r_k)\}_{k=1}^K \subset \dot{\mathcal{B}}_\sigma(L^p)$ を用いて

$$f = \sum_{k=1}^K \lambda_k A_k$$

と表すことができ，さらに，

$$\sum_{k=1}^K |\lambda_k| \le 2^{1+\sigma} \|f\|_{H_\sigma(L^{p'})}$$

が成り立つ．

証明.

(1) $f \in H_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)$ より，$\{\lambda_j^*\}_{j=1}^\infty \in \ell^1(\mathbb{N})$ と $\{(A_k^*, r_k^*)\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}_\sigma(L^p)$ を用いて $f = \displaystyle\sum_{j=1}^\infty \lambda_j^* A_j^*$ と分解できる。(2.5) より，

$$f = \chi_{B(r)} f = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j^* \chi_{B(r)} A_j^*$$

が成り立つ．このとき，$r \le r_j^*$ ならば $(\chi_{B(r)} A_j^*, r) \in \mathcal{B}_\sigma(L^p)$ であるので，$r_j^* \le r$ と仮定してよい．ここで，$r < 2^K$ となるような自然数 K をとると，

$$f = \sum_{k=1}^K \left(\sum_{j:2^{k-1} \le r_j^* < 2^k} \lambda_j^* \chi_{B(r)} A_j^* \right)$$

と書ける．さらに，

$$\Lambda_k \equiv \sum_{j:2^{k-1} \le r_j^* < 2^k} |\lambda_j^*|$$

$$\mathfrak{A}_k \equiv \begin{cases} 0 & (\Lambda_k = 0) \\ \dfrac{1}{2^\sigma \Lambda_k} \displaystyle\sum_{j:2^{k-1} \le r_j^* < 2^k} \lambda_j^* \chi_{B(r)} A_j^* & (\Lambda_k \ne 0) \end{cases}$$

とおく．$\Lambda_k \ne 0$ であるとすると，

$$\mathrm{supp}(\mathfrak{A}_k) \subset B(2^k)$$

であり，また，

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{A}_k\|_{L^{p'}} &\le \frac{1}{2^\sigma |\Lambda_k|} \sum_{j:2^{k-1} \le r_j^* < 2^k} |\lambda_j^*| \cdot \|\chi_{B(r)} A_j^*\|_{Lp'} \\ &\le \frac{1}{2^\sigma |\Lambda_k|} \sum_{j:2^{k-1} \le r_j^* < 2^k} |\lambda_j^*| r_j^{*-\sigma} \\ &\le \frac{1}{(2^\sigma |\Lambda_k|)} \cdot \frac{1}{(2^{k-1})^\sigma} \cdot \Lambda_k \\ &= \frac{1}{(2^k)^\sigma} \end{aligned}$$

より $\|\mathfrak{A}_k\|_{L^{p'}} \le (2^k)^{-\sigma}$ であるので，$\mathfrak{A}_k$ は $(p', \sigma, 2^k)$ アトムである．従って，$\lambda_k = 2^\sigma \Lambda_k$, $A_k = \mathfrak{A}_k$, $r_k = 2^k$ に対して $\{\lambda_k\}_{k=1}^K$, $\{(A_k, r_k)\}_{k=1}^K \subset \mathcal{B}_\sigma(L^p)$ による分解 $f = \displaystyle\sum_{k=1}^K \lambda_k A_k$ が得られる．さらに，$\|f\|_{H_\sigma(L^{p'})}$ の定義より，

$$\sum_{k=1}^\infty |\lambda_j^*| \le 2\|f\|_{H_\sigma(L^{p'})}$$

が成り立つようにできるので，

$$\sum_{k=1}^K |\lambda_k| = 2^\sigma \sum_{k=1}^K |\Lambda_k| = 2^\sigma \sum_{j=1}^\infty |\lambda_j^*| \le 2^{1+\sigma} \|f\|_{H_\sigma(L^{p'})}$$

が得られた．

(2) $f \in \dot{H}_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)$ より，$\{\lambda_j^*\}_{j=1}^\infty \in \ell^1(\mathbb{N})$ と $\{(A_k^*, r_k^*)\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \dot{\mathcal{B}}_\sigma(L^p)$ を用いて $f = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j^* A_j^*$ と分解できる。(2.6) より，

$$f = \chi_{\{r^{-1}\le|x|\le r\}} f = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j^* \chi_{\{r^{-1}\le|x|\le r\}} A_j^*$$

が成り立つ．このとき，$r_j^* \le r^{-1}$ ならば $\chi_{\{r^{-1}\le|x|\le r\}} A_j^* = 0$ であるので，$r^{-1} \le r_j^*$ と仮定してよい．また，$r \le r_j^*$ ならば $(\chi_{\{r^{-1}\le|x|\le r\}} A_j^*, r) = (\chi_{\{r^{-1}\le|x|\le r\}} A_j^*, r_j^*) \in \mathcal{B}_\sigma(L^p)$ であるので，$r_j^* \le r$ と仮定してよい．よってこれらより，$r^{-1} \le r_j^* \le r$ と仮定する．ここで，$r^2 < 2^K$ となるような自然数 K をとると，

$$f = \sum_{k=1}^K \left(\sum_{j:2^{k-1}r^{-1}\le r_j^* < 2^k r^{-1}} \lambda_j^* \chi_{\{r^{-1}\le|x|\le r\}} A_j^* \right)$$

である．さらに，

$$\Lambda_k \equiv \sum_{j:2^{k-1}r^{-1}\le r_j^* < 2^k r^{-1}} |\lambda_j^*|$$

$$\mathfrak{A}_k \equiv \begin{cases} 0 & (\Lambda_k = 0) \\ \dfrac{1}{2^\sigma \Lambda_k} \displaystyle\sum_{j:2^{k-1}r^{-1}\le r_j^* < 2^k r^{-1}} \lambda_j^* \chi_{\{r^{-1}\le|x|\le r\}} A_j^* & (\Lambda_k \neq 0) \end{cases}$$

とおく．$\Lambda_k \neq 0$ のとき，

$$\mathrm{supp}(\mathfrak{A}_k) \subset B(2^k r^{-1})$$

であり，また

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{A}_k\|_{L^{p'}} &\le \frac{1}{2^\sigma|\Lambda_k|} \sum_{j:2^{k-1}r^{-1}\le r_j^* < 2^k r^{-1}} |\lambda_j^*| \cdot \|\chi_{\{r^{-1}\le|x|\le r\}} A_j^*\|_{L^{p'}} \\ &\le \frac{1}{2^\sigma|\Lambda_k|} \sum_{j:2^{k-1}r^{-1}\le r_j^* < 2^k r^{-1} k} |\lambda_j^*| r_j^{*-\sigma} \\ &\le \frac{1}{(2^\sigma|\Lambda_k|)} \cdot \frac{1}{(2^{k-1}r^{-1})^\sigma} \cdot \Lambda_k \\ &= \frac{1}{(2^k r^{-1})^\sigma} \end{aligned}$$

より $\|\mathfrak{A}_k\|_{L^{p'}} \le (2^k r^{-1})^{-\sigma}$ であるので，$\mathfrak{A}_k$ は $(p', \sigma, 2^k r^{-1})$ アトムである．従って，$\lambda_k = 2^\sigma \Lambda_k$, $\quad A_k = \mathfrak{A}_k$, $\quad r_k = 2^k r^{-1}$ に対して $\{\lambda_k\}_{k=1}^K$, $\{(A_k, r_k)\}_{k=1}^K \subset \dot{\mathcal{B}}_\sigma(L^p)$ による分解 $f = \sum_{k=1}^K \lambda_k A_k$ が得られる．さらに，$\|f\|_{\dot{H}_\sigma(L^{p'})}$ の定義より，

$$\sum_{k=1}^\infty |\lambda_j^*| \le 2\|f\|_{\dot{H}_\sigma(L^{p'})}$$

が成り立つようにできるので，

$$\sum_{k=1}^K |\lambda_k| = 2^\sigma \sum_{k=1}^K |\Lambda_k| = 2^\sigma \sum_{j=1}^\infty |\lambda_j^*| \le 2^{1+\sigma}\|f\|_{\dot{H}_\sigma(L^{p'})}$$

が得られた．

□

定義 2.6.

(1) ある $r>1$ が存在して，(2.5) を満たすような $H_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)$ 関数全体のなす線形空間を $\mathcal{H}_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)$ 空間とする．
(2) ある $r>0$ が存在して，(2.6) を満たすような $\dot{H}_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)$ 関数全体のなす線形空間を $\dot{\mathcal{H}}_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)$ 空間とする．

命題 2.7. $1<p<\infty$, $\sigma\ge 0$ とする．

(1) $\mathcal{H}_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)$ は $H_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)$ において稠密である．
(2) $\dot{\mathcal{H}}_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)$ は $\dot{H}_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)$ において稠密である．

証明.

(1) $f\in H_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)$ とすると，$\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty\in\ell^1(\mathbb{N})$ と $\{(A_j,r_j)\}_{j=1}^\infty\subset\mathcal{B}_\sigma(L^p)$ が存在して，$f=\displaystyle\sum_{j=1}^\infty\lambda_jA_j$ と分解できる．このとき，$H_\sigma(L^{p'})$ ノルムの定義より，

$$\begin{aligned}\left\|f-\sum_{j=1}^J\lambda_jA_j\right\|_{H_\sigma(L^{p'})}&=\left\|\sum_{j=J+1}^\infty\lambda_jA_j\right\|_{H_\sigma(L^{p'})}\\&\le\sum_{j=J+1}^\infty|\lambda_j|\to 0\quad(J\to\infty)\end{aligned}$$

であるから，

$$\lim_{J\to\infty}\sum_{j=1}^J\lambda_jA_j=f$$

が成り立つ．よって $\mathcal{H}_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)$ は $H_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)$ において稠密である．

(2) $f\in\dot{H}_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)$ とすると，$\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty\in\ell^1(\mathbb{N})$ と $\{(A_j,r_j)\}_{j=1}^\infty\subset\dot{\mathcal{B}}_\sigma(L^p)$ が存在して，$f=\displaystyle\sum_{j=1}^\infty\lambda_jA_j$ と分解でき，(1) と同様の方法で $\displaystyle\lim_{J\to\infty}\sum_{j=1}^J\lambda_jA_j=f$ が得られる．また，

$$\lim_{r\to\infty}\|A_j-\chi_{\{r^{-1}\le|x|\le r\}}A_j\|_{L^{p'}}=\left(\int_{\mathbb{R}^n}\lim_{r\to\infty}|A_j(x)-\chi_{\{r^{-1}\le|x|\le r\}}(x)A_j(x)|^{p'}dx\right)^{1/p'}=0$$

となることから，$L^{p'}$ の位相で，$\chi_{\{r^{-1}\le|x|\le r\}}A_j\to A_j\quad(r\to\infty)$ である．さらに，

$$\begin{aligned}\|A_j-\chi_{\{r^{-1}\le|x|\le r\}}A_j\|_{\dot{H}_\sigma(L^{p'})}&=\|r_j^\sigma(A_j-\chi_{\{r^{-1}\le|x|\le r\}}A_j)\|_{L^{p'}}\\&\quad\times\left\|\frac{A_j-\chi_{\{r^{-1}\le|x|\le r\}}}{\|r_j^\sigma(A_j-\chi_{\{r^{-1}\le|x|\le r\}}A_j)\|_{L^{p'}}}\right\|_{\dot{H}_\sigma(L^{p'})}\\&\le\|r_j^\sigma(A_j-\chi_{\{r^{-1}\le|x|\le r\}}A_j)\|_{L^{p'}}\\&\to 0\quad(r\to\infty)\end{aligned}$$

となる．以上より，$\displaystyle\lim_{J\to\infty}\lim_{r\to\infty}\sum_{j=1}^J\lambda_j\chi_{\{r^{-1}\le|x|\le r\}}A_j=\sum_{j=1}^\infty\lambda_jA_j=f$ が成り立つ．よって $\dot{\mathcal{H}}_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)$ は $\dot{H}_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)$ において稠密である．

□

補題 2.8.

(1) $1 < p < \infty, \sigma \geq 0$ とするとき，$H_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ．
(2) $1 < p < \infty, 0 \leq \sigma \leq n/p$ とするとき，$\dot{H}_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^1(\mathbb{R}^n) + L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ．

証明.

(1) $f \in H_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)$ とし，$\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty \in \ell^1(\mathbb{N})$ と $\{(A_j, r_j)\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{B}_\sigma(L^p)$ により $f = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j A_j$ と表されているとする．このとき，$r_j > 1$ より，$\|A_j\|_{L^{p'}} \leq r_j^{-\sigma} < 1$ であるので，

$$\|f\|_{L^{p'}} \leq \sum_{j=1}^\infty |\lambda_j| \cdot \|A_j\|_{L^{p'}} < \sum_{j=1}^\infty |\lambda_j| < \infty$$

となる．よって $H_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ．

(2) $f \in \dot{H}_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)$ とすると，(1) と同様に，$r_j \geq 1$ のときは $\|A_j\|_{L^{p'}} \leq 1$ が言えるので，

$$\|f\|_{L^{p'}} \leq \sum_{j=1}^\infty |\lambda_j| \cdot \|A_j\|_{L^{p'}} < \sum_{j=1}^\infty |\lambda_j| < \infty$$

である．$r_j < 1$ のときは，$\sigma \leq n/p$ とすると，

$$\|A_j\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^n} |\chi_{B(r_j)}(x) A_j(x)|\, dx \leq \|\chi_{B(r_j)}\|_{L^p} \cdot \|A_j\|_{L^{p'}} \leq r_j^{n/p} \cdot r_j^{-\sigma} \leq 1$$

より，

$$\|f\|_{L^1} \leq \sum_{j=1}^\infty |\lambda_j| \cdot \|A_j\|_{L^1} \leq \sum_{j=1}^\infty |\lambda_j| < \infty$$

が得られる．よって $\dot{H}_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^1(\mathbb{R}^n) + L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ．

□

定理 2.9. $1 < p < \infty, \sigma \geq 0$ とし，$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots$ を $H_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)$ に属する可測関数の増大列とする．

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|f_k\|_{H_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)} < \infty$$

を仮定し，$f = \lim_{k \to \infty} f_k$ ($\|f\|_{H_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)} = \sup_{k \in \mathbb{N}} \|f_k\|_{H_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)}$) とおくと，$f \in H_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)$ である．これは，$\dot{H}_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)$ も同様の性質を有している．

証明. $f_k \in H_\sigma(L^{p'})$ であるので，M をある自然数として，

$$\sum_{j=1}^\infty |\lambda_{j,k}| \leq 2^\sigma (M+1)$$

を満たす $\{\lambda_{j,k}\}_{j=1}^\infty \in \ell^1(\mathbb{N})$ と $\{(A_{j,k}, 2^j)\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{A}$ を用いて，$f_k = \sum_{j=1}^\infty \lambda_{j,k} A_{j,k}$ と表わされているとする．部分列に移ることで，$\lim_{k \to \infty} \lambda_{j,k} = \lambda_j$ と弱収束の意味での $\lim_{k \to \infty} A_{j,k} = A_j$ が成り立つとしてよい．ここで，$g = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j A_j$ とおく．$B(x, r) \subset B(2^N)$ となるような自然数 N をとると，

$N' \geq N$ のとき，

$$\begin{aligned}
\left|\int_{B(x,r)} g(y)\,dy - \int_{B(x,r)} f_k(y)\,dy\right| &\leq \left|\int_{B(x,r)} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j A_j(y)\,dy - \int_{B(x,r)} \sum_{j=1}^{N'} \lambda_{j,k} A_{j,k}(y)\,dy\right| \\
&\quad + \left|\int_{B(x,r)} \sum_{j=1}^{N'} \lambda_{j,k} A_{j,k}(y)\,dy - \int_{B(x,r)} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{j,k} A_{j,k}(y)\,dy\right| \\
&= \left|\int_{B(x,r)} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j A_j(y)\,dy - \int_{B(x,r)} \sum_{j=1}^{N'} \lambda_{j,k} A_{j,k}(y)\,dy\right| \\
&\quad + \left|\int_{B(x,r)} \sum_{j=N'+1}^{\infty} \lambda_{j,k} A_{j,k}(y)\,dy\right|
\end{aligned}$$

となる．ここで，

$$\begin{aligned}
\left|\int_{B(x,r)} \sum_{j=N'+1}^{\infty} |\lambda_{j,k} A_{j,k}(y)|\,dy\right| &\leq \sum_{j=N'+1}^{\infty} |\lambda_{j,k}| \cdot \|\chi_{B(2^N)}\|_{L^p} \|A_{j,k}\|_{L^{p'}} \\
&\leq \sum_{j=N'+1}^{\infty} |\lambda_{j,k}| \cdot \|\chi_{B(2^N)}\|_{L^p} \cdot 2^{-j\sigma} \\
&\leq 2^{-(N'+2)\sigma} (M+1) \|\chi_{B(2^N)}\|_{L^p}
\end{aligned}$$

となるので，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $2^{-(N'+2)\sigma}(M+1)\|\chi_{B(2^N)}\|_{L^p} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ とすると，

$$\lim_{k\to\infty} \left|\int_{B(x,r)} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j A_j(y)\,dy - \int_{B(x,r)} \sum_{j=1}^{N'} \lambda_{j,k} A_{j,k}(y)\,dy\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

であるので，

$$\left|\int_{B(x,r)} g(y)\,dy - \int_{B(x,r)} f_k(y)\,dy\right| < \varepsilon$$

が得られる．従って，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} \int_{B(x,r)} f_k(y)\,dy = \int_{B(x,r)} g(y)\,dy$ ，すなわち

$$\int_{B(x,r)} f(y)\,dy = \int_{B(x,r)} g(y)\,dy$$

が得られる．よってルベーグの微分定理により $f = g = \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j A_j$ となる． □

2.3. $B_\sigma(L^p)(\mathbb{R}^n)$ 空間の前双対におけるハーディー・リトルウッドの極大作用素の有界性.

定理 2.10. $1 < p < \infty, 0 \leq \sigma < n/p$ とする．

(1) M は $H_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)$ で有界である．
(2) M は $\dot{H}_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)$ で有界である．

2.4. $B_\sigma(L^p)(\mathbb{R}^n)$ **空間の前双対における特異積分作用素の有界性.**

定理 2.11. $1 < p < \infty, 0 \le \sigma < n/p$ とする．T は $\dot{H}_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)$ において有界な線形作用素に拡張される．また同様に，$H_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)$ において有界な線形作用素に拡張される．

証明. 一般に a を (p', σ, R) アトムとすると，不等式

$$\|\chi_{B(2R)}Ta\|_{L^{p'}} \le \|T\|_{L^{p'}\to L^{p'}}\|a\|_{L^{p'}} \le \|T\|_{L^{p'}\to L^{p'}}R^{-\sigma}$$

と

$$\begin{aligned}
\|\chi_{B(2^{k+1}R)\setminus B(2^kR)}Ta\|_{L^{p'}} &\le |B(2^{k+1}R)\setminus B(2^kR)|^{1/p'}\|\chi_{B(2^{k+1}R)\setminus B(2^kR)}Ta\|_{L^\infty} \\
&\le |B(1)|^{1/p'}\{(2^{k+1}R)^n - (2^kR)^n\}^{1/p'}\|\chi_{B(2^{k+1}R)\setminus B(2^kR)}Ta\|_{L^\infty} \\
&= (2^kR)^{n/p'}(2^n-1)^{1/p'}\cdot C'(2^kR)^{-n}\int_{B(R)}|a(x)|\,dx \\
&= C(2^kR)^{-n/p}\int_{\mathbb{R}^n}|\chi_{B(R)}a(x)|\,dx \\
&\le C(2^kR)^{-n/p}R^{-n/p}\|a\|_{L^{p'}} \\
&\le C(2^k)^{-n/p}R^{-\sigma} = C(2^k)^{\sigma-n/p}(2^kR)^{-\sigma}
\end{aligned}$$

が成り立つので，

$$Ta = \chi_{B(2R)}Ta + \sum_{k=1}^{\infty}\chi_{B(2^{k+1}R)\setminus B(2^kR)}Ta$$

と分解することができる．$\sigma < n/p$ のとき $\sigma - n/p < 0$ となるので，このとき，$R > 0$ であれば $Ta \in \dot{H}_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)$，$R > 1$ であれば $Ta \in H_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)$ となる．ここで，$f \in \dot{\mathcal{H}}_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)$ とすると，$\{\lambda_k\}_{k=1}^K \in \ell^1(\mathbb{N})$ と $\{(a_k, r_k)\}_{k=1}^K \subset \mathcal{B}_\sigma(L^p)$ により

$$f = \sum_{k=1}^K \lambda_k a_k, \quad \sum_{k=1}^K |\lambda_k| \le 2^{\sigma+1}\|f\|_{\dot{H}_\sigma(L^{p'})}$$

と分解することができる．これにより，

$$\|Tf\|_{\dot{H}_\sigma(L^{p'})} \le \sum_{k=1}^K |\lambda_k|\cdot\|Ta_k\|_{\dot{H}_\sigma(L^{p'})} \le C\cdot 2^{\sigma+1}\|f\|_{\dot{H}_\sigma(L^{p'})}$$

が得られる．また，$f \in \mathcal{H}_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)$ とすると同様に，

$$\|Tf\|_{H_\sigma(L^{p'})} \le C\cdot 2^{\sigma+1}\|f\|_{H_\sigma(L^{p'})}$$

が得られる．従って稠密性から，T は $\dot{H}_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)$ および $H_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)$ において有界な線形作用素である． □

2.5. $B_\sigma(L^p)(\mathbb{R}^n)$ **空間の前双対における分数冪積分作用素の有界性.** 次の定理を引用する．

定理 2.12 (定理８). $0 \le \alpha < n$, $\sigma \in [0, \infty)$, $p, q \in (1, \infty)$ に対して，

$$-\frac{n}{q} = -\frac{n}{p} + \alpha, \quad \sigma - \frac{n}{p} + \alpha < 0$$

が成り立っているとする．このとき，

(1) I_α は $B_\sigma(L^p)(\mathbb{R}^n)$ から $B_\sigma(L^q)(\mathbb{R}^n)$ への有界作用素である．
(2) I_α は $\dot{B}_\sigma(L^p)(\mathbb{R}^n)$ から $\dot{B}_\sigma(L^q)(\mathbb{R}^n)$ への有界作用素である．

定理 2.13. 定理 2.12 と同じパラメータの条件下で，次のことが言える．

(1) I_α は $H_\sigma(L^{q'})(\mathbb{R}^n)$ から $H_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)$ への有界作用素である．

(2) I_α は $\dot{H}_\sigma(L^{q'})(\mathbb{R}^n)$ から $\dot{H}_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)$ への有界作用素である．

証明.

(1) $C>0$ が存在して

$$\|I_\alpha f\|_{H_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)} \le C\|f\|_{H_\sigma(L^{q'})}$$

が成り立つことを示せばよい．$I_\alpha f$ の定義より $\|I_\alpha f\|_{H_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)} \le \|I_\alpha[|f|]\|_{H_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)}$ であり，$H_\sigma(L^{q'})$ ノルムの定義より $\|f\|_{H_\sigma(L^{q'})} = \|\,|f|\,\|_{H_\sigma(L^{q'})}$ が成り立つので，$f\ge 0$ と仮定してよい．このとき，

$$I_{\alpha,R}f(x) = \int_{R^{-1}\le|x-y|\le R} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy$$

と定めるとき，$I_{\alpha,R}f \uparrow I_\alpha f$ であるので，$R>0$ をとめて，R によらない一様な評価

$$\|I_{\alpha,R}f\|_{H_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)} \le C\|f\|_{H_\sigma(L^{q'})}$$

を示せばよい．また，$f_N = \chi_{\{|f|\le N\}\cap B(N)}f$ と定めると，定理 2.9 より，

$$\|I_{\alpha,R}f_N\|_{H_\sigma(L^{q'})} \uparrow \|I_{\alpha,R}f\|_{H_\sigma(L^{q'})}$$

であるので，$f\in L^\infty_{\rm comp}(\mathbb{R}^n)$ としてよい．このとき，$I_{\alpha,R}f\in L^\infty_{\rm comp}(\mathbb{R}^n)\subset H_\sigma(L^{p'})(\mathbb{R}^n)$ である．従って，

$$\begin{aligned}
\|I_{\alpha,R}f\|_{H_\sigma(L^{p'})} &= \sup_{g\in L^\infty_{\rm comp}(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}} \frac{1}{\|g\|_{B_\sigma(L^p)}}\left|\int_{\mathbb{R}^n} I_{\alpha,R}f(x)g(x)\,dx\right| \\
&= \sup_{g\in L^\infty_{\rm comp}(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}} \frac{1}{\|g\|_{B_\sigma(L^p)}}\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)I_{\alpha,R}g(x)\,dx\right| \\
&\le \sup_{g\in L^\infty_{\rm comp}(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}} \frac{1}{\|g\|_{B_\sigma(L^p)}}\|f\|_{H_\sigma(L^{q'})}\|I_{\alpha,R}g\|_{B_\sigma(L^q)} \\
&\le \sup_{g\in L^\infty_{\rm comp}(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}} \frac{1}{\|g\|_{B_\sigma(L^p)}}\|f\|_{H_\sigma(L^{q'})}\|I_\alpha g\|_{B_\sigma(L^q)}
\end{aligned}$$

が得られる．ここで，定理 2.12(1) より，

$$\begin{aligned}
\|I_{\alpha,R}f\|_{H_\sigma(L^{p'})} &\le \sup_{g\in L^\infty_{\rm comp}(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}} \frac{1}{\|g\|_{B_\sigma(L^p)}}\|f\|_{H_\sigma(L^{q'})}\cdot C\|g\|_{B_\sigma(L^p)} \\
&\le C\|f\|_{H_\sigma(L^{q'})}
\end{aligned}$$

が得られた．

(2) (1) と同様の方法で，定理 2.12(2) より

$$\|I_{\alpha,R}f\|_{\dot{H}_\sigma(L^{p'})} \le C\|f\|_{\dot{H}_\sigma(L^{q'})}$$

が得られる．

□

3. $B_\sigma(\mathcal{M}^p_q)(\mathbb{R}^n)$ 空間

3.1. $B_\sigma(\mathcal{M}^p_q)(\mathbb{R}^n)$ 空間.

定義 3.1. $1<q\le p<\infty, \sigma\ge 0$ とする．可測関数 f 全体で，

$$\begin{aligned}\|f\|_{B_\sigma(\mathcal{M}^p_q)} &\equiv \sup_{r>1}\frac{1}{r^\sigma}\|f\chi_{Q(r)}\|_{\mathcal{M}^p_q}\\ &=\sup_{r>1}\sup_{Q\in\mathcal{Q}}\frac{1}{r^\sigma}|Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f\chi_{Q(r)\cap Q}\|_{L^q}\end{aligned}$$

が有限なもの全体のなす空間を，$B_\sigma(\mathcal{M}^p_q)(\mathbb{R}^n)$ 空間と定義する．

3.2. $B_\sigma(\mathcal{M}^p_q)(\mathbb{R}^n)$ **空間の前双対．**

定義 3.2. $1<q\le p<\infty, \sigma\ge 0$ とする．$r>1$ とし，Q を立方体とする．$L^{q'}$ 関数 B が $\mathrm{supp}B\subset Q(r)\cap Q$ かつ $\|B\|_{L^{q'}}\le r^{-\sigma}|Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$ を満たすとき，B を (p',q',σ,r) ブロックとする．また，Q と r を強調したいときは，B は $(p',q',\sigma;Q,r)$ ブロックであると表す．

定義 3.3. $1<q\le p<\infty, \sigma\ge 0$ とする．可測関数 f 全体で，$\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty\in\ell^1(\mathbb{N})$ と (p',q',σ,r) ブロックの列 $\{B_j\}_{j=1}^\infty$ を用いて

$$f=\sum_{j=1}^\infty\lambda_jB_j \tag{3.1}$$

と表すことができるもの全体を $H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})(\mathbb{R}^n)$ とする．ここで，(3.1) はほとんどいたるところ収束である．この f に対して，f のノルムを

$$\|f\|_{H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})}=\inf\left\{\sum_{j=1}^\infty|\lambda_j| : \{\lambda_j\}_{j=1}^\infty\in\ell^1(\mathbb{N}), \{B_j\}_{j=1}^\infty \text{は } (p',q',\sigma,r) \text{ ブロック}, f=\sum_{j=1}^\infty\lambda_jB_j\right\}$$

と定める．

定理 3.4. $1<q\le p<\infty$, $\sigma\ge 0$ とする．$B_\sigma(\mathcal{M}^p_q)(\mathbb{R}^n)$ の前双対は $H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})(\mathbb{R}^n)$ である．

証明． まず、$f\in B_\sigma(\mathcal{M}^p_q)(\mathbb{R}^n)$，$g\in H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})(\mathbb{R}^n)$ を与える．このとき，$\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty\in\ell^1(\mathbb{N})$ と (p',q',σ,r_j) ブロックの列 $\{B_j\}_{j=1}^\infty$ により $g=\sum_{j=1}^\infty\lambda_jA_j$ と分解することができるので，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)g(x)|\,dx &\le\sum_{j=1}^\infty|\lambda_j|\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)\chi_{Q(r_j)\cap Q_j}(x)B_j(x)|\,dx\\ &\le\sum_{j=1}^\infty|\lambda_j|\left(\int_{Q(r_j)\cap Q_j}|f(x)|^q\,dx\right)^{1/q}\|B_j\|_{L^{q'}}\\ &\le\sum_{j=1}^\infty|\lambda_j|\left(\int_{Q(r_j)\cap Q_j}|f(x)|^q\,dx\right)^{1/q}r^{-\sigma}|Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\\ &\le\sum_{j=1}^\infty|\lambda_j|\cdot\|f\|_{B_\sigma(\mathcal{M}^p_q)}\end{aligned}$$

となる．さらに，$H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})(\mathbb{R}^n)$ ノルムの定義から，任意の $\varepsilon>0$ をとると，

$$\sum_{j=1}^\infty|\lambda_j|\le(1+\varepsilon)\|g\|_{H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})(\mathbb{R}^n)}$$

を満たすような分解 $f=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j B_j$ が存在するので，

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)g(x)|\,dx \le (1+\varepsilon)\|f\|_{B_\sigma(\mathcal{M}^p_q)}\cdot\|g\|_{H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})}<\infty$$

となる．よって $f\cdot g\in L^1$ である．従って，$f\in B_\sigma(\mathcal{M}^p_q)(\mathbb{R}^n)$ に対し、有界線形汎関数 L_f : $H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})(\mathbb{R}^n)\longrightarrow\mathbb{C}$ を

$$L_f(g)=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)g(x)\,dx,\quad g\in H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})(\mathbb{R}^n)$$

と定義できる．また，ε は任意だったので，$\varepsilon\to 0$ として，

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)g(x)|\,dx\le\|f\|_{B_\sigma(\mathcal{M}^p_q)}\cdot\|g\|_{H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})}$$

が得られる．これより，

$$\|L_f\|_{(H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'}))^*}=\sup_{g\neq 0}\frac{|\int_{\mathbb{R}^n}f(x)g(x)\,dx|}{\|g\|_{H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})}}\le\sup_{g\neq 0}\frac{\|f\|_{B_\sigma(\mathcal{M}^p_q)}\cdot\|g\|_{H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})}}{\|g\|_{H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})}}=\|f\|_{B_\sigma(\mathcal{M}^p_q)}$$

であるので，

$$\|L_f\|_{(H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'}))^*}\le\|f\|_{B_\sigma(\mathcal{M}^p_q)} \tag{3.2}$$

が得られる．次に，有界線形汎関数 $L:H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})(\mathbb{R}^n)\longrightarrow\mathbb{C}$ を与える．各立方体 Q および $r>1$ に対して，$\lambda_1=\|g\|_{L^{q'}}$，$B_1=\dfrac{r^{-\sigma}\cdot|Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\chi_{Q(r)\cap Q}g}{\|g\|_{L^{q'}}}$ とすると，$\mathrm{supp}(B_1)\subset Q(r)\cap Q$ であり，また，$\|B_1\|_{L^{q'}}=r^{-\sigma}\cdot|Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\chi_{Q(r)\cap Q}g$ であるので，B_1 は (p',q',σ,r) ブロックである．ここで，$\lambda_2=\lambda_3=\cdots=0$，$A_2=A_3=\cdots=0$ とすると，

$$\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_jB_j=r^{-\sigma}\cdot|Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\chi_{Q(r)\cap Q}g\in H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})$$

となる．このとき，

$$\|r^{-\sigma}\cdot|Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\chi_{Q(r)\cap Q}g\|_{H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})}\le\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j|=\|g\|_{L^{q'}}$$

であるので，$L_{r,Q}:L^{q'}\to\mathbb{C}$ を $L_{r,Q}(g)=L(r^{-\sigma}\cdot|Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\chi_{Q(r)\cap Q}g)$ とすると，各立方体 Q および $r>1$ に対して $f_{r,Q}\in L^q(\mathbb{R}^n)$ が存在して，$L_{r,Q}(g)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}f_{r,Q}(x)g(x)\,dx$ とできる．このとき，$L_{r,Q}$ の作用素ノルムは，

$$\begin{aligned}\|L_{r,Q}\|_{(L^{q'}(\mathbb{R}^n))^*}&=\sup_{g\neq 0}\frac{|L(r^{-\sigma}\cdot|Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\chi_{Q(r)\cap Q}g)|}{\|g\|_{L^{q'}}}\\&\le\sup_{g\neq 0}\frac{\|L\|_{(H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'}))^*}\|r^{-\sigma}\cdot|Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\chi_{Q(r)\cap Q}g\|_{H_\sigma(L^{q'})}}{\|g\|_{L^{q'}}}\\&\le\sup_{g\neq 0}\frac{\|L\|_{(H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'}))^*}\|g\|_{L^{q'}}}{\|g\|_{L^{q'}}}\\&=\|L\|_{(H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'}))^*}\end{aligned}$$

が得られ，さらに $\|f_{r,Q}\|_{L^q} = \|L_{r,Q}\|_{(L^{q'}(\mathbb{R}^n))^*}$ より，$\|f_{r,Q}\|_{L^q} \leq \|L\|_{(H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'}))^*}$ が得られる．
$L(\chi_{Q(r)\cap Q}g) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} r^\sigma \cdot |Q|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} f_{r,Q}(x)g(x)\,dx$ であるので，$r_1 < r_2$ かつ $Q_1 \subset Q_2$ とすると，

$$\begin{aligned}
&r_1^\sigma \cdot |Q_1|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \int_{\mathbb{R}^n} f_{r_1,Q_1}(x)\chi_{Q(r_1)\cap Q_1}(x)g(x)\,dx = L(\chi_{Q(r_1)\cap Q_1}g)\\
&= L(\chi_{Q(r_2)\cap Q_2}g)\\
&= r_2^\sigma \cdot |Q_2|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \int_{\mathbb{R}^n} f_{r_2,Q_2}(x)\chi_{Q(r_1)\cap Q_1}(x)\chi_{Q(r_2)\cap Q_2}(x)g(x)\,dx\\
&= r_2^\sigma \cdot |Q_2|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \int_{\mathbb{R}^n} f_{r_2,Q_2}(x)\chi_{Q(r_1)\cap Q_1}(x)g(x)\,dx
\end{aligned}$$

となるので，ほとんどすべての $x \in Q(r_1)\cap Q_1$ に対して，$r_1^\sigma \cdot |Q_1|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} f_{r_1,Q_1} = r_2^\sigma \cdot |Q_2|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} f_{r_2,Q_2}$ である．よって，

$$f(x) = r^\sigma \cdot |Q|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} f_{r,Q}(x), \quad x \in Q(r)\cap Q$$

とできる．以上より，

$$r^{-\sigma} \cdot |Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\int_{Q(r)\cap Q} |f(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_{Q(r)\cap Q} |f_{r,Q}(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|f_{r,Q}\|_{L^q} < \infty$$

となるので，$f \in B_\sigma(\mathcal{M}^p_q)$ であり，$\|f\|_{B_\sigma(\mathcal{M}^p_q)} \leq \|L\|_{(H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'}))^*}$ が得られる．また，

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_{r,Q}(x)g(x)\,dx = r^{-\sigma} \cdot |Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\chi_{Q(r)\cap Q}(x)g(x)\,dx = r^{-\sigma} \cdot |Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} L_f(\chi_{Q(r)\cap Q}g)$$

であり，一方，

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_{r,Q}(x)g(x)\,dx = L(r^{-\sigma} \cdot |Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \chi_{Q(r)\cap Q}g) = r^{-\sigma} \cdot |Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} L(\chi_{Q(r)\cap Q}g)$$

であるので，$L = L_f$ が得られる．従って，

$$\|f\|_{B_\sigma(\mathcal{M}^p_q)} \leq \|L_f\|_{(H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'}))^*} \tag{3.3}$$

が得られる．(3.2)，(3.3) より，

$$\|f\|_{B_\sigma(\mathcal{M}^p_q)} = \|L_f\|_{(H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'}))^*}$$

が成り立つので，$B_\sigma(\mathcal{M}^p_q)$ の前双対は $H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})$ である． □

命題 3.5. $1 < q \leq p < \infty, \sigma \geq 0$ とする．$f \in H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})(\mathbb{R}^n) \cap L^{q'}$ とし，ある $r > 1$ および立方体 Q に対して，

$$\mathrm{supp} f \subset Q(r)\cap Q \tag{3.4}$$

を満たしているとすると，有限個の数列 $\{\lambda_k\}_{k=1}^K$ とその数列と同じ長さの (p', q', σ, r_k) ブロックの列 $\{B_k\}_{k=1}^K$ を用いて

$$f = \sum_{k=1}^K \lambda_k B_k$$

と表すことができ，さらに，

$$\sum_{k=1}^K |\lambda_k| \leq 3\|f\|_{H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})}$$

が成り立つ．

証明． $f \in H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})(\mathbb{R}^n)$ より，$f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j B_j$，$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \le 2\|f\|_{H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})}$ を満たす複素数列 $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty} \in \ell^1(\mathbb{N})$ と (p', q', σ, r_j) ブロックの列 $\{B_j\}_{j=1}^{\infty}$ が存在する．このとき，$Q(r_j) \cap Q_j \subset Q(r) \cap Q$ と仮定してよい．ここで，$g = \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \cdot |B_j|$ とおくと，$f = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f}{g} |\lambda_j| \cdot |B_j|$ と分解できる．このとき，$f \le g$ であることから，$\|\frac{f}{g} B_j\|_{L^{q'}} \le \|B_j\|_{L^{q'}}$ かつ $\mathrm{supp}(\frac{f}{g} B_j) \subset Q(r_j) \cap Q_j$ である．よって $\frac{f}{g} B_j$ は (p', q', σ, r_j) ブロックとなる．これより，ブロックを B_j から $\frac{f}{g} B_j$ に取り換えて，

$$|f| = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j B_j$$

が成り立つとしてよい．したがってルベーグの収束定理が使えて，$f \in L^{q'}$ より

$$\lim_{K \to \infty} \left\| \sum_{j=K}^{\infty} \lambda_j B_j \right\|_{L^{q'}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \lim_{K \to \infty} \left| \sum_{j=K}^{\infty} \lambda_j B_j(x) \right|^{q'} dx \right)^{1/q'} = 0$$

となる．従って，十分大きい K をとると，(3.4) より $\mathrm{supp} \left(\sum_{j=K}^{\infty} \lambda_j B_j \right) \subset \mathrm{supp}(f) \subset Q(r) \cap Q$ が成り立ち，さらに，

$$\left\| \sum_{j=K}^{\infty} \lambda_j B_j \right\|_{L^{q'}} \le \sum_{j=K}^{\infty} |\lambda_j| \cdot \|B_j\|_{L^{q'}} \le r^{-\sigma} |Q|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \sum_{j=K}^{\infty} |\lambda_j| \le r^{-\sigma} |Q|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_{H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})}$$

となる．よって，

$$C_K = \frac{1}{\|f\|_{H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})}} \sum_{j=K}^{\infty} \lambda_j B_j\,, \quad \rho_K = \|f\|_{H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})}$$

とおけば，C_k は (p', q', σ, r_j) ブロックである．以上より，

$$f = \sum_{j=1}^{K-1} \lambda_j B_j + \sum_{j=K}^{\infty} \lambda_j B_j = \sum_{j=1}^{K-1} \lambda_j B_j + \rho_K C_K$$

が得られ，さらに，

$$\sum_{j=1}^{K-1} |\lambda_j| + |\rho_K| \le 2\|f\|_{H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})} + \|f\|_{H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})} = 3\|f\|_{H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})}$$

が得られる． □

定義 3.6. ある $r > 1$ と立方体 Q が存在して，(3.4) を満たすような $H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})(\mathbb{R}^n) \cap L^{q'}(\mathbb{R}^n)$ 関数全体のなす空間を $\mathcal{H}_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})(\mathbb{R}^n)$ 空間とする．

命題 3.7. $1 < q \le p < \infty$，$\sigma \ge 0$ とする．$\mathcal{H}_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})(\mathbb{R}^n)$ は $H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})(\mathbb{R}^n)$ において稠密である．

証明. $f \in H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})$ とすると，$\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ と (p', q', σ) ブロックの列 $\{B_k\}_{j=1}^\infty$ により $f = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k B_k$ と分解できる．ここで，

$$\left\| f - \sum_{k=1}^K \lambda_k B_k \right\|_{H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})} = \left\| \sum_{k=K+1}^\infty \lambda_k B_k \right\|_{H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})} \le \sum_{k=K+1}^\infty |\lambda_k| \longrightarrow 0 \quad (K \to \infty)$$

であるので，

$$\lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^K \lambda_k B_k = f$$

が得られる．よって $\mathcal{H}_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})(\mathbb{R}^n)$ は $H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})(\mathbb{R}^n)$ において稠密である． □

定義 3.8. $\nu \in \mathbb{Z}$ と $m = (m_1, m_2, \cdots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ に対して，$Q_{\nu m} := \prod_{j=1}^n \left[\frac{m_j}{2^\nu}, \frac{m_j+1}{2^\nu} \right)$ と定める．このような立方体を 2 進立方体といい，$\mathcal{D}$ でその全体を表す．

補題 3.9. $f \in H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})$ とする．このとき，$\{\lambda(j,Q)\}_{j\in\mathbb{Z}, Q\in\mathcal{D}} \in [0,\infty)$, $\{B(j,Q)\}_{j\in\mathbb{Z}, Q\in\mathcal{D}} \in [0,\infty)$ が存在して，

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}, Q\in\mathcal{D}} \lambda(j,Q) B(j,Q), \quad \lambda(j,Q) \ge 0,\ B(j,Q) \text{ は } (p', q', \sigma; Q, 2^j)\text{-ブロック}$$

と

$$\sum_{j=1}^\infty \sum_{Q\in\mathcal{D}} |\lambda(j,Q)| \le 2^{1+\sigma+2n} \|f\|_{H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})}$$

を満たす．

証明. $f \in H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})$ より，$\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty \in [0,\infty)$, $\{b_k\}_{k=1}^\infty \subset L^{q'}$, $\{r_k\}_{k=1}^\infty \in [0,\infty)$ と立方体の列 $\{Q_k\}_{k=1}^\infty$ が存在して

$$f = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k b_k,\ \lambda_k \ge 0,\ a_k \text{は } (p', q', \sigma; Q_k, r_k)\text{-ブロック}$$

と表すことができ，ノルムの定義から，

$$\sum_{k=1}^\infty |\lambda_k| \le 2\|f\|_{H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})}$$

が成り立つ．$\Lambda_k = 2^\sigma \lambda_k$, $B_k = 2^{-\sigma} b_k$, $R_k = 2^{[\log_2 r_k]+1}$ とおくと，

$$\|B_k\|_{L^{q'}} \le 2^{-\sigma} r_k^{-\sigma} |Q_k|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} = R_k^{-\sigma} |Q_k|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$$

より，

$$f = \sum_{k=1}^\infty \Lambda_k B_k,\ \Lambda_k \ge 0,\ B_k \text{は } (p', q', \sigma; Q_k, R_k)\text{-ブロック}$$

が成り立ち，また，

$$\sum_{k=1}^\infty |\Lambda_k| \le 2^{1+\sigma} \|f\|_{H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})}.$$

が成り立つ．次に，Q_k を $\ell(Q_k) \le \ell(Q_k^{(l)}) < 2\ell(Q_k)$ となる 4^n 個の 2 進立方体 $Q_k^{(1)}, Q_k^{(2)}, \ldots, Q_k^{(4^n)}$ を用いて覆う．$l = 1, 2, \ldots, 4^n$, $k = 1, 2, \ldots$ に対して $B_k^{(l)} = \chi_{Q_k{}^{(l)}} B_k$, $\Lambda_k^{(l)} = \Lambda_k$ とすると，

$$f = \sum_{l=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty \Lambda_k^{(l)} B_k^{(l)},\ \Lambda_k \ge 0,\ B_k^{(l)} \text{は } (p', q', \sigma; Q_k^{(l)}, R_k)\text{-ブロック}$$

と

$$\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|\Lambda_k^{(l)}| = 4^n\sum_{k=1}^{\infty}|\Lambda_k| \le 2^{1+\sigma+2n}\|f\|_{H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})}$$

が成り立つ．各 $j\in\mathbb{Z}$ と Q に対して，

$$\mathcal{W}(Q,j) := \{(Q_k^{(l)}, R_k) : Q_k^{(l)} = Q, R_k = 2^j\}$$

とおき，

$$f = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\Lambda_k^{(l)}B_k^{(l)} = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{Q\in\mathcal{D}}\sum_{(Q_k^{(l)},R_k)\in\mathcal{W}(Q,j)}\Lambda_k^{(l)}B_k^{(l)}$$

と書き直す．

$$\sum_{(Q_k^{(l)},R_k)\in\mathcal{W}(Q,j)}|\Lambda_k^{(l)}| = 0$$

ならば，$\lambda(j,Q)=0$, $B(j,Q)=0$ とおき，

$$\sum_{(Q_k^{(l)},R_k)\in\mathcal{W}(Q,j)}|\Lambda_k^{(l)}| > 0$$

ならば，

$$\lambda(j,Q) = \sum_{(Q_k^{(l)},R_k)\in\mathcal{W}(Q,j)}|\Lambda_k^{(l)}|, \quad B(j,Q) = \frac{1}{\lambda(j,Q)}\sum_{(Q_k^{(l)},R_k)\in\mathcal{W}(Q,j)}\Lambda_k^{(l)}B_k^{(l)}$$

と定めることで，

$$f = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\Lambda_k^{(l)}B_k^{(l)} = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{Q\in\mathcal{D}}\lambda(j,Q)B(j,Q),$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{Q\in\mathcal{D}}\lambda(j,Q) = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|\Lambda_k^{(l)}| = 4^n\sum_{k=1}^{\infty}|\Lambda_k| \le 2^{1+\sigma+2n}\|f\|_{H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})}$$

となる． □

定理 3.10. $1<q\le p<\infty, \sigma>0$ とし，$0\le f_1\le f_2\le\cdots$ を $H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})(\mathbb{R}^n)$ に属する可測関数の増大列とする．このとき，

$$f = \lim_{k\to\infty} f_k \quad \left(\|f\|_{H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})(\mathbb{R}^n)} = \sup_{k\in\mathbb{N}}\|f_k\|_{H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})(\mathbb{R}^n)}\right)$$

とおくと，$f\in H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})(\mathbb{R}^n)$ である．

証明. 補題 3.7. より，$\{\lambda(j,k,Q)\}_{j\in\mathbb{Z},Q\in\mathcal{D}}\in[0,\infty)$, $\{B(j,k,Q)\}_{j\in\mathbb{Z},Q\in\mathcal{D}}\in[0,\infty)$ が存在して，

$$f_k = \sum_{j\in\mathbb{Z},Q\in\mathcal{D}}\lambda(j,k,Q)B(j,k,Q),\ \lambda(j,k,Q)\ge 0,\ B(j,k,Q) \text{ は } (p',q',\sigma;Q,2^j)\text{-ブロック}$$

と

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{Q\in\mathcal{Q}}\lambda(j,k,Q) \le 2^{1+\sigma+2n}\|f_k\|_{H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})}$$

を満たす．このとき，部分列に移ることで，

$$\lambda(j,k) = \lim_{k\to\infty}\lambda(j,k,Q), \quad B(j,Q) = \lim_{k\to\infty}B(j,k,Q)$$

が成り立つとしてよい．ただし，後者の収束は弱収束である．ここで，

$$g(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z},Q\in\mathcal{D}}\lambda(j,Q)B(j,Q)$$

とおいて，$f=g$ となることを示せばよい．つまり，$0\notin\overline{Q}$ となる 2 進立方体 Q に対して，

$$\int_Q f_k(x)\,dx \to \int_Q g(x)\,dx \quad (k\to\infty)$$

を示せばよい．まず，$N\in\mathbb{N}$ に対して

$$\mathcal{Q}_1=\{R\in\mathcal{D}\,:\,R\supset Q\},\quad \mathcal{Q}_2=\{R\in\mathcal{D}\,:\,R\subset Q\},$$
$$\mathcal{Q}^{N+}=\{R\in\mathcal{D}\,:\,|R|\geq 2^N\},\quad \mathcal{Q}_{N-}=\{R\in\mathcal{D}\,:\,|R|\leq 2^{-N}\}$$

とおく．$N\gg 1$ とすると，$2^j\geq \ell(Q)$ のとき，

$$\begin{aligned}
&\int_Q \sum_{R\in\mathcal{Q}_1\cap\mathcal{Q}^{N+}}\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda(j,k,R)B(j,k,R)(x)|\,dx\\
&\leq \sum_{R\in\mathcal{Q}_1\cap\mathcal{Q}^{N+}}\sum_{j=\log_2\ell(Q)}^{\infty}|\lambda(j,k,R)|\cdot\|\chi_Q\|_{L^q}\|B(j,k,R)\|_{L^{q'}}\\
&\leq \sum_{R\in\mathcal{Q}_1\cap\mathcal{Q}^{N+}}\sum_{j=\log_2\ell(Q)}^{\infty}|\lambda(j,k,R)|\cdot\|\chi_Q\|_{L^q}|R|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}2^{-j\sigma}\\
&\leq 2^{-\sigma\log_2\ell(Q)+\frac{N}{p}-\frac{N}{q}}\|\chi_Q\|_{L^q}\sum_{R\in\mathcal{Q}_1\cap\mathcal{Q}^{N+}}\sum_{j=\log_2\ell(Q)}^{\infty}|\lambda(j,k,R)|\\
&\leq 2^{-\sigma\log_2\ell(Q)+\frac{N}{p}-\frac{N}{q}+2n+1+\sigma}\|\chi_Q\|_{L^q}\sup_{k\in\mathbb{Z}}\|f_k\|_{H_\sigma(\mathcal{B}_{q'}^{p'})}
\end{aligned}$$

となる．一方

$$\begin{aligned}
&\int_Q \sum_{R\in\mathcal{Q}_2\cap\mathcal{Q}_{N-}}\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda(j,k,R)B(j,k,R)(x)|\,dx\\
&= \sum_{R\in\mathcal{Q}_2\cap\mathcal{Q}_{N-}}\sum_{j=\log_2\ell(Q)}^{\infty}\int_R|\lambda(j,k,R)B(j,k,R)(x)|\,dx\\
&\leq \sum_{R\in\mathcal{Q}_2\cap\mathcal{Q}_{N-}}\sum_{j=\log_2\ell(Q)}^{\infty}|\lambda(j,k,R)|\cdot\|\chi_R\|_{L^q}\|B(j,k,R)\|_{L^{q'}}\\
&\leq \sum_{R\in\mathcal{Q}_2\cap\mathcal{Q}_{N-}}\sum_{j=\log_2\ell(Q)}^{\infty}|\lambda(j,k,R)|\cdot|R|^{\frac{1}{p}}2^{-j\sigma}\\
&\leq 2^{-\sigma\log_2\ell(Q)-\frac{N}{p}}\sum_{R\in\mathcal{Q}_2\cap\mathcal{Q}_{N-}}\sum_{j=\log_2\ell(Q)}^{\infty}|\lambda(j,k,R)|\\
&\leq 2^{-\sigma\log_2\ell(Q)-\frac{N}{p}+1+2n+\sigma}\sup_{k\in\mathbb{Z}}\|f_k\|_{H_\sigma(\mathcal{B}_{q'}^{p'})}
\end{aligned}$$

となる．また，$2^j\leq\ell(Q)$ のときこの積分は 0 となるので，

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\int_Q\sum_{R\in\mathcal{Q}_1\cap\mathcal{Q}^{N+}}\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda(j,k,R)B(j,k,R)(x)|\,dx=o(1),$$
$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\int_Q\sum_{R\in\mathcal{Q}_2\cap\mathcal{Q}_{N-}}\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\lambda(j,k,R)B(j,k,R)(x)|\,dx=o(1)$$

が成り立つ．よって，

$$f=\sum_{j\in\mathbb{Z},Q\in\mathcal{D}}\lim_{k\to\infty}\lambda(j,k,Q)B(j,k,Q)=\sum_{j\in\mathbb{Z},Q\in\mathcal{D}}\lambda(j,Q)B(j,Q)=g$$

が得られる．よって示された． □

3.3. $B_\sigma(\mathcal{M}^p_q)(\mathbb{R}^n)$ 空間の前双対における特異積分作用素の有界性.

定理 3.11. $1 < q \le p < \infty$，$0 \le \sigma < n/q$，$|Q| > 1$ とすると，特異積分作用素 T は $H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})$ において有界な線形作用素に拡張される．

証明. 一般に b を $(p', q', \sigma; Q, R)$ ブロックとすると，不等式

$$\|\chi_{B(2R)}Tb\|_{L^{q'}} \le \|T\|_{L^{q'}\to L^{q'}}\|b\|_{L^{q'}} \le \|T\|_{L^{q'}\to L^{q'}}|Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}R^{-\sigma}$$

と

$$\begin{aligned}\|\chi_{B(2^{k+1}R)\setminus B(2^kR)}Tb\|_{L^{q'}} &\le |B(2^{k+1}R)\setminus B(2^kR)|^{1/q'}\|\chi_{B(2^{k+1}R)\setminus B(2^kR)}Tb\|_{L^\infty}\\ &\le |B(1)|^{1/q'}\{(2^{k+1}R)^n-(2^kR)^n\}^{1/q'}\cdot C'(2^kR)^{-n}\int_{B(R)}|b(y)|\,dy\\ &= C(2^kR)^{n/q'-n}\int_{B(R)}|b(y)|\,dy\\ &\le C(2^kR)^{-n/q}\|\chi_{B(R)}\|_{L^q}\cdot\|b\|_{L^{q'}}\\ &\le C(2^k)^{\sigma-n/q}(2^kR)^{-\sigma}|Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

が成り立つので，

$$Tb = \chi_{B(2R)}Tb + \sum_{k=1}^{\infty}\chi_{B(2^{k+1}R)\setminus B(2^kR)}Tb$$

と分解することができる．仮定より，$\sigma - n/q < 0$ であるので，$Tb \in H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})(\mathbb{R}^n)$ となる．ここで，$f \in \mathcal{H}_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})(\mathbb{R}^n)$ とすると，$\{\lambda_k\}_{k=1}^K \in \ell^1(\mathbb{N})$ と $(p', q', \sigma; Q_k, r_k)$ ブロックの列 $\{B_k\}_{k=1}^K$ により

$$f = \sum_{k=1}^{K}\lambda_k B_k, \quad \sum_{k=1}^{K}|\lambda_k| \le 3^\sigma\|f\|_{H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})}$$

と分解することができる．これにより，

$$\|Tf\|_{H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})} \le \sum_{k=1}^{K}|\lambda_k|\cdot\|Tb_k\|_{H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})} \le C\cdot 3^\sigma\|f\|_{H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})}$$

が得られる．従って稠密性から，T は $H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})(\mathbb{R}^n)$ において有界な線形作用素に拡張されることがわかる． □

3.4. $B_\sigma(\mathcal{M}^p_q)(\mathbb{R}^n)$ 空間の前双対における分数冪積分作用素の有界性.

定理 3.12. パラメータ $p, q, s, t, \sigma, \alpha$ が

$$1 < q \le p < \infty, \quad 1 < t \le s < \infty, \quad \sigma \ge 0, \quad 0 < \alpha < n, \quad -\frac{n}{s} = -\frac{n}{p} + \alpha, \quad \frac{s}{t} = \frac{p}{q}$$

を満たしているとする．このとき，$I_\alpha : B_\sigma(\mathcal{M}^p_q) \to B_\sigma(\mathcal{M}^s_t)$ は有界である．

定理 3.13. パラメータ $p, q, s, t, \sigma, \alpha$ が定理 3.12 と同様の条件を満たすとき，I_α は $H_\sigma(\mathcal{B}^{s'}_{t'})(\mathbb{R}^n)$ から $H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})(\mathbb{R}^n)$ への有界作用素である．

証明. $C > 0$ が存在して

$$\|I_\alpha f\|_{H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})(\mathbb{R}^n)} \le C\|f\|_{H_\sigma(\mathcal{B}^{s'}_{t'})}$$

が成り立つことを示せばよい．$I_\alpha f$ の定義より $\|I_\alpha f\|_{H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})(\mathbb{R}^n)} \le \|I_\alpha[|f|]\|_{H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})(\mathbb{R}^n)}$ であり，$H_\sigma(\mathcal{B}^{s'}_{t'})$ ノルムの定義より $\|f\|_{H_\sigma(\mathcal{B}^{s'}_{t'})} = \|\,|f|\,\|_{H_\sigma(\mathcal{B}^{s'}_{t'})}$ が成り立つので，$f \ge 0$ と仮定してよい．このとき，

$$I_{\alpha,R}f(x) = \int_{R^{-1}\le|x-y|\le R} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy$$

と定めるとき，$I_{\alpha,R}f \uparrow I_\alpha f$ であるので，$R > 0$ をとめて，R によらない一様な評価

$$\|I_{\alpha,R}f\|_{H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})(\mathbb{R}^n)} \le C\|f\|_{H_\sigma(\mathcal{B}^{s'}_{t'})}$$

を示せばよい．また，$f_N = \chi_{\{|f|\le N\}\cap Q(N)}f$ と定めると，定理 3.8 より，

$$\|I_{\alpha,R}f_N\|_{H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})} \uparrow \|I_{\alpha,R}f\|_{H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})}$$

であるので，$f \in L^\infty_{\rm comp}(\mathbb{R}^n)$ としてよい．このとき，$I_{\alpha,R}f \in L^\infty_{\rm comp}(\mathbb{R}^n) \subset H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})(\mathbb{R}^n)$ である．従って，定理 3.12 より，

$$\begin{aligned}
\|I_{\alpha,R}f\|_{H_\sigma(\mathcal{B}^{p'}_{q'})} &= \sup_{g\in L^\infty_{\rm comp}(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}} \frac{1}{\|g\|_{B_\sigma(\mathcal{M}^p_q)}}\left|\int_{\mathbb{R}^n} I_{\alpha,R}f(x)g(x)\,dx\right| \\
&\le \sup_{g\in L^\infty_{\rm comp}(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}} \frac{1}{\|g\|_{B_\sigma(\mathcal{M}^p_q)}}\|f\|_{H_\sigma(\mathcal{B}^{s'}_{t'})}\|I_{\alpha,R}g\|_{B_\sigma(\mathcal{M}^s_t)} \\
&\le \sup_{g\in L^\infty_{\rm comp}(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}} \frac{1}{\|g\|_{B_\sigma(\mathcal{M}^p_q)}}\|f\|_{H_\sigma(\mathcal{B}^{s'}_{t'})}\cdot C\|g\|_{B_\sigma(\mathcal{M}^p_q)} \\
&\le C\|f\|_{H_\sigma(\mathcal{B}^{s'}_{t'})}
\end{aligned}$$

が得られた． □

4. Notes

4.1. Operators dealt with in this paper.

The Hardy-Littlewood maximal operator. The Hardy-Littlewood maximal operator was introduced by Hardy and Littlewood in [17] for the purpose of investigating the Fourier series on the torus. They investigated the 1-dimensional maximal operator and later Wiener generalized the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator to higher dimension; see [40].

Singular integral operators. The research of the singular integral operators dates back to the study of the Hilbert transform, which is given by

$$Hf(t) \equiv \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{|u|>\varepsilon}\frac{f(t-u)}{u}\,du.$$

The boundedness of the Hilbert transform dates back to the papers by Kolmogorov and M. Riesz, first appeared in [32] in 1927. However, it is announced in 1924 by M. Riesz in [31]. are due to Kolmogorov [23] and M. Riesz. Later P. Stein, L. H. Loomis and A. P. Calderón gave different proofs [4, 28, 37]. Calderón and Zygmund generalized the integral kernel by using the “so-called” Calderón-Zygmund decomposition [6, 7, 8, 9]. The Calderón-Zygmund decomposition, whose detail can be found in the textbook [12, Chapter 2], is now used for various aims.

Fractional maximal operators. Theorem 2.13 with $\sigma = 0$ and $p = q$, or equivalently, Theorem 2.12 with $\sigma = 0$ is a fundamental theorem whose root lies especially in [18, 19, 36]. The fractional integral operator is important because it generalizes the fundamental solution of the potential operator.

4.2. B_σ **spaces.** It is known that Morrey and Campanato spaces contain L^p, BMO and Lipschitz spaces as special cases. Therefore, using B_σ-Morrey-Campanato spaces, we can unify the results of the boundedness of operators on several classical function spaces.

Here we shall give some examples of classical function spaces.

The dual of the Beurling algebra. We now see how the B_σ spaces, in particular the space B_σ arose. Beurling [3] introduced the space $B^p(\mathbb{R}^n)$ together with its predual $A^p(\mathbb{R}^n)$ so-called the Beurling algebra. Later, to extend Wiener's ideas [38, 39] which describe the behavior of functions at infinity, Feichtinger [13] gave an equivalent norm on $B^p(\mathbb{R}^n)$, which is a special case of norms to describe non-homogeneous Herz spaces $K^\alpha_{p,r}(\mathbb{R}^n)$ introduced in [20]. The function space $B^p(\mathbb{R}^n)$ and its homogeneous version $\dot{B}^p(\mathbb{R}^n)$ are characterized by the following norms, respectively:

$$\|f\|_{B^p} = \sup_{r\geq 1}\left(\frac{1}{|[-r,r]^n|}\int_{[-r,r]^n}|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$$

and

$$\|f\|_{\dot{B}^p} = \sup_{r>0}\left(\frac{1}{|[-r,r]^n|}\int_{[-r,r]^n}|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

In this case $E = L^p$ and $\sigma = n/p$. $B^p(\mathbb{R}^n) = B_\sigma(L^p)(\mathbb{R}^n)$ and $\dot{B}^p(\mathbb{R}^n) = \dot{B}_\sigma(L^p)(\mathbb{R}^n)$ with $\sigma = n/p$.

B_σ **spaces and Morrey spaces.** García-Cuerva and Herrero [15, Proposition 1.6] and Alvarez, Guzmán-Partida and Lakey [2, Definition 2.2] introduced the non-homogeneous central Morrey space $B^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ and the central Morrey space $\dot{B}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ as an extension of $B^p(\mathbb{R}^n)$, $\dot{B}^p(\mathbb{R}^n)$, $\mathrm{CMO}^p(\mathbb{R}^n)$ and $\mathrm{CBMO}^p(\mathbb{R}^n)$, respectively, with the following norms:

$$\|f\|_{B^{p,\lambda}} = \sup_{r\geq 1}\frac{1}{r^\lambda}\left(\frac{1}{|[-r,r]^n|}\int_{[-r,r]^n}|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p},$$

$$\|f\|_{\dot{B}^{p,\lambda}} = \sup_{r>0}\frac{1}{r^\lambda}\left(\frac{1}{|[-r,r]^n|}\int_{[-r,r]^n}|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Then these spaces are expressed by $B_\sigma(E)(\mathbb{R}^n)$ and $\dot{B}_\sigma(E)(\mathbb{R}^n)$ with $E = L^p$ and $\sigma = n/p + \lambda$. In [29], B_σ-Morrey-Campanato spaces have been introduced to unify central Morrey spaces, λ-central mean oscillation spaces and usual Morrey-Campanato spaces. Using these function spaces, we can study both local and global regularities of functions simultaneously.

4.3. **The mothod of the proof together with related facts.**

Theorems 2.4 and 3.4–the predual of $B_\sigma(L^p)$ and $B_\sigma(\mathcal{M}^p_q)$. The predual of $B_\sigma(L^p)$ seems to be new. The idea of the proof goes back to the Zorko paper [41].

Theorems 2.9 and 3.10–the Fatou property of $B_\sigma(L^p)$ and $B_\sigma(\mathcal{M}^p_q)$. The Fatou property of the function spaces dates back to [35, Theorem 1.2], whose idea is from [22]. See some related facts by S. Nakamura [30].

Theorem 2.10–The boundedness of the Hardy-Littlewood maximal operator. The Hardy-Littlewood maximal operator on H_σ spaces is simpler than the singular integral operators on H_σ spaces.

Theorem 2.11–The boundedness of the singular integral operators. The boundedness of the predual of Morrey spaces, namely Theorem 2.11 with $\sigma = 0$, can be found in [24, Theorem]. One of the difficulties in defining the singular integral operators on H_σ is that it is not enough to define

$$Tf = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j T a_j$$

when we have *infinite sum*

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j$$

as is desribed in the definition. There are two problems in this definition.

(1) How can we guarantee that the right-hand side defining Tf converges ?
(2) How can we check that the definition of Tf does not depend on the expression of f ?

To overcome this problem we can use the *finite sum* as is described in Proposition 2.5, for example. Another method is to resort to Lemma 2.8. Since we have defined T on L^1 and L^v with $1 < \infty$; see [12, Chapters 3–5], we can defined T on B_σ spaces as a restriction from $L^1 + L^v$ to B_σ spaces.

Theorems 2.13, 3.12 and 3.13–The boundedness of the fractional integral operators. The proof of Theorem 2.13 by means of Theorem 2.12 which is [27, Theorem 8] dates back to the paper [33, 34, Theorem 3.1]. In particular, see [34, Theorem 3.1]. Since the integral kernel of I_α is positive, the matters are not so serious as the singular integral operators. We can readily use the infinite decomposition. We can also use the formula

$$|f| = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j B_j$$

as in Proposition 3.5. But analyzing each a_j as in Theorem 2.11 is not enough; we do not have good method using the structure of a_j so far.

References

[1] D. R. Adams, A note on Riesz potentials, Duke Math. J., **42** (1975), no. 4, 765–778.
[2] J. Alvarez, M. Guzmán-Partida and J. Lakey, Spaces of bounded λ-central mean oscillation, Morrey spaces, and λ-central Carleson measures, Collect. Math., **51** (2000), 1–47.
[3] A. Beurling, Construction and analysis of some convolution algebra, Ann. Inst. Fourier, **14** (1964), 1–32.
[4] A.P. Calderón, On the theorems of M. Riesz and Zygmund, Proc. Amer. Math. Soc. **1** (1950), 533–535.
[5] A. P. Calderon and A. Zygmund, On singular integrals, Amer. J. Math. **78** (1956), 289–309.
[6] A.P. Calderón and A. Zygmund, On singular integrals, Amer. J. Math., **78** (1956), 289–309.
[7] A.P. Calderón and A. Zygmund, Algebras of Certain Singular Operators, Amer. J. Math., **78** (1956), 310–320.
[8] A.P. Calderón and A. Zygmund, Singular integral operators and differential equations, Amer. J. Math., **79** (1957), 901–921.
[9] A.P. Calderón and A. Zygmund, Local properties of solutions of elliptic partial differential equations, Studia Math. **20** (1961), 171–225.
[10] Y. Chen and K. Lau, Some new classes of Hardy spaces, J. Funct. Anal. **84** (1989), 255–278.
[11] F. Chiarenza and M. Frasca, Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function, Rend. Mat. Appl., (7) **7** (1987), no. 3-4, 273–279.

[12] J. Duoandikoetxea, Fourier Analysis. Translated and revised from the 1995 Spanish original by David Cruz-Uribe. Graduate Studies in Mathematics, 29. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
[13] H. Feichtinger, An elementary approach to Wiener's third Tauberian theorem on Euclidean n-space, In: Proceedings of Conference at Cortona 1984, Symposia Mathematica, **29**, 267–301, Academic Press, New York (1987).
[14] J. García-Cuerva, Hardy spaces and Beurling algebras, J. London Math. Soc. (2), **39** (1989), 499–513.
[15] J. García-Cuerva and M.J. L. Herrero, A theory of Hardy spaces assosiated to the Herz spaces, Proc. London Math. Soc.,**69** (1994), 605–628.
[16] J. García-Cuerva and J. L. Rubio de Francia, Weighted Norm Inequalities and Related Topics, North-Holland Math. Stud., **116** (1985).
[17] G.H. Hardy and J. Littlewood, A maximal theorem with function-theoretic applications, Acta Math. **54** (1930), no. 1, 81–116.
[18] G.H. Hardy and J. Littlewood, Some properties of fractional integrals I, Math. Z. **27** (1927), 565–606.
[19] G.H. Hardy and J. Littlewood, Some properties of fractional integrals II, Math. Z. **34** (1932), 403–439.
[20] C. Herz, Lipschitz spaces and Bernstein's theorem on absolutely convergent Fourier transforms, J. Math. Mech., **18** (1968), 283–324.
[21] G. Hu, S. Lu and D. Yang, The weak Herz spaces, J. Beijing Normal Univ. (Natur. Sci.), **33** (1997), 27–34.
[22] T. Izumi, E. Sato and K. Yabuta, Remarks on a subspace of Morrey spaces, Tokyo J. Math. **37** (2014), no. 1, 185–197.
[23] A.N. Kolmogorov, Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier, Fund. Math. **7** (1925), 23–28.
[24] Y. Komori, Calderón-Zygmund operators on the predual of a Morrey space, Acta Mathematica Sinica, **19** (2) (2003), 297–302.
[25] Y. Komori-Furuya and K. Matsuoka, Some weak-type estimates for singular integral operators on CMO spaces, Hokkaido Math. J., **39** (2010), 115–126.
[26] Y. Komori-Furuya and K. Matsuoka, Strong and weak estimates for fractional integral operators on some Herz-type function spaces, Proceedings of the Maratea Conference FAAT 2009, Rendiconti del Circolo Mathematico di Palermo, Serie II, Suppl., **82** (2010), 375–385.
[27] Y. Komori-Furuya, K. Matsuoka, E. Nakai, Y. Sawano, Applications of Littlewood-Paley theory for B_σ-Morrey spaces to the boundedness of integral operators, J. Funct. Spaces Appl. 2013, Art. ID 859402, 21 pp.
[28] L.H. Loomis, A note on the Hilbert transform, Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946), 1082–1086.
[29] K. Matsuoka and E. Nakai, Fractional integral operators on $B^{p,\lambda}$ with Morrey-Campanato norms, Proceedings of Function Spaces IX, to appear.
[30] S. Nakamura, submitted.
[31] M. Riesz, Les fonctions conjugueés et les séries de Fourier, C. R. Acad. Sci. Paris, **178** (1924), 1464–1467.
[32] M. Riesz, Sur les fonctions conjugueés, Math. Z. **27** (1927), 218–244.
[33] Y. Sawano, S. Sugano and H. Tanaka, A note on generalized fractional integral operators on generalized Morrey spaces, Bound. Value Probl. 2009, Art. ID 835865, 18 pp.
[34] Y. Sawano, S. Sugano and H. Tanaka, Generalized fractional integral operators and fractional maximal operators in the framework of Morrey spaces, Trans. Amer. Math. Soc., **363** (2011), no. 12, 6481–6503.
[35] Y. Sawano and H. Tanaka, The Fatou property of block spaces, J. Math. Sci. Univ. Tokyo. **22**, 663–683, (2015).
[36] S. Sobolev, On a theorem in functional analysis (Russian), Math. Sob. **46** (1938), 471–490.
[37] P. Stein, On a theorem of M. Riesz, J. London Math. Soc. **8** (1933), 242–247.
[38] N. Wiener, Generalized harmonic analysis, Acta Math.,**55** (1930), 117–258.
[39] N. Wiener, Tauberian theorems, Ann. Math., **33** (1932), 1–100.
[40] N. Wiener, The ergodic theorem, Duke Math. J. **5** (1939), 1–18.
[41] C.T. Zorko, Morrey space, Proc. Amer. Math. Soc. **98** (1986), 586–592.