# 数学と変数

竹 内　　泉

## 1 序

変数の使用は数学に特有である．変数が使用されていることは，他の言語と比べた際に数学の言語の特徴となっている．本稿は，数学の言語哲学として，変数の使用を分析する．

数学の中の変数の使用は文献［1］で議論されている．本稿では以下のように分類する．

- 恒等式の中の文字
- 方程式の中の未知数
- 座標変数と確率変数
- 多項式論の中の変数と命題変数
- 独立変数と従属変数
- 自由変数と束縛変数

この分類の内，座標変数と確率変数については文献［1］には座標変数のみが議論されていて，確率変数が議論されていなかった．しかし，本稿で議論するように，座標変数と確率変数は同類のものと見做される．

また文献[1]では多項式論の中の変数と命題変数は議論されていなかった．多項式論の中の変数とは，因数分解

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$$

に現れる変数 x である．これは独立変数への前段階を成すものとして重要であり，一つの項目として立てる必要があるように思われる．

本稿では先の列挙の内，座標変数と確率変数までを議論し，特に座標変数と確率変数について詳しく議論する．多項式論の中の変数以降については，未だ議論が尽くされていない．これは今後の課題である．

## 2　恒等式の中の文字

変数は文中で同一のものを指す．恒等式の中の文字は全称量化される変数である．例としては以下がある．

恒等式：$a+b=b+a$
意　味：$\forall ab.\ \ a+b=b+a$

量化子は各変数に対してそれぞれ一つしか登場しないので，変数の式中での値は皆同じである．よって《文中で同一のものを指す記号》である．

この《文中で同一のものを指す記号》は変数の重要な機能である．また，数学には，自由に現れる変数は意味上は全称束縛される，という傾向がある．

## 3　方程式の未知数

方程式の未知数は，解との同値式が全称量化される．例としては以下がある．

方程式：$x^2-1=0$　解：$x=1$ と $x=-1$
意　味：$\forall x.\ \ x^2-1=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=-1$
方程式：$x-2y=0,\ \ x-y=1$　解：$x=2, y=1$
意　味：$\forall xy.\ \ x-2y=0 \wedge x-y=1 \Leftrightarrow x=2 \wedge y=1$

量化子は各変数に対してそれぞれ一つしか登場しないので，方程式と解の中での x の値は同じである．よってこれもまた《文中で同一のものを指す記号》とも言える．

方程式を解く作業とは，ある意味で最も簡単な同値式を求める作業である．詳しく言い換えるならば，同値式記号で繋いで未知数を全称量化した命題が真となるようなものの中で，最も簡単なものを求める，という作業である．最も簡単な，ということなので，方程式 $x^2-1=0$ の解として $|x|=1$ や $x^2=1$ は不適であり，〈$x=1$ と $x=-1$〉と答えるのが正解である．

また一方で，方程式 $x^2-1=0$ を解く作業とは，性質性 $\lambda x.\ (x^2-1=0)$ と外延が等しい性質の中で最も簡単な表現を求める作業である，という一面を持っている．解は〈$x=1$ と $x=-1$〉であって〈1 か -1 であること〉ではないが，暗黙的に〈1 か -1 であること〉という性質が意識されている．数学では性質よりも集合を好むので，集合 $\{x|x^2-1=0\}$ の最も簡単な表現 $\{1,-1\}$ を求めると言い換えてもよい．

即ち，方程式の未知数とは，暗黙的にラムダ抽象されることが意識されている変数と見做すことが出来る．それは飽くまで暗黙的な意識であり，束縛変数の名前換えが許されている訳ではない．方程式 $x^2+1=0$ と $y^2+1=0$ は，それを解く作業は同じであるが，その解は片や〈$x=1$ と $x=-1$〉であり，片や〈$y=1$ と $y=-1$〉であり，それは相異なる．

## 4　座標変数

座標変数の用例には文献［2］にこのような記述がある．

$y=4x$ のグラフを書いてみよう．
かき方
$x=1$ のとき $y=4$ だから $y=4x$ のグラフは点 $(1,4)$ を通る．
したがって，原点と点 $(1,4)$ を通る直線が求めるグラフである．

文献［3］にも同様の記述がある．

〈$x=1$〉と言い〈$y=4$〉と言っているが，〈$y=4x$〉という式は単に$4=4\times 1$という掛け算のみを表しているのではない．即ち，ここでの変数の機能は《文中で同一のものを指す記号》ではない．

ここでの〈$y=4x$〉は，$y=4x$を充たす個々の$x$と$y$の組に注目しているのではなく，$x$と$y$の間の$y=4x$という関係に言及している．これは根が二つある方程式に似ている．$x=1$も$x=-1$も式$x^2-1=0$を充たすが，方程式x2-1=0の解は〈$x=1$〉でも〈$x=-1$〉でもなく，〈$x=1$と$x=-1$〉である．同様に，〈$y=4x$〉は，〈$x=0$かつ$y=0$〉〈$x=1$かつ$y=4$〉〈$x=2$かつ$y=8$〉のような一連の$x$と$y$の組に言及している．

〈$y=4x$〉の中の変数$x$と$y$は，方程式の未知数と同様に，暗黙的にラムダ抽象されることが意識されている変数と見做される．飽くまで暗黙的なラムダ抽象であって，変数名に意味があること，即ち，〈$y=4x$〉と〈$x=4y$〉は区別されることもまた，方程式の未知数と同様である．

更にまた〈$y=4x$〉は$y$が$x$に依存して動く変数であることをも意図している．この点は独立変数と従属変数として議論されるものであり，本稿の範囲を超える．

さて，座標変数には図形を表すという機能がある．これは方程式の未知数と違い，また独立変数と従属変数とも違う機能である．ここではその点を強調した仮想的な例文を挙げる．これは実際の文献の文面に現れているものではないが，十分に意味の通る例文である．

$x=1$，$y=1$であるような点Pと
$x=2$，$y=3$であるような点Qを通る直線は
直線$y=2x-1$である．

ここで，一行目では$x=1$，$y=1$と言い，二行目では$x=2$，$y=3$と言っているのであるから，矢張りこの座標変数は《文中で同一のものを指す》のではない．また三行目では，ある特定の$x$と$y$について言及しているのではない．

座標とは，一般には，空間の点と数または数の組との一対一対応である．直線の座標とは，直線上の点と実数との一対一対応であり，平面のデカル

ト座標とは，平面から X 軸と Y 軸への射影である．

平面のデカルト座標に於いて，X 軸への射影を X と書き，Y 軸への射影を Y と書くと，点 p の X 座標とは X (p)，点 p の Y 座標とは Y (p) である．これが一対一対応であるとは

・任意の点 p に対し，X (p) と Y (p) が定まる．
・任意の $x \in R$, $y \in R$ に対し，$X(p)=x$, $Y(p)=y$ となる点 p が唯一定まる．

ということである．

先の例文に於ける座標変数の意味はこのようなものである．

一行目：点 P では $X(P)=1$，$Y(P)=1$ である．
二行目：点 Q では $X(Q)=2$，$Y(Q)=3$ である．
三行目：その直線は点集合 $\{p \mid Y(p)=2X(p)-1\}$ である．

即ち，座標変数 x，y の意味は，それぞれの文脈で注目している地点 p での，座標系が定める函数 X ( )，Y ( ) に対する函数値 X (p)，Y (p) を表す．

また，〈$y=2x-1$〉は，構文上は論理式であるが，その意味は地点に対する性質であり，あるいはまたその性質が成り立つ地点の集合である．ここでは地点は意味論上束縛されている．数学では性質より集合を好むので，一般には，この式は点集合即ち直線を表す．

見掛けの文が性質を表すのは一般の言語では普通のことである．例えば

出身が大阪である人は言葉が関西弁になりがちである．

では，〈出身が大阪である〉は見掛け上は文であるが，その意味は〈$\lambda x.x$ の出身は大阪である〉という性質を表す．誰の出身地であるかを表す語句が欠けていて，それによって人に対する性質を表すようになっている．この誰の出身地かを表す語句は，省略されることもあるが，意味上は不可欠な語句である．

一方，座標変数を含む式は，構文上は欠けている要素が何もないにも拘

らず，構文上現れようのない地点が意味論上束縛されて，性質または集合を表す．この，構文上現れようのない暗黙の変数が意味論上束縛される，という点が座標変数の特徴である．

## 5　確率変数

確率変数の用例にはこのようなものがある．

普通の賽子を二回振る．
一回目に出た目を x と置き，二回目に出た目を y と置く．
2x＝y である確率は 1/12 である．

この x と y が確率変数である．

確率変数の値は《確率的に変化する》と言われる．確率変数が登場する式〈2x＝y〉も《確率的》であると呼ばれる．真偽が《確率的に変化する》からである．

一方，〈2x＝y である確率は 1/12 である〉は《確率的》ではない．この命題の真偽は変化しない．

確率論では，確率変数は事象空間から値域への函数である，と教える．[文献4，5] 先の例では，事象空間は

$$\{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$$

である．確率変数 x が表す函数 X( ) とは

$$\omega = (\omega_x,\ \omega_y) \text{ に対して } X(\omega) = \omega_x$$

であり，確率変数 y が表す函数 Y( ) とは

$$\omega = (\omega_x, \omega_y) \text{ に対して } Y(\omega) = \omega_y$$

である.

確率変数を使った表記と，それが表すものを以下に示す.

・〈x〉の意味は $X(\omega)$ である
・〈y〉の意味は $Y(\omega)$ である
・〈2x=y〉の意味は $2X(\omega)=Y(\omega)$ である
・〈2x=y である確率は 1/12〉の意味は

$$\mu(\{\omega \mid 2X(\omega)=Y(\omega)\})=1/12 \text{ である}$$

但しここに $\mu$ は事象空間の上に定義された確率測度函数を表す.

〈x〉,〈y〉,〈2x=y〉の意味論的値が《確率的に変化する》のは，その意味の中に，根元事象を動く変数 $\omega$ が自由に現れているからである. 一方，〈2x=y である確率は 1/12〉の真偽値は《確率的》ではない. その意味の中では根元事象を動く変数 $\omega$ が束縛されている.

確率変数を含む表現の値が確率的に変化するか否かは，構文上は登場しない根元事象を表す変数が意味論上束縛されているかどうか，に依る. 構文上登場し得ない暗黙の変数が意味論上束縛される，という点は座標変数の場合と同様である.

## 6　座標変数と確率変数の類似点

座標変数と確率変数の類似点には以下のものがある.

まず，双方とも，見掛けは変数であるが，意味は函数である. 座標変数は地点から数への函数である. 確率変数は，事象空間から，その確率変数の値が動く範囲への函数である.

第二点としては，文中に座標変数や確率変数が現れた場合，その函数値を表すが，また同時に，その式が成り立つという性質，またはその性質が成り立つものの集合を表す.

例えば，〈x=1, y=1 であるような点P〉では，P に対する $X(P)=1$, $Y(P)=1$ という性質に言及しているとも言える. また式〈y=2x-1〉は

$Y(p)=2X(p)-1$ が成り立つ点 p の集合，即ち直線を表す．〈$2x=y$ である確率は〉と言った場合の式 $2x=y$ は，$2X(\omega)=Y(\omega)$ が成り立つ $\omega$ の集合を表し，全体として，その集合の確率測度を表す．

このように，暗黙の変数が存在し，構文上は論理式であるものが，意味としては性質，または集合を表す，ということが，座標変数と確率変数の特徴である．

## 7　指標詞

座標変数と確率変数はある意味で指標詞に似ている．

指標詞の典型例は《私》《今》《此処》である．その他,《明日》《昨日》《貴方》等も指標詞に含まれる．[文献6]

《私》《今》《此処》は，発話者と発話時と発話地点を表すものである．例えば，

私は今は此処の教員です．

という文は，野本氏が 1988 年に北大で発言した場合には，

野本氏は 1988 年に北大の教員だった．

という意味となる．また，野本氏が 1992 年に都立大で発言した場合には，

野本氏は 1992 年に都立大の教員だった．

という意味となる．また，野本氏が 2002 年に創価大で発言した場合には，

野本氏は 2002 年に創価大の教員だった．

という意味となる．斯様にして，指標詞は発話に依存して値が変わる．そ

のために,《私》は発話から発話者への函数,《今》は発話から発話時への函数,《此処》は発話から発話地点への函数であると見做される.

指標詞が座標変数と違う所は,指標詞が表す函数の入力は必ずその発話である,という点である.

この発話は実は唯一とは限らない.例えば,野本氏が1992年に,現実には北大に滞在しているにも関わらずその場所を都立大と錯誤し,

私は今は此処の教員です.

と発言したとしよう.客観的にはこの文は

野本氏は1992年に北大の教員だった.

という意味になり,偽の文である.しかし野本氏の発話の意図は

野本氏は1992年に都立大の教員だった.

というものであり,これは真の文である.また,これを聴いた人が,野本氏は1988年と1992年を錯誤したのだ,と解釈したなら,その人にとってこの文は

野本氏は1988年に北大の教員だった.

という意味になる.斯様にして,発話をどのように解釈するかによって,函数としての指標詞の入力たる発話は変わる.

しかし函数の入力は,発話の解釈が決まれば一意に定まる.〈私は今は此処の教員です.〉という構文上の文は必ず《発話者は発話時に発話地点で教員である》という意味の決まった命題を表すのであって,何かの性質や,その性質が成り立つ集合を表すのではない.

一方,座標変数は任意の地点での函数値を表す.式$y=2x-1$では,各点でこの式が成り立つかどうかに注目する.確率変数が表す函数の入力は

事象空間の各点である.〈2x=yが成り立つ確率〉と言った場合には,この式が成り立つ事象,即ち事象空間の部分集合に注目する.

即ち,指標詞を含む見掛け上の文は常に命題を表すのに対し,座標変数や確率変数が現れる式は見掛け上の地点や根元事象に対する性質,またはその集合を表す.座標変数や確率変数は意味論的は函数であり,その入力となる暗黙の変数が存在するが,指標詞には暗黙の変数は存在しない.

しかしながら,もし指標詞の出現が発話と切り離された場合には,それは一般の発話からの函数となり,見掛け上の文は性質を表し得る.例えば

「明日は月曜」と言える日は日曜日である.

では,指標詞《明日》は引用符に括られていて特定の発話から切り離されている.この場合には,指標詞《明日》は〈翌日〉という意味になり,日付から日付への函数となる.このような用法は座標変数,確率変数と同様の働きをする.

## 8 結論

本稿では数学の中での変数の使い方を観る為に,恒等式の中の文字,方程式の未知数,座標変数と確率変数を取り挙げ,特に座標変数と確率変数について議論した.

座標変数と確率変数の特徴は,一つには構文上は現れ得ない地点や事象空間の点からの函数を表すことであり,二つ目には,座標変数や確率変数を含む論理式では地点や根元事象が束縛されて性質や集合を表すことがあるということである.

この特徴の一つ目は指標詞と共通する.また二つ目の特徴は指標詞のある種の用法にも見付けることが出来る.

座標変数と確率変数には暗黙の変数が存在した.この暗黙の変数と,恒等式の中の文字や方程式の未知数とに共通する変数の特徴として,意味論上束縛される,という点が挙げられる.

恒等式の中の文字は全称束縛された．方程式の未知数は，外見上は解との同値式が全称束縛され，暗黙にはラムダ抽象された．地点や根元事象を表す暗黙の変数は，ラムダ束縛されて性質やその外延となる集合を表した．

変数の機能として《文中で同一のものを表す》と《意味論上束縛される》の両者は共に重要である．

本稿は数学の言語哲学であった．言語哲学では意味論には通常，量化論理を用いる．量化論理では変数は自由変数と束縛変数しか登場しない．しかし数学では，以上のように，多様な変数が登場する．

## 謝　辞

本稿は2010年7月に開催された東京都立大学哲学会発表会での発表を元にして論文に纏めたものである．当日の議論に参加して戴いた聴衆の方々に感謝する．特に，有益な助言を下さった松阪陽一氏，及び，この研究の過程で励ましを戴いた岡本賢吾氏には感謝したい．

## 文　献

［1］ 竹内泉著，「数学と論理学」，『現代思想』35巻3号，2007年，180～185頁

［2］ 澤田利夫監修，『中学数学1』，教育出版，2008年1月，104頁

［3］ 重松敬一ら著，『中学数学1』，大阪書籍，2008年2月，104頁

［4］ 高橋幸雄著，『確率論』（基礎数理講座7），朝倉書店，2008年6月，60頁

［5］ 池田信行ら著，『確率論入門Ⅰ』（確率論教程シリーズ1），培風館，2006年5月，181頁

［6］ 野本和幸著，『現代の論理的意味論　フレーゲからクリプキまで』，岩波書店，1988年6月，1章6節