

学位論文審査要旨（課程博士）

論文著者名 中山雅友美

論文題名：Bott tower and Torus actions

（邦題： ボットタワーとトーラス作用 （英文））

論文審査委員

主査 教授 相馬輝彦 印

委員 准教授 酒井高司 印

委員 城西大学 教授

神島芳宣 印

1 研究の目的.

本学位論文の研究テーマは、Bott 多様体とよばれる多様体の幾何的構造の解明である。Bott タワーとよばれるファイバー F が S^1 （あるいは T^2 ）であるようなファイバー束の有限列：

$$(1) \quad M = M_n \xrightarrow{F} M_{n-1} \xrightarrow{F} \cdots \xrightarrow{F} M_1 \xrightarrow{F} \{\text{pt}\}.$$

を考える。この列の、最上空間 M を、一般的には Bott 多様体という。Bott タワーの研究の出発点は、実 Bott タワーとよばれる一次元射影直線 \mathbb{RP}^1 をファイバーにもつタワーであり、多くの研究者により組み合わせ論およびトーリック多様体論の立場から調べられてきた。特に実 Bott 多様体はユークリッド空間形（リーマン平坦多様体）であることが知られている。

本学位申請者である中山氏は、この学位論文において次の二つの主題を主たる研究目的とした。

- (1) Bott 多様体のファイバー束構造と Bott 多様体の対称性 (連続な等長群の存在)
- (2) Bott 多様体の可微分剛性 (Borel 可微分予想の肯定的解決)

2 研究の方法と結果.

最初に中山氏は $F = S^1$ の場合の Bott 多様体の構造を研究した. このような多様体を, S^1 -fibred Bott 多様体とよぶ. そのトポロジーを調べる方法として, 各ステップ $S^1 \rightarrow M_i \rightarrow M_{i-1}$ から得られる群拡大 $1 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \pi_i \rightarrow \pi_{i-1} \rightarrow 1$ を考えた. \mathbb{Z} は π の各元による共役をとることにより, π_{i-1} -加群になる. したがってこのとき, 群コホモロジー $H_\phi^2(\pi_{i-1}; \mathbb{Z})$ が得られる. ただし, ϕ は係数群 \mathbb{Z} が π_{i-1} -加群であることを意味する約束である. さらに上の群拡大は 2 次コサイクル $[f_i] \in H_\phi^2(\pi_{i-1}; \mathbb{Z})$ を与える. ここで M_i が有限型とは対応する 2 次コサイクル $[f_i]$ が有限位数であると定義し, $[f_i]$ が無限位数のとき, M_i は無限型とよぶ.

中山氏は実 Bott 多様体に対する束構造を考察し, S^1 -fibred Bott タワーに対して, 各ステップ $S^1 \rightarrow M_i \rightarrow M_{i-1}$ は *Seifert fiber bundle* であることを仮定においた. 同氏は Seifert fibration の理論 (Seifert 軌道束理論と Seifert 剛性論) を駆使して次の結果を得た.

- Theorem 1.** (1) 各 2 次コサイクル $[f_i] \in H_\phi^2(\pi_{i-1}; \mathbb{Z})$ が有限位数ならば, M はユークリッド空間形 \mathbb{R}^n/π に微分同相である. ただし, $\pi \leq \mathbb{R}^n \rtimes O(n)$ は Bieberbach 群である.
- (2) 少なくとも一つ 2 次コサイクル $[f_i] \in H_\phi^2(\pi_{i-1}; \mathbb{Z})$ が無限位数ならば, M は infranil 多様体に微分同相である.

Theorem 2. 3 次元 S^1 -fibred Bott 多様体は, のように分類・決定される.

- (3) 有限型の 3 次元 S^1 -fibred Bott 多様体は (J. Wolf の記号で)

$$\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4$$

から成る. その中で実 Bott 多様体は $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3$ である.

- (4) 無限型の 3 次元 S^1 -fibred Bott 多様体は (i) ハイゼンバーク等質多様体 $N/\Delta(k)$ であるかあるいは (ii) ハイゼンバーク infranil 多様体 $N/\Gamma(k)$ である. ここで $\Delta(k)$ は次により生成される冪零群である; $\{c, a, b \mid [a, b] = c^{-k}, [c, a] = [c, b] = 1\}$. $\Gamma(k)$ は次の群拡大をもつ virtually 冪零群である: $1 \rightarrow \Delta(2k) \rightarrow \Gamma(k) \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 1$ ($k \in \mathbb{N}$).
- (5) Q をトーラスあるいはクラインの壺の基本群とする. このとき $H_\phi^2(Q; \mathbb{Z})$ の任意の元は 3 次元 S^1 -fibred Bott 多様体の微分同相類として実現できる.

実 Bott 多様体ならば S^1 -fibred Bott 多様体であるが, 定理 2 は実 Bott 多様体でないような S^1 -fibred Bott 多様体の例が存在することを主張している. また, 実 Bott 多様体はユークリッド空間形 (リーマン平坦多様体) であるのに対して結果 (4) はユークリッド空間形でない多様体が出てくることを示している.

中山氏は続けてファイバー F が冪零多様体である場合の Bott タワーを定義し, その研究した. 特にファイバーが 1 次元複素トーラス $T_{\mathbb{C}}^1$ である場合, この多様体を正則トーラス Bott タワーとよび, $T_{\mathbb{C}}^1$ による正則 Seifert fibre 束:

$$(2) \quad M = M_n \rightarrow M_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow M_1 \rightarrow \{\text{pt}\}.$$

の概念を導入しその位相的・幾何学的性質を調べた. このとき, 最上空間 M を $2n$ 次元正則トーラス-Bott 多様体という.

正則トーラス Bott 多様体の構造決定に対しては従来行ってきた S^1 -fibred Bott 多様体のときと類似の議論や方法は必ずしもうまくいかない. 例えば, 位相的に $X_m = \mathbb{C} \times X_{m-1}$ (直積) であっても, 一般に複素多様体 (X_m, J_m) としては直積 $(\mathbb{C} \times X_{m-1}, J \times J_{m-1})$ ならない. しかしこの場合, 岡の原理 ($H^1(\hat{X}, A_h) = 0$) を使って, (X, J) が直積正則束 $(\mathbb{C} \times \hat{X}, J_0 \times \hat{J})$ に正則同型であることが分かった. この原理が, 正則 Seifert fibration の理論に適用できること (つまり Seifert 正則作用を積空間 $\mathbb{C} \times \hat{X}$ 上に記述できること) を確かめることによって, 次の結果を得た. これは村上信吾氏の結果 (1957 年) の一般化でもある.

Theorem 3. M をファイバーが $T_{\mathbb{C}}^1$ であるような \hat{M} 上の $2n$ 次元正則トーラス Bott 多様体とする. ただし, \hat{M} は正則 infranil 多様体 $\hat{N}/\hat{\Gamma}$ と正則同型と仮定する. このとき正則 infranil 多様体 N/Γ が存在して, M は N/Γ に正則同型となる. さらに次の可換図式をみたすような正則 Seifert fibration $T_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow N/\Gamma \rightarrow \hat{N}/\hat{\Gamma}$ が存在する:

$$\begin{array}{ccccc} T_{\mathbb{C}}^1 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & \hat{M} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ T_{\mathbb{C}}^1 & \longrightarrow & N/\Gamma & \longrightarrow & \hat{N}/\hat{\Gamma} \end{array}$$

この定理の証明において, キーになるアイディアは短完全列: $1 \rightarrow \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{i} \mathbb{C} \xrightarrow{j} T_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow 1$ から誘導されるコホモロジー完全系列

$$\dots \rightarrow H_{\phi}^1(\hat{\Gamma}; \text{hol}(\hat{N}, \mathbb{C})) \xrightarrow{j} H_{\phi}^1(\hat{\Gamma}; \text{hol}(\hat{N}, T_{\mathbb{C}}^1)) \xrightarrow{\delta} H_{\phi}^2(\hat{\Gamma}; \mathbb{Z}^2) \rightarrow \dots,$$

を考慮して, M が正則 infranil 多様体 N'/Γ' に正則同型であることが示すことにある. そのとき S^1 -fibred Bott 多様体のときと本質的に異なる議論は, 可微分剛性から出てきた N/Γ を取るのではなく, その正則変形 (deformation) として構成される N'/Γ' を利用したことである. (も

もちろん, N'/Γ' は位相的には N/Γ に他ならない.) 次がそれを保証する存在定理である.

Theorem 4. (N, Γ) を正則 Seifert 作用とする. このとき J -不変な冪零 Lie 群 N' と固有正則不連続に作用する離散群 Γ' が存在して商空間 N/Γ は正則 infranil 多様体 N'/Γ' に正則同型となる.

3 審査の結果.

中山氏は, S^1 -fibred Bott 多様体, 正則トーラス Bott 多様体の概念を導入し, そのそれぞれについて Seifert 剛性のより精密な可微分剛性および正則剛性の理論を構築し, それらの幾何構造を決定した. 特に, 3 次元 S^1 -fibred nil Bott 多様体の分類は最終的なものであり, 高い評価を与えることができる. 本学位論文は非常にオリジナリティーの高い研究を含んでおり, 今後のさらなる発展が期待できる. これらの研究結果は既に, 同氏の単著論文として Osaka Journal of Mathematics と RIMS Kyokuyuroku Bessatsu より発表されている. また共著論文として, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics から研究結果が発表されている.

以上の理由により, 本論文は博士 (理学) の学位に十分値するものと判断した次第である.

4 最終試験の結果.

予備審査会 (11 月 6 日) において, 中山氏が学位論文の主結果の説明を行い, 質疑応答を行った. その後, 主査・副査を中心に審査した結果, 研究成果を客観的に裏付ける査読付き論文も複数あることなどから学位論文として十分値すると判断し, 最終試験の受験を承認した.

最終試験は, 本学の学位規則に従い平成 27 年 1 月 22 日に公開で行われた. 45 分間の研究結果の発表後, 10 分間の質疑応答を行った. その後, 数理情報科学専攻の教授会構成員によって判定会議を行った結果, 合格と判定された.