量子論における非局所性

東克明

目次

はじめに

本論考は，現代物理学の中心理論の一つである量子力学に関する概念的・哲学的問題を扱っている．なかでも，量子力学における非局所性を主題とする．論文は，大きく第 I 部と第 II 部からなる．

第 I 部「EPR 相関と非局所性」は，アインシュタイン・ポドルスキー・ローゼンによる有名な論証（EPR 論証）とベルの不等式がテーマである．まず，1 章で，EPR 論証とベルの不等式に関する従来の議論を著者の視点から再構成する．

何人かの科学哲学者によって，従来の議論で課されるある条件（「共通原因」）が不当に強すぎる，という指摘がなされた．2 章では，その指摘について考察する．仮にその指摘が正しいとして，当該条件を彼らが主張するように弱めても，ある特定の状態（「1 重項状態」）においては従来と同じ結論が得られることを数学的に示す．

1 章，2 章の結論は，量子力学という理論に「隠れた変数」に代表されるような理論外の概念装置を導入しても，その新たな理論は非局所的にならざるをえない，というものである．ここで非局所的にならざるをえないのは，隠れた変数理論などであり，量子力学自体ではない．その一方で，「量子力学は非局所的な理論である」といわれることがある．量子力学そのものが，一体いかなる意味で非局所的なのだろうか．3 章では，この問いについて考察する．

第 II 部「コッヘン＝シュペッカーの NO-GO 定理と非局所性」は，コッヘンとシュペッカーが示した有名な定理と，その定理が非局所性とどのように関わるのかがテーマである．4 章では，まず，コッヘン＝シュペッカーの定理を，ペレスによる最近の定式化において示し，次にこの定理と非局所性との関係を示した興味深い定理（ヘイウッドとレッドヘッドによる定理）を紹介する．

5 章は，6 章で行うやや抽象度の高い議論を理解するための準備にあてられる．「ヒルベルト空間上の射影作用素からなる束を，量子力学における観測命題のなす束と解釈できる」といわれることがある．5 章では，その主張にどのようにして根拠を与えることができるのか，を論じ，6 章で行う議論の手法に基礎付けを与える．

4 章の議論は，二つの点で制約を課されている．まず，ヒルベルト空間の次元が有限次元である点，そして議論が行われる数学的設定が非相対論的である点である．しかし，非局所性をめぐる問題は，次元に制限なく論じられる方が好ましいし，そのうえできることなら相対論的設定において論じられるべきである．そこで，6 章では，それらの制約を撤廃し，完全な一般性のもとで 4 章に類似の結論を与える．また，そこで得られた議論を，

最近，話題となっているコンテクスチュアリズムに適用する．

なお，本論文の多くの部分は，すでに出版された著作と論文に手を加えたものである．本論文の 1 章，3 章，4 章は勁草書房から出版された共著本『量子という謎』（文献 [55]）における著者の担当章（2 章と 3 章）を加筆，修正したものである．また，本論文の 2 章は，国際誌 *Foundations of Physics* に掲載された論文 [25] の主要部分を日本語に直したものである．さらに，本論文の 6 章は学会誌 *Annals of the Japan Association for Philosophy of Science* に掲載された論文 [26] を日本語に直し，議論を理解するのに必要な数学的事項を書き加えたものである．なお，この論文により，科学基礎論学会の奨励賞を受賞した．

*

最後に，本論文の執筆に際しお世話になった方々に，謝意を表したい．まず，本論文の主査，副査をしてくださった岡本賢吾教授，丹治信春名誉教授，松阪陽一准教授に心から感謝したい．なかでも，丹治先生には，東京都立大学の大学院にて長年にわたりご指導いただき，量子力学の哲学の授業まで開講していただいた．岡本先生そして松阪先生にも，論文の審査に貴重な時間を割いていただき，重要なコメントを頂戴した．

また，石垣寿郎北海道大学名誉教授にも感謝したい．石垣先生には，著者が日本学術振興会特別研究員として北海道大学理学研究科科学基礎論研究室で一年間研究した際，量子力学の哲学，そして科学哲学の議論の進め方について，多くのことを教えていただいた．今回も，入退院を繰り返す体調がすぐれないなか，論文を読んでいただき，大変貴重なコメントを多数いただいた．それらのコメントは一つ一つが「重く」，著者の軽はずみな議論の進め方を恥じ，幾度となく論文に手を加えた．

最後に，著者が日本学術振興会特別研究員として一年間研究した北海道大学の科学基礎論研究室の面々にお礼申し上げたい．彼らと過ごした一年間は，本当に充実した一年間であった．量子力学の哲学はじめ科学哲学についてたくさんの議論をし，束論，作用素代数や場の量子論など本論文で使用した数学とその意味について多くのことを教えていただいた．

第 I 部
EPR 相関と非局所性

1　EPR 論証とベルの不等式

アインシュタイン，ポドルスキーとローゼンは 1935 年に「物理的実在の量子力学的記述は完全と考えられるか？」というタイトルの論文 [17] を発表した．この論文は著者 3 人の頭文字をとって EPR 論文と呼ばれる．この論文で，彼らは量子力学の予測が正しいとすると，波動関数を用いた実在の記述は不完全であると考えざるをえない，と論じた．まず，1.1 節で彼らの議論 (以下ではこの議論を EPR 論証と呼ぶ）と，それへの反論，とりわけボーアによる反論を概観する．EPR 論証の正否をめぐる概念的論争は，ベルの不等式により実験的に検証できるようになった．1.2 節では，ベルの不等式とその実験的検証について，重要事項を確認する．

1.1　EPR 論証とそれへの反応

1.1.1　スピン 1/2 と 1 重項状態

原論文では位置と運動量といった物理量を用いて論証が与えられたが，ここではスピン角運動量を用いた，数学的に簡略化された例[*1]を用いる．これは，数学の技術的側面に煩わされることなく，概念的に本質的な点に注目するためである．まず，スピン角運動量について，基本事項を確認しておきたい．

よく知られているように，電子は原子核のまわりを公転しており，（軌道の描像をもつことはできないものの）角運動量をもつ．それのみならず，電子は，自転に相当するスピンと呼ばれる自転角運動量も，測定可能な物理量としてもつ．ある特定の方向を軸として電子のスピンを測定するとその測定値は $+\hbar/2$ か $-\hbar/2$ のどちらかであり，物理空間における直交系を適当にとると，その直交系におけるスピン成分 (s_x, s_y, s_z) はそれぞれ 2×2 のエルミート行列によって表現される．スピンの z 成分 s_z のエルミート行列の固有状態を基底にとり，s_x，s_y，s_z のそれぞれを行列表示すると次のようになる．

$$s_x \to \begin{pmatrix} 0 & \hbar/2 \\ \hbar/2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad s_y \to \begin{pmatrix} 0 & -i\hbar/2 \\ i\hbar/2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad s_z \to \begin{pmatrix} \hbar/2 & 0 \\ 0 & -\hbar/2 \end{pmatrix}$$

これらはすべて固有値 $+\hbar/2$ と $-\hbar/2$ をもつエルミート行列である．以下では，それぞれ

[*1] これは，隠れた変数理論で有名な物理学者ボームによって定式化されたものである（文献 [9] の 22 章)．

のエルミート行列の固有ベクトルを次のように表記する．例えば s_z ならば，固有値 $+\hbar/2$ の固有ベクトルを $|s_z=+\rangle$，固有値 $-\hbar/2$ の固有ベクトルを $|s_z=-\rangle$ と表す．

EPR 論証では，議論に次の「1 重項状態」にある 2 粒子系を用いる．

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|s_z=+\rangle_1 \otimes\,|s_z=-\rangle_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|s_z=-\rangle_1 \otimes\,|s_z=+\rangle_2 \tag{1}$$

「1 重項状態」は次の重要な性質をもつ．s_x の固有ベクトルを基底にとって状態 $|\Psi\rangle$ を表示し直してみると，

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|s_x=+\rangle_1 \otimes\,|s_x=-\rangle_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|s_x=-\rangle_1 \otimes\,|s_x=+\rangle_2 \tag{2}$$

となり，(1) と (2) の形式は（位相因子 $e^{i\theta}$ の不定性を除くと）同一となる．3 次元物理空間において適当な直交系を一つとり，どのスピン成分行列の固有ベクトルを用いて $|\Psi\rangle$ を表示し直しても，やはり式の形式は変わらない．

次に，量子力学にしたがうと，状態 $|\Psi\rangle$ によっていかなる測定結果が予測されるのかをみていこう．まず (1) より，2 粒子両方にたいし s_z 測定をすると，測定値 $[+,-]$ を得る確率は 1/2，測定値 $[-,+]$ を得る確率も 1/2 であることがわかる．ここで重要なことは，2 粒子それぞれに s_z 測定をするとその測定値はつねに正負が反対となることである．すると，粒子 1 についての s_z の測定結果から，粒子 2 にたいする s_z 測定の結果を確実に予測できることになる．粒子 1 の測定結果が $+$ ならば，粒子 2 の測定結果は確実に $-$ であり，粒子 1 の測定結果が $-$ ならば，粒子 2 の測定結果は確実に $+$ である．また，同じ状態 $|\Psi\rangle$ を s_x の固有ベクトルを用いて表示した等式 (2) から，s_x についても同様の予測が成立することがわかる．粒子 1 について s_x を測定すると，その測定結果から粒子 2 にたいする s_x 測定の結果を確実に予測できるのである．2 粒子にたいし同じスピン成分を測定する場合，以上で述べたのと同様のことが，任意のスピン成分について成立する．それは，上で述べたように，3 次元物理空間における直交系を適当に一つとり，どのスピン成分行列の固有ベクトルを用いて $|\Psi\rangle$ を表示し直しても，式の形式が (1) や (2) とまったく同じ形式になることから明らかであろう．

1.1.2 EPR 論証の構造

EPR 論証では結論の導出に三つの条件が用いられる．それらを明確にしつつ，論証をみていこう．ただし，二つの条件は EPR 論文のなかで明示的に述べられているが，残り一つの条件（「局所性」）は，おそらく彼らにとってそれを満たすことが自明であったために，はっきりとは述べられていない．

実在性の十分条件　ある系をいかなる仕方においても一切乱すことなく，ある物理量の値を確実に（すなわち，確率 1 で）予測できるならば，その物理量に対応する物理的実在の要素が存在する．（文献 [17] の p. 777）

要するに，対象とする系にいかなる物理的影響も与えることなく，ある物理量の測定値が確実にわかるならば，その物理量の値（測定値）はあらかじめ決まっていた[*2]と考えてよい，ということだ．この条件では「物理的実在の要素」といった一見すると難しい表現を用いているが，それによって意味することは，測定前にすでに測定値が一意に決まっていると考えられる場合，その値は測定という人間の知る行為とは無関係なので「実在」と考えてよいということである．

さて，かつて相互作用した結果，二つの電子はスピンの「1 重項状態」にあり，現時点ではそれら 2 粒子は空間的に遠く分離して存在しているとしよう．2 粒子は状態 $|\Psi\rangle$ にあるので，前節でみたように，粒子 1 について s_z を測定すると，その測定結果から粒子 2 にたいする s_z 測定の結果を確実に予測できる．ここで次の条件について考えよう．

局所性　粒子 1 にたいする測定は，粒子 2 にたいし，いかなる物理的影響もおよぼさない[*3].

原理的には 2 粒子は測定時にどれだけ遠くに離れていてもよいので，「局所性」が成立すると考えるのは自然である．すると，粒子 1 の s_z を測定することによって，粒子 2 にいかなる物理的影響も与えることなく，粒子 2 の s_z の値を確実に予測でき，「実在性の十分

[*2] 「物理量の値は決まっている」というとき，その決まっている値を次の二通りの仕方で解釈できる．一つは，その物理量を測定するか，否かとは独立に，系はその物理量について決まったある値を所有している（所有値）という解釈である．この場合，その物理量を測定すると，系の所有値が忠実に測定装置にディスプレイされる（忠実な測定），と考えるのが自然である．もう一つは，測定したときに得られる値が測定以前に決まっている（あらかじめ決まっている測定値）という解釈である．「所有値 + 忠実な測定」という解釈は，「あらかじめ決まっている測定値」という解釈を含意するが，その逆が成立するとは限らない．測定値はあらかじめ決まっているが，所有値をもつことを否定することは，少なくとも論理的には可能である．この意味で，「あらかじめ決まっている測定値」という解釈は，「所有値 + 忠実な測定」という解釈より弱い．これから説明するように，この弱い解釈においても（すなわち，対象とする系が所有値を持つことを仮定せず，単に測定値があらかじめ決まっていると考えるだけでも）EPR 論証は成立する．「所有値＋忠実な測定」と「あらかじめ決まっている測定値」という考え方について，より詳しくは，66 頁を参照してほしい．

[*3] この条件の述べ方はかなり不明瞭である．粒子 1 にたいしどの物理量を測定しようとも（例えば s_z を測定しようと，s_x を測定しようと）粒子 2 にいかなる影響も与えないといっているのか，それともある物理量を測定してもしなくても（例えば s_z を測定してもしなくても），粒子 2 にいかなる影響も与えないといっているのか，定かでない．ただし，現時点では，この点をあえて明瞭にせず次節で言及する．著者は，この不明瞭さがボーアとアインシュタインの相互理解を困難にする一因であると考えている．

条件」によって，粒子 2 の s_z に対応する物理的実在の要素が存在することとなる．要するに，「実在性の十分条件」と「局所性」が正しいならば，粒子 2 の s_z の測定値は測定前から決まっていたということである．

以上の話は s_z についてであったが，s_x についても同様のことが成立する．なぜなら，前節でみたように，状態 $|\Psi\rangle$ にある 2 粒子のうち粒子 1 について s_x を測定すると，その測定結果から粒子 2 にたいする s_x 測定の結果を確実に予測できるからである．したがって，「実在性の十分条件」と「局所性」が正しいならば，粒子 2 の s_x の測定値も測定前から決まっていた（「s_x に対応する物理的実在の要素が存在する」）こととなる．

このようにして判明した物理的実在の要素にたいして，EPR 論証では次の条件を適用する．

理論が完全であるための必要条件　物理的実在のあらゆる要素は，その物理理論のなかに必ず一つの対応物をもたなければならない．（文献 [17] の p. 777）

簡単にいいなおすと，ある理論が完全な理論であるならば，その理論には実在の要素であると判明した事柄についての記述がなければならない，といっているのである．対偶をとると，実在の要素であると判明した事柄についての記述がない理論は不完全である，ということである．すでにみたように，「実在性の十分条件」と「局所性」が正しいならば，粒子 2 の s_z と s_x の測定値は測定前から決まっているのであり，それらは「実在の要素」であった．だが，ここで議論している系は「1 重項状態」にあり，式 (1) と (2) の状態表示をみればわかるように，その状態は粒子 2 の s_z 測定と s_x 測定について確定した予測を与えるものではない．さらにいえば，そもそも量子力学には，s_z 測定と s_x 測定の両方にたいし同時に確定した予測を与える状態など存在しないのである．そこで，EPR 論文は，量子力学による状態の記述は不完全であると結論付けたのである．

1.1.3　ボーアの反論とアインシュタインの疑念

量子力学を生みだした中心人物であったボーアは，EPR 論文が出版されたのと同じ年 1935 年に，EPR 論文への反論 [10] を出版した．ボーアの反論のポイントは，位置と運動量に代表される非可換な物理量の測定においては，一方の物理量を測定すると，もう一方の物理量の値が乱され，それゆえそれらの物理量の値を同時に知ることはできない，ということにある．このことに依拠して，ボーアは EPR 論証にたいし次のように反論する．

- 粒子 1 の位置 $[q_1]$ を知ると粒子 2 の位置 $[q_2]$ を推論（予測）できる（$q_1 \Rightarrow q_2$）．
- 粒子 1 の運動量 $[p_1]$ を知ると粒子 2 の運動量 $[p_2]$ を推論（予測）できる（$p_1 \Rightarrow p_2$）．

- しかし，粒子 1 の位置と運動量を同時に知ることはできない（$\neg(q_1 \wedge p_1)$）.
- よって，粒子 2 の位置と運動量の値は同時には確定している（$q_2 \wedge p_2$）と推論できない.

ボーアの文章は難しく様々な理解の仕方が可能なのは事実だが[*4]，下の引用箇所は，少なくともこの論点に関しては，上述の著者の理解に問題がないことを示していると思う．少々長くなるが，そのまま引用する.

> 一方の粒子 [粒子 1] の位置 [q_1] の測定とは，ただ単に，空間の基準枠を定めている支持台に剛体的に固定されている装置とその粒子の振る舞いとの間の対応づけの確定のみを意味している．それゆえ記されている実験条件では，このような測定は，さもなければまったく知ることのできない，その粒子がスリットを通過したときの障壁のこのような基準系に関する位置についての知識をも提供する．実際，このようにしてのみ，もう一方の粒子 [粒子 2] の装置の他の部分に相対的なはじめの位置 [q_2] についての結論を下す根拠を得るのである．しかし，本質的に制御不可能な運動量が第一の粒子から支持台に移行するのを容認することで，この手続きにより私たちは，障壁と二つの粒子よりなる系にたいしてその後に運動量保存則を適用する可能性を奪われ，それゆえ第二の粒子の振る舞いにかんする予言に運動量の観念を曖昧さなく適用するための唯一の根拠を喪失する．逆に，もしも私たちが一方の粒子 [粒子 1] の運動量 [p_1] の測定を選択するならば，そのような測定には避けられない変位により，この粒子の振る舞いから装置の他の部分に相対的な隔壁の位置を導き出すどのような可能性をも失い，それゆえ私たちは，もう一方の粒子 [粒子 2] の位置 [q_2] にかんしてなんらかの予言をする根拠をもたなくなるのである.（文献 [10] 翻訳 113 頁，原文は 再録文献 [49] の p. 147.）

ボーアの反論を，いま議論している「1 重項状態」にある 2 粒子系のスピン物理量の測定という状況にそっていいなおすと次のようになる.

- 粒子 1 の s_z を測定すると，粒子 2 の s_z の値がわかる.
- 粒子 1 の s_x の測定をすると，粒子 2 の s_x の値がわかる.
- しかし，粒子 1 の s_z と s_x を同時に測定することはできない.
- よって，粒子 2 の s_z と s_x の値が同時に確定していると結論できない.

[*4] 以前，ボーアの論文にたいする著者の理解を，小澤正直氏に説明したところ，そのような理解の仕方は強すぎるのでは，との指摘を受けたことがある．しかし，下の引用部分をみれば，著者の理解に問題はないことがわかると思う.

かくして，EPR 論文の結論に反して，粒子 2 の s_z と s_x が同時に実在の要素であることは不可能であると結論付けられるのである．

非可換物理量の同時測定不可能性に依拠した，以上のボーアの反論が，ある程度の説得力をもつのは確かだ．だが，「局所性」の正しさを受け入れるならば，次のように再反論できるだろう．「局所性」が正しい，すなわち粒子 1 にたいする測定は粒子 2 にたいしいかなる物理的影響も与えないということが正しいとしよう．そのとき，粒子 1 にたいし s_z 測定をしようと，しまいと，粒子 2 にたいする s_z の測定結果にはいかなる違いも生じないことになる．すると，たとえ粒子 1 の s_z 測定を行わなかったとしても，粒子 1 の s_z 測定を行ったときと同じように，粒子 2 の s_z 測定の結果はあらかじめ決まっていたことになる．もちろん，粒子 1 にたいして s_z 測定をしない場合，粒子 2 にたいする s_z 測定の結果を確実に予測することはできない．だが，ここでは，予測できるかできないかといった認識レベルの話でなく，局所性を仮定した場合の実在像について話をしていることに注意してほしい．

同様に，たとえ粒子 1 の s_x 測定を行わなかったとしても，粒子 1 の s_x 測定を行ったときと同じように，粒子 2 の s_x 測定の結果はあらかじめ決まっていたことになる．よって，粒子 1 になんの測定を行わなくても，粒子 2 の s_z と s_x の測定値はあらかじめ決まっていたことになる．ボーアの反論のポイントは粒子 1 の s_z と s_x を同時測定できないことにあった．だが，ここでみた再反論では粒子 1 のいかなる物理量をも実際に測定する必要はない．なんの測定もしていないのだから，同時測定可能性とは無関係である．

じつは，以上の再反論はアインシュタイン自身によるものである[*5]．この再反論のポイントを明確にしよう．ボーアの反論において比較対照されるのは，粒子 1 にたいする非可換な二つの物理量（例えば s_z と s_x）の測定である．それらの同時測定が不可能なので粒子 2 にたいする s_z と s_x の測定結果についての推論を同時に行うことはできない，とボーアは論じたのである．

一方，アインシュタインの再反論において比較対照されるのは，粒子 1 にたいし一つの物理量（例えば s_z）の測定を行った場合と行わなかった場合である．そして，もし「局所性」が正しいならばその二つの場合において粒子 2 に生じることに違いはない，と論じたのである．実際，アインシュタインは次のようにいう．

> われわれが S^1〔粒子 1 のこと〕での完全測定にもとづいて得る S^2〔粒子 2 のこと〕

[*5] アインシュタインがこの再反論を述べた論文 [16] は有名だが，再反論のポイントは正しく理解されていないように思われる．ボーアの考えを擁護する人は，この再反論にどのように答えられるか真剣に考えるべきである．

> に関するあらゆる予言は，S^1 での測定が全然行われなかったときでも，系 S^2 にたいしては成立しなければならない．このことは，S^2 にたいして，ψ_2，$\underline{\psi_2}$〔等式 (1) や (2) に対応する状態表示のこと〕などをとったときにひきだすことのできる予言が，すべて同時に成立しなければならないことを意味しているであろう．（文献 [16] p. 324，翻訳 199 頁．）*6

ここまでくると，ボーアとアインシュタインとでは「局所性」として微妙に異なることを考えるいることがわかる．ボーアが批判の対象とした「局所性」条件は，粒子 1 にたいし s_z と s_x のどちらを測定しても，粒子 2 の測定結果に変化はない，というものである．一方，アインシュタインが考えた「局所性」条件は，粒子 1 にたいし s_z を測定してもしなくても，粒子 2 の測定結果に変化はない，というものである．後者のように「局所性」を考えると，ボーアの反論は適用できない．ベルの不等式の破れが実験的に確かめられたいま，アインシュタインをボーア＝アインシュタイン論争の敗者とみなす記述が散見されるが，以上のように理解するとき，アインシュタインのどこがどのように間違っていたのかは決して明らかでない．

このように著者はアインシュタインに好意的だが，このままでは，少しボーアに冷淡すぎるかもしれない．ボーアを擁護する多くの論者が引用する次の箇所について考えよう．

> 確かに，すぐ上に見たようなケースでは，測定過程の最後の決定的な段階では，考察している系（粒子 2）にたいして力学的擾乱が加わっていないことは明らかである．しかしこの段階でさえ，**その系の将来の振る舞いに関していかなるタイプの予言が可能なのかを定める諸条件そのものにたいする影響**という問題が本質的なものとして存在するのである．（文献 [10] 翻訳 114 頁，原文は 再録文献 [49] の p. 148.）*7

ボーアはこのように述べるのだが，残念ながら彼のいう「影響」がいかなるものなのかについて明言しない．いうまでもなく，粒子 2 にたいするこの「影響」は単なる物理的影響ではありえない．ボーアとて，遠く離れた 2 粒子の測定間に瞬時に伝わる物理的影響が存在するといった非常に露骨な形での「局所性」の破綻は受け入れないだろう．では，認識論的な影響，すなわち粒子 1 の測定結果を知った測定者の粒子 2 についての知識状態の変化なのだろうか．それもありえない．なぜなら，もし単なる認識論的影響であるとすると，粒子 2 への物理的影響は一切ないという「局所性」を受け入れるのが自然であり，そ

*6 引用文中の〔　〕は本文と対応付けるために著者が付け加えた．

*7 引用文中の太字は原著者による．

のときにはアインシュタインの再反論が適用できるからである．そこで，ボーアを擁護する場合には，単なる物理的影響とも，認識論的影響ともいえない第三の影響について，それがいかなるものなのかをより明確にしなければならない．ただし，そのような試みが皆無なわけではない．科学哲学者のハルヴォーソンとクリフトン [21] はボーアの考えにおいて「影響」がいかなるものなのかについての数学的で厳密な定式化を行っている*8．彼らの解釈については，6 章で再び議論する．

量子力学の完全性をめぐるボーアとアインシュタインによる概念的な論争は，やがてアインシュタインの議論が正しいのか否かを実験により判定しようとする次のステップへと移行した．次節ではこのことについてみていこう．

1.2　ベルタイプの不等式と非局所性

1.2.1　ベルの議論

当時，CERN の物理学者であったベルは，EPR 論証がいうようにそれぞれのスピン物理量の測定値が局所性を満たすようにあらかじめ決まっているとすると，実験によって検証可能な，ある不等式が導出されることを示した（文献 [5]）．この不等式はベルの不等式と呼ばれる．ベルの不等式は量子力学の予測と不整合であった．すると，各スピン測定の測定値があらかじめ決まっているのか否か，を実験によって確かめられることになる．仮に実験結果がベルの不等式を満たすならば，量子力学の予測と異なる実験結果が得られたことになり，量子力学にはなんらかの欠陥があることになる．一方，もしベルの不等式が破れることが実験的に確かめられたならば，EPR 論文に反して，各スピン測定の値が測定前から決まっていたと考えることはできない．

本節では，ベルの不等式そのものを紹介することはせず，彼の議論のエッセンスを別の仕方で紹介したい*9．まず状況設定から説明する．これまで同様，「1 重項状態」にある 2 粒子系を考える．物理空間（3 次元実-空間）におけるある直交系 (x, y, z) において，z 方向と直交する平面上にあり相互に 120° をなす三つの方向 (x, a, b) をとり（下の図 1 を参照），それぞれの粒子にたいしそれら 3 方向のスピン成分測定を行うとする．それら三つのスピン成分の測定を 2 粒子それぞれについて考えよう．以下では，各スピン成分を粒子ごとに区別して，粒子 1 の各スピン成分については s_x^I，s_a^I，s_b^I，粒子 2 の各スピン成分については s_x^{II}，s_a^{II}，s_b^{II} と表記する．

*8 ハルヴォーソンとクリフトンの研究は，最近，2 人の日本人研究者小澤と北島 [35] によって一般化され，注目を集めている．

*9 以下で紹介する議論を，著者はアルバートの本 [1] の脚注ではじめて知った．

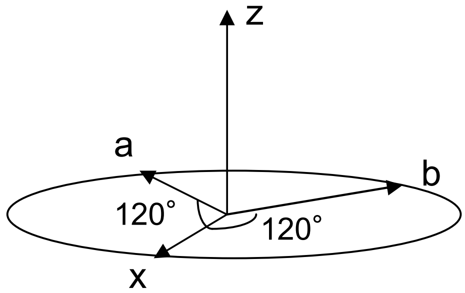

図 1

s_x^I	s_a^I	s_b^I	s_x^{II}	s_a^{II}	s_b^{II}
$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$
$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$
$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$
$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$
$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$
$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$

表 1　決定論的制約を満たす値のリスト

EPR 論文が論じたように，2 粒子系にたいする，各スピン測定の測定値があらかじめ決まっているとしよう．そのとき，それぞれの粒子対は，各スピン成分についてあらかじめ決まっている測定値のリストをもっていることになる．もしいかなる制約もないならば，そのようなリストには $2^6 = 64$ 通りの値付与の仕方がある．なぜなら，いま 6 個のスピン成分を考えているが，一つのスピン成分につき 2 通り（$+\hbar/2$ と $-\hbar/2$）の値付与が可能だからである．だが，実際には値のリストは，次の二つの制約を満たさねばならない．

決定論的制約　粒子 1 と粒子 2 の同じスピン成分の値の正負は反対である．（例えば，s_x^I と s_x^{II} の値の符号は反対である．）

「決定論的制約」を課す理由は，いま「1 重項状態」にある 2 粒子系について考えていることから明らかであろう．この制約により，可能な値のリストは表 1 のように 8 通りとなる．ただし，その表では数値 $\hbar/2$ を省いて正負のみを表記している．

もう一つの制約は，量子力学におけるある統計的予測に由来するものである．量子力学

によると，粒子 1 にたいするスピン測定の方向と粒子 2 にたいするスピン測定の方向のなす角が θ であるとき，それらの測定値の正負が一致しない確率は $\cos^2(\theta/2)$ である．いま考えている状況では，x，a，b が相互になす角はそれぞれ 120° なので，2 粒子にたいし異なる方向のスピン成分を測定したとき，測定値の正負が異なる確率は 1/4 である．さて，「1 重項状態」にある粒子対のアンサンブル（集団）を用意したとしよう．そのアンサンブルに属する粒子対は上の 8 通りのなかのどれか一つの値のリストをもつ．そして，アンサンブルは，次の統計的な制約を満たさねばならない．

統計的制約　粒子 1 と粒子 2 の異なるスピン成分の値の正負が異なる割合は 1/4 である．

例えば，s_x^I と s_a^{II} の値の正負が異なる割合は 1/4 である．

さて，以下で決定論的制約と統計的制約の両方を同時には満たせないことを示そう．まず，8 通りの値リストのどの行をとっても，

$$s_x^I \text{ と } s_a^{II} \quad \text{あるいは} \quad s_b^I \text{ と } s_a^{II} \quad \text{あるいは} \quad s_b^I \text{ と } s_x^{II}$$

の少なくともどれか一つのペアは必ず異符号でなければならない．なぜなら，もしすべて同符号ならば（背理法の仮定），s_x^I と s_x^{II} が同符号となり，決定論的制約と矛盾するからである．したがって，アンサンブルに属する**すべて**の粒子対において，二つのスピン成分からなる三つのペアのなかで少なくとも一つは**必ず**異符号である．一方，統計的制約によると，三つのペアのそれぞれについて（例えば，s_x^I と s_a^{II} について），異符号である割合は 1/4 であり，三つのペアのなかで少なくとも一つが異符合である割合は**高々**（最大でも）$1/4+1/4+1/4=3/4$ に過ぎない．したがって，「1 重項状態」にある粒子対について，その測定値があらかじめ決まっているとすると，そのアンサンブルは決定論的制約と統計的制約を同時に満たすことはできないのである．

1.2.2　確率的隠れた変数の不可能性

前節の議論はいつでも適用可能な議論ではなく，その適用範囲は次の 2 点で制限されている．

1. 「1 重項状態」という非常に特殊な状態に系があるときのみ適用可能である．
2. 測定値があらかじめ決まっていると考える場合にのみ適用可能である．

はたして，前節と同様の結論が，「1 重項状態」以外の状態に 2 粒子系があるときにも得られるのだろうか．

また，二つ目の制限については次のことを考える必要がある．前節の議論は，スピン測定の値があらかじめ決まっているという考え方の下で進められた．この考え方を，われわれには制御不可能な（あるいは，少なくとも現在のところ制御できない）ある変数 λ が存在し，その値に応じてスピン測定の値はあらかじめ決まっていると述べることもできる．われわれには制御できない「隠れた変数」λ の値によって，測定値が決定論的に決まっているということだ[*10]．これは「決定論的隠れた変数」という考え方である．

前節の結論は，（系の状態が「1 重項状態」であるときに）量子力学の予測と整合的な（局所性を満たす）決定論的隠れた変数は存在しない，ということである．しかし，隠れた変数が決定論的であることは局所性を維持するために不可欠ではないであろう．測定値でなく，各々の測定結果が得られる確率が，変数 λ の値によって決まると考えると，局所性を維持できるかもしれない．このような考え方を「確率的隠れた変数」という．本節では，「確率的隠れた変数」が存在し，そのうえそれが局所性に関する諸条件を満たすと仮定すると，ベルタイプの不等式[*11]の一つ，クラウザー＝ホーンの不等式 [13] が導出され，その不等式を満たすことと量子力学の予測とは両立しないことをみていく．「隠れた変数」を決定論的なものから確率的なものへと，その条件を弱めても，残念ながら結論は変わらない．

不等式を導出する前に，状況設定と表記法について下の時空図（図 2）を用いて説明しよう．二つの電子が R_{12} において相互作用し，その後それぞれの電子（粒子 1，粒子 2 と呼ぶ）にたいし「空間的に分離した」有界時空領域 R_1，R_2 においてスピン測定が行われるとする．粒子 1 にたいするスピン測定装置は二つのスピン成分 a と a' の測定が可能であるとする．スピン成分 a と a' それぞれの測定結果を A，A' と表す．A と A' がとりうる値は，$+\hbar/2$ か $-\hbar/2$ のどちらかである．同様に，粒子 2 のスピン成分を b，b' と表記し，それらの測定結果をそれぞれ B，B' と表す．また，2 粒子それぞれにたいする測定装置の設定は（それぞれの粒子にたいし測定可能な二つのスピン成分のうちどちらを測定するかは），たとえ粒子対が粒子源を離れた後であっても自由に変えられるとする．

次に，粒子 1 にたいしてスピン a 成分を，粒子 2 にたいしてスピン b 成分を測定する場合を具体例に，確率の表記法を説明する．「確率的隠れた変数」では，a，b の測定結果 A，

[*10] もしそのような変数がわれわれによって制御可能であるならば，いわば「隠れていない」ならば，ベルの不等式などもちだすまでもなく，その変数そのものを制御することによってそのような変数を擁する理論と量子力学との間に経験的差異を生じさせることができるだろう．ベルの偉業は，たとえ変数そのものを制御できなくとも，そのような変数を擁する理論と量子力学との間にある経験的な違いが生じることを示した点にある．

[*11] ベルの不等式が導出された後，多くの研究者がベル自身が導出したのと異なる不等式を導出した．それらの不等式はベルタイプの不等式と総称される．

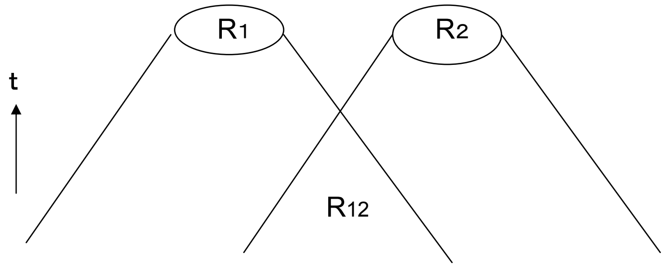

図 2

B が得られる確率は，変数 λ によって決まると考える．そこで，その確率を $P(\,A\,B\,|\,\lambda\,)^{ab}$ と表記する．なお，右上の添え字 ab は，左からそれぞれ粒子 1，粒子 2 にたいしどの物理量を測定するのか，すなわちそれぞれの粒子にたいする測定装置の設定を表している．あとは必要となった時点で説明する．

単に，隠れた変数の値に依存して測定結果の確率が決まるだけでは，その「確率的隠れた変数」理論が局所性を満たすものなのか否かは定かでない．そこで，どのような条件を満たせば「確率的隠れた変数」理論は局所的となるのかを定式化する必要がある．これからみる不等式の導出では，局所性に関わる次の三つの条件が用いられる[12]．それらの条件を，粒子 1 にたいしてスピン a 成分を，粒子 2 にたいしてスピン b 成分を測定する場合を具体例に，みていこう．

共通原因 $\quad P(\,A\,B\,|\,\lambda\,)^{ab} = P(\,A\,|\,\lambda\,)^{ab}P(\,B\,|\,\lambda\,)^{ab}$

非局所的文脈-独立性 $\quad P(\,A\,|\,\lambda\,)^{ab} = P(\,A\,|\,\lambda\,)^{a}$

$\quad P(\,B\,|\,\lambda\,)^{ab} = P(\,B\,|\,\lambda\,)^{b}$

λ**-独立性** $\quad \rho(\,\lambda\,)^{ab} = \rho(\,\lambda\,)$

一つ目の条件**共通原因**から説明しよう．一般に，二つの事象 E_1，E_2 について，それらが同時に生じる確率が，それぞれが生じる確率の積より大きいとき，すなわち $P(E_1\ \&\ E_2) \gneqq P(E_1)P(E_2)$ であるとき，正の相関があるという．もちろん，このような相関は，EPR 論文が議論した状況においてもみられる．例えば，「1 重項状態」にある 2 粒子それぞれにたいしスピン z 成分を測定するとしよう．そのとき，粒子 1 にたいし $+\hbar/2$，粒子 2 にたいし $-\hbar/2$ を測定結果として同時に得る確率は 1/2 であった．一方，粒子 1 だけに注目すると，測定結果 $+\hbar/2$ を得る確率は 1/2 であり，同様に粒子 2 だけ

[12] 以下の三つの条件から不等式を導出したのは，科学哲学者のジャレット [28] が最初であろう．

に注目すると，測定結果 $-\hbar/2$ を得る確率は $1/2$ である．以上より，$1/2 \gneq 1/2 \times 1/2$ なので正の相関がある．

さて，このように二つの事象 E_1 と E_2 の間に正の相関があるときには，その相関を次の 2 通りのどちらかの仕方で説明するのが自然である．

1. E_1 が E_2 の原因である．（あるいは，E_2 が E_1 の原因である．）
2. E_1 と E_2 に共通の原因が存在する．（例えば,「気圧計の大幅な低下」と「嵐になること」との間には正の相関があるが，それら二つは「強い低気圧の到来」という共通の原因により生じる．）

現代物理学は，少なくとも公式には，近接的でない原因-結果の関係や，光の速度を超えて伝播する物理的な過程を認めない．そこで，二つ目の選択肢を採用するのが自然である．すると，次に問題になるのは，二つの事象に共通の原因 C をどのように特定すべきか，である．この問いは科学哲学者ライヘンバッハによりはじめに考えられた問いであり，いまだに彼の解答 [41] は強い影響力をもっている．ここでは，ライヘンバッハの解答を詳細に紹介することはせず*13，そのエッセンスだけをみていこう．彼は次の条件を E_1 と E_2 の共通原因 C に課した．

$$P(E_1 \ \& \ E_2|C) = P(E_1|C)P(E_2|C)$$

E_1 と E_2 の間に相関があったのだが，C で条件付けるとその相関は消え，二つの事象は統計的に独立になる，ということだ．C に相対的には相関が消えるのだから，C によって相関が説明されたと考えるのである．

確率的隠れた変数理論が満たすべき一つ目の条件は，このような共通原因の考え方を反映したものである．λ で条件付けると,（遠く離れて生じる）二つの測定結果は統計的に独立となる，といっているのだ．この考え方にしたがうと，われわれは λ の値を（少なくともいまのところ）制御できないので，解明できない相関があるようにみえていることになる．おそらく，この条件を課す動機は，変数 λ の値が R_1 と R_2 それぞれの過去光円錐の共通部分 R_{12} 上で指定される場合にもっとも理解しやすいであろう．変数 λ の値が，まだ 2 粒子が相互作用しているときにそれらが存在している近傍の非常に狭い領域上で指定される場合である．そのような変数 λ に相対的には量子力学的相関が消えるなら，そのような変数を含むモデルを局所的な確率的隠れた変数モデルの候補と考えてよいであろう．

*13 ライヘンバッハの見解については次章で詳細にみる．

続けて，二つ目の条件**非局所的文脈-独立性**について説明しよう．この条件によって，一方の粒子にたいする測定結果はもう一方の粒子にたいする測定装置の設定がどのようになっているかに（すなわち，どのスピン成分を測定するかに）依存しないということが，要請される．一方の粒子の測定結果は，他方の粒子にたいする測定文脈から独立であるという要請なので，「非局所的文脈-独立性」と呼ぶ．この条件を述べた等式で，右上の添え字が一つ消えていることの意味がわかりにくいかもしれない．この条件をいいかえると，

$$P(\,A\,|\,\lambda\,)^{ab} \;=\; P(\,A\,|\,\lambda\,)^{ab'}$$

となる．たとえ粒子 2 の測定装置の設定をスピン b 成分を測定するためのものからスピン b' 成分を測定するためのものへ測定直前に変えたとしても，粒子 1 の測定結果の確率に影響はない，ということである．

最後に三つ目の条件 λ **-独立性**を説明しよう．$\rho(\lambda)^{ab}$ は，測定装置の設定が粒子 1，粒子 2 にたいしそれぞれ a，b であるときに変数 λ の値がどのように分布するのかを表す確率密度であり，

$$\int_\Lambda \rho(\,\lambda\,)^{ab} d\lambda = 1$$

を満たす． λ **-独立性**によって次のことが要請される．前段落と同じようにこの条件は，

$$\rho(\,\lambda\,)^{ab} \;=\; \rho(\,\lambda\,)^{ab'} \;=\; \rho(\,\lambda\,)^{a'b} \;=\; \rho(\,\lambda\,)^{a'b'}$$

のように書き直せる．λ の値の分布は 2 粒子それぞれにたいする測定装置の設定に依存しない，ということである．再び 14 頁の図を用いて説明しよう．ここで考えている状況では，2 粒子それぞれの測定は遠く離れた「空間的に分離した」時空領域 R_1，R_2 において行われるのだった．そこで述べたように，変数 λ を導入する動機は，その変数の値が R_1 と R_2 それぞれの過去光円錐の共通部分 R_{12} において指定されるとすると理解しやすい．λ の値が R_{12} 上で指定されるとすると，測定装置の設定は原理的には λ の値が指定された後でも変更可能である．すると，λ**-独立性**が自然な要請であることが理解できるだろう．

さて，以下で，いよいよ不等式を導出しよう．上の三つの条件を用いると，

$$\begin{aligned}
P(\,A\,B\,)^{ab} \;&=\; \int_\Lambda P(\,A\,B\,|\,\lambda)^{ab}\rho(\,\lambda\,)^{ab}d\lambda \qquad [\text{条件付確率の定義式より}]\\
&=\; \int_\Lambda P(\,A\,|\,\lambda)^{ab}P(\,B\,|\,\lambda)^{ab}\rho(\,\lambda\,)^{ab}d\lambda \qquad [\textbf{共通原因}\text{より}]\\
&=\; \int_\Lambda P(\,A\,|\,\lambda)^{a}P(\,B\,|\,\lambda)^{b}\rho(\,\lambda\,)d\lambda \qquad [\textbf{非局所的文脈-独立性}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{および}\lambda\textbf{-独立性}\text{より}].
\end{aligned}$$

となる．よって，

$$P(\,A\,B\,)^{ab} \;=\; \int_{\Lambda} P(\,A\,|\,\lambda)^{a} P(\,B\,|\,\lambda)^{b} \rho(\,\lambda\,) d\lambda \tag{3}$$

である．同様の等式は，$P(\,A'\,B'\,)^{a'b'}$，$P(\,A'\,B\,)^{a'b}$，$P(\,A\,B'\,)^{ab'}$ についても得られる．さらに，条件付確率の定義式を用いると

$$P(\,A\,)^{a} \;=\; \int_{\Lambda} P(\,A\,|\,\lambda)^{a} \rho(\,\lambda\,) d\lambda \tag{4}$$

である．これと同様の等式は $P(\,B\,)^{b}$ についても得られる．

α, β, α', β' が，それぞれ 0 以上 1 以下の実数であるとしよう．まず，実際に計算してみるとわかるように，

$$\begin{aligned} &\alpha + \beta + \alpha'\beta' - \alpha\beta - \alpha'\beta - \alpha\beta' \\ &\qquad\qquad = \alpha\,\{\alpha'(1-\beta) + (1-\alpha')(1-\beta')\} + (1-\alpha)\{\alpha'\beta' + (1-\alpha')\beta\} \end{aligned}$$

である．すると，α, β, α', β' が 0 以上 1 以下であることから，上の等式の左辺について，$0 \le \alpha\,+\,\beta\,+\,\alpha'\beta'\,-\,\alpha\beta\,-\,\alpha'\beta\,-\,\alpha\beta' \le 1$ であることがわかる．その理由を右辺第 1 項の中かっこのなか $\alpha'(1-\beta) + (1-\alpha')(1-\beta')$ を例に説明しよう．これは 0 以上 1 以下の二つの値 $1-\beta$ と $1-\beta'$ を端点とする内分点であり，それら二つの間の値をとる．よってその値は 0 以上 1 以下である．あとは同様のプロセスをさらに 2 度繰り返すと，$0 \le \alpha\,+\,\beta\,+\,\alpha'\beta'\,-\,\alpha\beta\,-\,\alpha'\beta\,-\,\alpha\beta' \le 1$ が得られる．

さて，$\alpha \;=\; P(\,A\,|\,\lambda)^{a}$，$\beta \;=\; P(\,B\,|\,\lambda)^{b}$，$\alpha' \;=\; P(\,A'\,|\,\lambda)^{a'}$，$\beta' \;=\; P(\,B'\,|\,\lambda)^{b'}$，とおくと，

$$\begin{aligned} K(\,\lambda\,) \equiv\;& P(\,A\,|\,\lambda)^{a} \,+\, P(\,B\,|\,\lambda)^{b} + P(\,A'\,|\,\lambda)^{a'} P(\,B'\,|\,\lambda)^{b'} \\ &- P(\,A\,|\,\lambda)^{a} P(\,B\,|\,\lambda)^{b} - P(\,A'\,|\,\lambda)^{a'} P(\,B\,|\,\lambda)^{b} - P(\,A\,|\,\lambda)^{a} P(\,B'\,|\,\lambda)^{b'} \end{aligned}$$

の値について不等式

$$0 \le K(\,\lambda\,) \le 1$$

が得られる．$K(\,\lambda\,)$ に $\rho(\lambda)$ をかけて，λ について積分すると，$K(\,\lambda\,)$ は任意の λ について 0 以上 1 以下の値をとること，および $\rho(\,\lambda\,)$ は確率密度であり $\int_{\Lambda} \rho(\,\lambda\,) d\lambda = 1$ となることから，

$$0 \le \int_{\Lambda} K(\,\lambda\,)\, \rho(\,\lambda\,)\; d\lambda \le 1$$

となる．

ところで，「積分の線形性」より $K(\lambda)\rho(\lambda)$ の積分は，$K(\lambda)$ の各項それぞれに $\rho(\lambda)$ をかけてそれを積分したものすべての和と等しい．すなわち，

$$\begin{aligned} 0 \ \le \ & \int_\Lambda K(\lambda)\,\rho(\lambda)d\lambda \\ & = \int_\Lambda P(a\,|\,\lambda)^A\,\rho(\lambda)\,d\lambda + \int_\Lambda P(b\,|\,\lambda)^B\,\rho(\lambda)\,d\lambda + \cdots \ \le \ 1 \end{aligned} \tag{5}$$

である．最後に，等式 (3) と，それと同様の $P(a'\,b')^{A'B'}$ や $P(A'\,B)^{a'b}$ や $P(A\,B')^{ab'}$ についての等式，および等式 (4) と，それと同様の $P(B)$ についての等式を代入して (5) を書き換えるとクラウザー＝ホーンの不等式

$$0 \le P(A)^a + P(B)^b + P(A'B')^{a'b'} - P(AB)^{ab} - P(A'B)^{a'b} - P(AB')^{ab'} \le 1 \tag{6}$$

が得られる[*14]．

三つの条件（**共通原因**，**非局所的文脈-独立性**，**λ-独立性**）を満たす「確率的隠れた変数」理論が存在するならば，その理論においては不等式 (6) が必ず成立する．一方，量子力学の予測はこの不等式を破る．不等式が破れるのは 2 粒子系が「1 重項状態」にあるときだけでないことが知られている[*15]．したがって，ここで紹介した議論は前節の議論より適用範囲が広い．だが，ここではわかりやすさのために再び「1 重項状態」を例に説明しよう．量子力学によると，2 粒子系が「1 重項状態」にあるとき，次の二つの確率的予測が与えられる．

1. 粒子 1 あるいは粒子 2 の任意のスピン測定について，測定結果が $+$（$+\hbar/2$ のこと）となる確率は 1/2 である．
2. 粒子 1 にたいするスピン測定の方向と粒子 2 にたいするスピン測定の方向のなす角が θ であるとき，それらの測定値がともに正 $[++]$ である確率は $\frac{1}{2}\sin^2(\frac{\theta}{2})$ である．

a，a' は粒子 1 のスピン成分，b，b' は粒子 2 のスピン成分であった．一つ目の確率的予測によると，$P(+)^a = P(+)^b = 1/2$ である．また，方向 a と方向 b の始点をそろえ，それらのなす角を θ_{ab} と表記すると（ほかの $\theta_{ab'}$ なども同様），二つ目の確率的予測より，$P(++)^{ab} = \frac{1}{2}\sin^2(\frac{\theta_{ab}}{2})$ である．ほかの $P(++)^{a'b'}$ などについても同様である．これらを用いて，不等式の各項について量子力学による理論値を計算できる．

---

*14 いろいろなベルタイプの不等式，およびそれらの間の関係については，文献 [40] の 4 章に詳述されている．

*15 詳細は，再び文献 [40] の 4 章を参照．

次に，このようにして得られる量子力学の理論値が不等式 (6) を破る具体例を挙げよう．図 3 のように

$$\theta_{ab} = 0, \quad \theta_{ab'} = \theta_{a'b} = 60^\circ, \quad \theta_{a'b'} = 120^\circ$$

であるとする．そのとき，

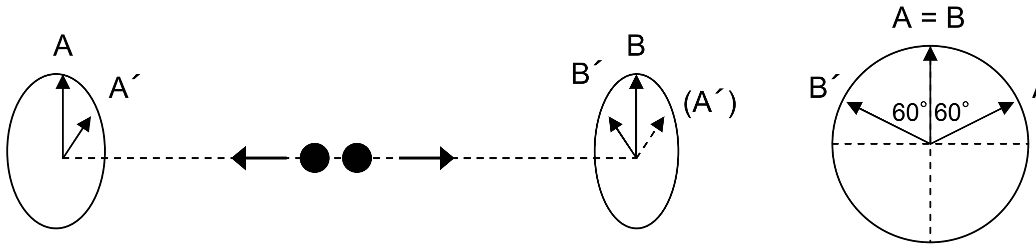

図 3

$$P(++)^{a'b'} = \frac{1}{2}\sin^2(\frac{\theta_{a'b'}}{2}) = \frac{3}{8}$$
$$P(++)^{ab} = \frac{1}{2}\sin^2(\frac{\theta_{ab}}{2}) = 0$$
$$P(++)^{a'b} = \frac{1}{2}\sin^2(\frac{\theta_{a'b}}{2}) = \frac{1}{8}$$
$$P(++)^{ab'} = \frac{1}{2}\sin^2(\frac{\theta_{ab'}}{2}) = \frac{1}{8}$$

となる．すると，$P(+)^a + P(+)^b + P(++)^{a'b'} - P(++)^{ab} - P(++)^{a'b} - P(++)^{ab'} = 9/8$ となり，量子力学の理論値は不等式を破ることがわかる．

ベルタイプの不等式が成立するのか，破れるのかについて，様々な実験的検証がなされてきた[*16]．もし量子力学の予測どおりに実験結果が不等式を破るならば，少なくともこれまで述べてきた意味での隠れた変数理論は存在しないことになる．反対に，もし実験結果において不等式が破れないならば，量子力学は誤った（あるいは少なくとも不完全な）理論である．不等式の実験的検証のなかでも，アスペらによる実験 [2] が有名である．彼らの実験では，粒子対が粒子源を離れてから測定装置の設定を変更するといった細心の注意が払われている．測定装置の設定がなんらかの仕方で粒子源に伝わり，量子力学の統計をうまい具合に再現してしまうのを防ぐ工夫である．仮に「局所的な」理論が存在するな

[*16] 不等式の実験的検証については，文献 [36] と [40] を参照してほしい．

らば，適切に量子力学の予測と異なる実験結果を得られるようにしたいのである．このような細心の注意にもかかわらず，量子力学の予測が正しく，ベルタイプの不等式が破れることが実験的に検証されたというのが，多くの研究者に共通の見解である[*17]．

*17 ただし，抜け道を完全にふさぐのは難しい．例えば，測定装置の設定の変更は完全にランダムに行われるわけではない，あるいは粒子源から放出されるすべての粒子対が観測されるわけではない，などの事実をよりどころに，「局所的な」理論を構成すること（例えば文献 [18]）は可能かもしれない．こういった可能性を完全に排除するのは困難である．

2　EPR 相関と共通原因の原理

1 章で，三つの条件「共通原因」，「非局所的文脈-独立性」そして「λ-独立性」を用いてベルタイプの不等式（クラウザー＝ホーンの不等式）を導出した．それにたいし，それぞれエートベッシュ大学と LSE の科学哲学者であるサボーとレデイは，それらの条件の一つ「共通原因」は不当に強すぎる，と指摘した．彼らは，「共通原因とは本来それぞれの相関ごとに要請されるべきものだが，不等式の導出ではすべての相関に共通の共通原因が要請されている」と主張する．そのうえ，サボーは各相関ごとに共通原因が存在する数学的モデルを実際に構成してみせた．そこで，本章では，それぞれの相関ごとに共通原因を要請するモデルにおける（非）局所性について考察する．まず，2.1 節で，「共通原因の原理」を最初に定式化したライヘンバッハの考えやサボーのモデルなど，議論の背景を概観する．続く 2.2 節では，仮に彼らの指摘が正しいとして，「共通原因」条件を，彼らが主張するように各相関ごとの共通原因のみを要請するように弱めたとしても，局所性という観点からみて自然と考えられるいくつかの条件（共通の共通原因にも課されていた条件）を課すと，特定の状態（「1 重項状態」）において，やはりベルタイプの不等式が導出されることを示す．

2.1　議論の背景

2.1.1　ライヘンバッハの共通原因の原理と相関の遮蔽因子

1 章でクラウザー＝ホーンの不等式を導出した．不等式の導出に用いた条件の一つに「共通原因」があった．そこでは，その条件を課す理由を，不等式の導出に必要とされる限りにおいて説明したに過ぎない．本章の議論は，「共通原因」という考え方のより精緻な分析とその EPR 相関への適用が中心である．そこで，まず，この考え方についてもう少し詳しくみていこう．

ライヘンバッハは「もし起こりそうにない一致が生じたとき，共通の原因が存在するにちがいない」（文献 [41] p. 157）と述べ，その考え方を「共通原因の原理」と呼んだ．より正確にいうと，二つの事象 X と Y の間に正の相関があるものの，それらが直接的な因果関係にないとき，それら二つの事象に共通の原因 C が存在するはずだ，ということである．この考え方は極めて自然に思われる．

では，共通原因と考えられる事象が満たすべき条件とはなんであろうか．ライヘンバッハによると，正の相関 $\triangle(XY) \equiv P(X \wedge Y) - P(X)P(Y) \gneq 0$ の共通原因 C は次の諸条

件を満たさねばならない．

1. $P(X \wedge Y \mid C) = P(X \mid C)P(Y \mid C)$
2. $P(X \wedge Y \mid C^{\perp}) = P(X \mid C^{\perp})P(Y \mid C^{\perp})$
3. （a）$P(X \mid C^{\perp}) \lneq P(X \mid C)$
   （b）$P(Y \mid C^{\perp}) \lneq P(Y \mid C)$

ライヘンバッハがこれらの諸条件を満たす事象を共通原因と呼んだのは，次の二つの事実による．

第 1 に，前章で述べたことの繰り返しになるが，正の相関があったものの C に相対的にはその説明すべき相関が消えていること．第 2 に，下でみるように上述の 3 条件から，事象 X と Y の間に正の相関が存在することを導出できることによる．実際，条件付き確率の定義式を用いると，

$$\begin{aligned} P(X \wedge Y) - P(X)P(Y) &= P(X \wedge Y \mid C)P(C) + P(X \wedge Y \mid C^{\perp})P(C^{\perp}) \\ &- \{P(X \mid C)P(C) + P(X \mid C^{\perp})P(C^{\perp})\} \cdot \{P(Y \mid C)P(C) + P(Y \mid C^{\perp})P(C^{\perp})\} \end{aligned}$$

となるが，右辺を条件 1 と 2 を用いて書き直し，式を整理すると，

$$P(C) \cdot P(C^{\perp}) \cdot \{P(X \mid C) - P(X \mid C^{\perp})\} \cdot \{P(Y \mid C) - P(Y \mid C^{\perp})\}$$

が得られる．条件 3 の (a) と (b) を満たすとき，この式の値は 0 より大きい．かくして，上述の 3 条件から，二つの事象 X と Y の間に正の相関が存在することが導出される．ライヘンバッハはおそらく，被説明項（正の相関）が説明項（共通原因が満たすべき諸条件）から演繹されるというヘンペルの意味において，共通原因事象によって相関が説明されると考えたのであろう．

C だけでなく $C^{\perp}$ についても相対的に相関が消えるように要請されていることは余分であると感じるかもしれない．だが，$C^{\perp}$ に相対的に依然として相関が残るならば，今度はその残った相関が説明の対象となってしまうだろう．

厳密な定義は後で述べるが，相関 $\triangle(XY)$ について，$\{C, C^{\perp}\}$ のように，各々の事象に相対的に相関が消えるとき，$\{C, C^{\perp}\}$ を相関 $\triangle(XY)$ の**遮蔽因子**と呼ぼう．ライヘンバッハの定式化においては，遮蔽因子は $\{C, C^{\perp}\}$ という二つの事象からなる集合である．しかし，なぜ二つでなければならないのだろうか．より一般に，事象の集合 $\{C_i\}_{i \in I}$ が存在し，その各々の事象について，

$$P(X \wedge Y \mid C_i) = P(X \mid C_i)P(Y \mid C_i)$$

が成立するのでは，なぜ満足できないのだろうか．例えば，二つの値より多くの値をとりうる変数があり，その変数がそれぞれの値をとる場合ごとに相関が消えるとき，その変数が一つ一つの値をとることを一つの事象とみなし，それらからなる族を遮蔽因子とすることに，なにか問題点があるのだろうか．

次のことを気にするかもしれない．ライヘンバッハのように共通原因事象を定義し，$\{C, C^{\perp}\}$ を遮蔽因子とする場合には，正の相関が導出されたが，$\{C_i\}_{i\in I}$ を遮蔽因子とする場合にも，同じように正の相関は導出されるのだろうか．確かに，前者の場合に限り，正の相関が導出されるならば，ライヘンバッハのように共通原因事象を定義する，一つの根拠が存在することになる．だが，$\{C_i\}_{i\in I}$ を遮蔽因子とする場合にも，$\{C, C^{\perp}\}$ を遮蔽因子とする場合と同様のやり方で正の相関を導出できることが知られている（文献 [27] の Proposition 2 を参照）．そこで，以下では相関の遮蔽因子を二つの事象からなる集合に限定しない．

また，ライヘンバッハの定義では，正の相関がある場合のみを扱っている．一方，スピン 1/2 の 2 粒子系のスピン状態が「1 重項状態」にあるとき，それぞれの粒子について同一のスピン成分を測定すると，測定結果がともに $+1/2$ であることの間には負の相関 $\triangle(XY) \lneq 0$ がある．そこで，遮蔽因子を考える相関を正の相関だけでなく，負の相関も含むようにしたい．ただ，このように述べると，正の相関だけでなく，負の相関に共通原因による説明を求めることに違和感を感じるかもしれない．なぜ，同時に生じることが少ない二つの事象間の相関をわざわざ説明するのか，と．だが，次の事実を考慮すると，別に奇異なことをしているわけでないことがわかるだろう．まず，容易にわかるように，次の四つは同値である．

$$\triangle(XY) \gneq 0 \;\Leftrightarrow\; \triangle(XY^{\perp}) \lneq 0 \;\Leftrightarrow\; \triangle(X^{\perp}Y) \lneq 0 \;\Leftrightarrow\; \triangle(X^{\perp}Y^{\perp}) \gneq 0$$

二つの事象間に負の相関があるとき，それらの一方の補元「⊥」をとると，それともう一方の事象間に正の相関ある，ということだ．さらに，任意の事象 Z について，次の四つは同値である．

$$\begin{aligned}
P(X \wedge Y \mid Z) = P(X \mid Z) \cdot P(Y \mid Z) &\Leftrightarrow P(X \wedge Y^{\perp} \mid Z) = P(X \mid Z) \cdot P(Y^{\perp} \mid Z) \\
&\Leftrightarrow P(X^{\perp} \wedge Y \mid Z) = P(X^{\perp} \mid Z) \cdot P(Y \mid Z) \\
&\Leftrightarrow P(X^{\perp} \wedge Y^{\perp} \mid Z) = P(X^{\perp} \mid Z) \cdot P(Y^{\perp} \mid Z)
\end{aligned}$$

例えば，$P(X \wedge Y \mid Z) = P(X \mid Z) \cdot P(Y \mid Z)$ であるとき，

$$\begin{aligned} P(X \wedge Y^{\perp} \mid Z) &= P(X \mid Z) - P(X \wedge Y \mid Z) \\ &= P(X \mid Z) - P(X \mid Z) \cdot P(Y \mid Z) \\ &= P(X \mid Z) \cdot \{1 - P(Y \mid Z)\} \\ &= P(X \mid Z) \cdot P(Y^{\perp} \mid Z) \end{aligned}$$

となる．この事実から，上述の四つの相関のどれかの遮蔽因子が存在するならば，それは残りの三つの相関の遮蔽因子となる．要するに，負の相関とその遮蔽因子を考えていても，正の相関とその遮蔽因子を考えていることに変わりはないということである．

以上の事実をふまえ，相関の遮蔽因子を次のように定義する．

相関 $\triangle(XY) \neq 0$ の遮蔽因子

次の三つの条件を満たす事象の集合 $\{C_i\}_{i \in I}$ を相関 $\triangle(XY)$ の遮蔽因子と呼ぶ．

1. 任意の $i, j \in I$ について，$i \neq j$ ならば，$C_i \wedge C_j = \emptyset$ である．
2. $\vee_{i \in I} C_i = \Omega$ である（ここで，Ω は最大元）．
3. $P(C_i) \neq 0$ ならば，$P(X \wedge Y \mid C_i) = P(X \mid C_i) \cdot P(Y \mid C_i)$ である．

次の点に注意してほしい．これらの諸条件は，共通原因の十分条件ではない．これらの諸条件をトリヴィアルに満たす事象の族が存在する．$\{X, X^{\perp}\}$ や $\{Y, Y^{\perp}\}$，そして $\{X \wedge Y, X^{\perp} \wedge Y, X \wedge Y^{\perp}, X^{\perp} \wedge Y^{\perp}\}$ などである．これらを共通原因として考えるのは，とりわけ，EPR 相関の場合，無意味である．上述の諸条件をみたす事象の族は，あくまで共通原因の候補であるに過ぎない．これから EPR 相関の共通原因が存在するのか否か，という問いにたいし否定的な結果を述べる．そこで，議論の構成上，共通原因の候補となる事象の族はなるべく広くとっておきたい．

2.1.2　量子的確率の古典確率空間上での表現

次に，前章でクラウザー＝ホーンの不等式を導出した際には，不問にしてきた問いについて考えたい．量子力学が様々な物理量の測定結果に付与する確率は，一つの古典確率空間において表現可能なのだろうか？表現可能ならば，その古典確率空間はいかなるものであろうか？これらの問は，その解答が自明なものではない（文献 [39] 参照）．この問いは非常に重要である．なぜなら，もし「表現可能」でないならば，共通原因の存在，非存在を考える以前に，そもそも量子力学の現象的確率さえ（古典確率空間において）表せない

ことになるからである．本章で考察する問いを数学的にいうと，まず量子力学の現象的確率を古典確率空間で表現するのだが，その確率空間を共通原因事象の族を含む古典確率空間に拡張できるのか，というものである．仮に「表現可能」でないならば，そこから拡張の存在，非存在を論じる土台となる確率空間自体がそもそも存在しないことになってしまう．

研究者の間ではよく知られているように，任意の古典確率空間 $(\mathcal{A}, P)$（ここで $\mathcal{A}$ はブール束，P はその上の確率測度）において，いかなる四つの事象 $E_n \in \mathcal{A}$ $(n = 1, 2, 3, 4)$ についても，不等式

$$0 \leq P(E_1) + P(E_2) + P(E_3 \wedge E_4) - P(E_1 \wedge E_2) - P(E_2 \wedge E_3) - P(E_1 \wedge E_4) \leq 1 \quad (7)$$

が成立する（証明については，例えば文献 [37] を参照）．この不等式の形式が前章でみたクラウザー＝ホーンの不等式とよく似ていることに注目してほしい．前章のように，スピン 1/2 の 2 粒子系が 1 重項状態にあるとする．ただし，以下では状態の密度作用素表示を利用したいので，1 重項状態に対応する密度作用素を $W^{singlet}$ と表す．クラウザー＝ホーンの不等式を破る四つのスピン成分をとり，各々の固有値 $+\hbar/2$ の固有空間の上への射影作用素を $\{\hat{E}_i\}_{i=1}^4$ と表そう．もし四つの射影にそれぞれ対応する四つの事象 $\{E_i\}_{i=1}^4$ $(\subseteq \mathcal{A})$ が存在し，それらの事象に付与する確率が $P(E_i) = Tr(W^{singlet}\hat{E}_i)$ および $P(E_i \wedge E_j) = Tr(W^{singlet}\hat{E}_i \wedge \hat{E}_j)$ を満たすならば，不等式 (7) は破れる．そのような場合には，量子力学が与える現象的確率**そのもの**をもつ事象を含む古典確率空間は（少なくとも上述の四つに関しては）存在しない．すると，もしこれ以上なんの策もないならば，共通原因事象を含む古典確率空間へと拡張する土台となる古典確率空間は存在しないことになる．

だが，たかだか可算個の物理量については，次の数学的事実が知られている．量子力学的確率 $Tr(W\ \cdot\ )$（ここで，W は被測定系の密度作用素）そのものをもつ事象は存在しないが，量子的確率を，どの物理量を測定するのかという測定装置の設定に条件付けられた測定結果の確率として解釈すると，量子力学的確率と整合的な古典確率空間が存在する（文献 [3]，[45] を参照）．

とりわけ，クラウザー＝ホーンの不等式とその実験的検証に関する量子的確率は，これからみるようにして，古典確率空間 $(\mathcal{B}, P)$ において表現される．まず，この実験的検証に関わる事象がなすブール束 $\mathcal{B}$ を構成し，次にその上に確率測度 P を導入しよう．クラウザー＝ホーンの不等式では，各粒子について二つのスピン成分測定を考えるのであった．そこで，その不等式の実験的検証については，次の諸事象を考えれば十分である．

a (a'): 粒子 1 の測定装置の設定がスピン $\mathbf{a}$ $(\mathbf{a}')$ 成分を測定するものとなっている．

b (b''): 粒子 2 の測定装置の設定がスピン $\mathbf{b}$ ($\mathbf{b}''$) 成分を測定するものとなっている．

A (A'): 粒子 1 のスピン $\mathbf{a}$ ($\mathbf{a}'$) 成分の測定器が up であると検出した．

B (B''): 粒子 2 のスピン $\mathbf{b}$ ($\mathbf{b}''$) 成分の測定器が up であると検出した．

（ここで，粒子 2 の設定に関して，b' でなく，b'' と表記しているのは誤記でない．その理由は後で明らかになる．また，以下では，スピン $\mathbf{a}$ 成分，スピン $\mathbf{a}'$ 成分を表す自己共役作用素は非可換であるとする．$\mathbf{b}$ と $\mathbf{b}''$ についても同様とする．）クラウザー＝ホーンの不等式について考察する場合，これらの事象を含む最小のブール束を $\mathcal{B}$ として考えればよい．では，そのようなブール束はいかなる構造をもつのだろうか．とりあえず粒子 2 は無視して，粒子 1 について生じる事象だけに制限したとき次のことが成立すべきである．

- スピン $\mathbf{a}$ 成分とスピン $\mathbf{a}'$ 成分を表す自己共役作用素は非可換なので同時測定できない．よって $a \wedge a' = \emptyset$．さらに，二つのスピン成分を測定する設定しか考えていないので $a \vee a' = \Omega$.
- 測定結果 A が得られることは，測定装置の設定が $\mathbf{a}$ 成分を測定するものとなっていることを含意する．よって $A \leq a$ であり,「スピン $\mathbf{a}$ 成分を測定し，測定結果 up が得られた」の記号化 $a \wedge A$ について，等式 $a \wedge A = A$ が成立すべきである．a' と A' についても同様である．
- 「スピン $\mathbf{a}$ 成分を測定し，測定結果 $down(-)$ が得られた」は，スピン $\mathbf{a}$ 成分を測定したが測定結果 up が得られなかった，ということなので $a \wedge A^{\perp}$ と表される[*18]．（ここで，$A^{\perp}$ 単独では $down$ という測定結果を表さないことに注意してほしい．）a' と A' についても同様である．
- $\mathbf{a}$ 成分を測定すると up か $down$ の結果が得られるので $(a \wedge A) \vee (a \wedge A^{\perp}) = a$ である．a' と A' についても同様である．

以上の要請を満たすブール束の概形は次の図 4 の通りである．なお，今後，$a \wedge A$ を aA, $a \wedge b$ を ab のように，記号「$\wedge$」を省く．間になんの記号もない場合には,「$\wedge$」が省かれていると理解してほしい．この略記法を用いると，図 4 のブール束において，

$$\{aA,\, aA^{\perp},\, a'A',\, a'A'^{\perp}\}$$

の 4 元が原子元である．

*18 ここで，$\mathbf{a}$ 成分を測定したが up とも $down$ とも検出されなかった，といったような場合は考えていない．

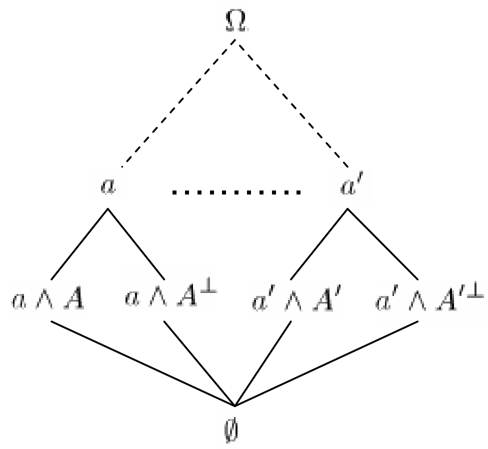

図 4

粒子 2 についても同様であり，

$$\{bB,\, bB^{\perp},\, b''B'',\, b''B''^{\perp}\}$$

の 4 元を原子元とするブール束が構成される．そこで，2 粒子の結合系において測定結果のなす事象のブール束 $\mathcal{B}$ は，各粒子のブール束の原子元どうしを組合わせてできる $4 \times 4 = 16$ 元を，すなわち

$$\{aAbB,\, aAbB^{\perp},\, aAb''B'',\, aAb''B''^{\perp},\, aA^{\perp}bB,\, \cdots\cdots\}$$

を原子元とするものとなる．

次に，$\mathcal{B}$ 上の確率測度 P を定義する．この確率測度は，測定装置がどちらのスピン成分を測定する設定になっているか（$x = a, a'$; $y = b, b''$）についての確率と，量子力学によって測定結果に付与される確率 $Tr(W\,\cdot\,)$ とを用いて定義される．まず，前者の確率について説明したい．この確率は，$\mathcal{B}$ 上に確率測度 P を導入する以前に，どのスピン成分を測定するかを決定する装置全体の機構やその設計者の意図を反映して定まる．この確率をとりあえず $\mu(\,\cdot\,)$ と表記しておく．例えば，測定されるスピン成分がランダムに定まるように装置が設計されている場合，各粒子にたいする設定（粒子 1 に関していうと a と a'）に付与される確率は $\mu(a) = \mu(a') = 1/2$ である．2 粒子系にたいする測定においては，それぞれの粒子にたいする設定が独立に決まるのか否か，すなわち等式 $\mu(xy) = \mu(x)\cdot\mu(y)$ が成立するのか否か，についても考えねばならない．ある場合には各粒子対にたいする二つの装置の設定は統計的に独立であろうし，またあえて独立でないように設計することもできるだろう．もし，各粒子にたいする設定はランダムで，そのうえ粒子対にたいする設

定も統計的に独立となるように装置が設計されているならば,

$$\mu(xy) = \mu(x) \cdot \mu(y) = 1/2 \times 1/2 = 1/4 \qquad x = a, a'; \quad y = b, b''$$

である．現時点で重要なことは，統計的に独立であるにせよ，そうでないにせよ，設定に関する確率 μ はわれわれが数学的に定義する以前に，装置全体の機構や測定者の意図によって決まるということである．また，繰り返しになるが以下の議論では，すべての粒子対について，粒子 1 にたいしては二つのスピン成分 $\mathbf{a}$ か $\mathbf{a}'$，粒子 2 については $\mathbf{b}$ か $\mathbf{b}''$ のどちらかが必ず測定されることを仮定して議論を進める．そこで，以下では装置の設定の確率について次の等式を満たす確率が与えられているとして，議論を進める．

$$\mu(ab) + \mu(ab'') + \mu(a'b) + \mu(a'b'') = 1 \tag{8}$$

以上の準備のもとで，ブール束 $\mathcal{B}$ 上の確率測度を次のようにして定義する．一般に，原子元をもつブール束においては，それぞれの原子元に付与される値すべての和が 1 になるように，各原子元に付与される値を定義すれば，残りの元に付与される値は有限加法性を満たすように一意に定まる．そこで，まず，$\mathcal{B}$ の各原子に付与される確率を，前段落で述べた装置の設定に関する確率 $\mu(\,\cdot\,)$ と量子的確率 $Tr(W\,\cdot\,)$ を用いて，X や $X^{\perp}$ といった $\perp$ の有無に応じた事象の四つの形式ごとに次のように定義する．

$$P(xXyY) \equiv Tr(WP^{s_x}_{+1} \otimes P^{s_y}_{+1}) \cdot \mu(xy)$$

$$P(xXyY^{\perp}) \equiv Tr(WP^{s_x}_{+1} \otimes P^{s_y}_{-1}) \cdot \mu(xy)$$

$$P(xX^{\perp}yY) \equiv Tr(WP^{s_x}_{-1} \otimes P^{s_y}_{+1}) \cdot \mu(xy)$$

$$P(xX^{\perp}yY^{\perp}) \equiv Tr(WP^{s_x}_{-1} \otimes P^{s_y}_{-1}) \cdot \mu(xy)$$

（ここで，例えばパラメータ x と X（$x = a, a'$; $X = A, A'$）について，それらがとりうる値はそれぞれの値の任意の組み合わせでなく，$(x, X) = (a, A), (a', A')$ のみを考えている．実際，例えば，aA' を考えても，$aA' = \emptyset$ であり，その確率は 0 である．パラメータ y と Y についても同様に，$(y, Y) = (b, B), (b'', B'')$ のみを考えている．このことは今後も同様である．）

原子元以外の元に付与される値については，加法性を満たすように定義できる．（$\mathcal{B}$ の原子元以外のそれぞれの元について，その下にある原子元すべてに付与された値の和を P の値として定義すればよい．）このように定義された，$\mathcal{B}$ から実数への写像 P が確率測度の要件を満たすことは容易にわかる．ここでは次の 2 点だけ確認する．

- **任意の** $x,\ y$ **（**$x = a, a';\ y = b, b''$**）について，**$P(xy) = \mu(xy)$ **である．**
  ブール束 $\mathcal{B}$ の構造より，

$$xy = (xXyY) \vee (xXyY^{\perp}) \vee (xX^{\perp}yY) \vee (xX^{\perp}yY^{\perp})$$

  である．各原子元に定義した P の値，そして原子元以外の元についての P の定義より，

$$\begin{aligned} P(xy) = \{&Tr(WP^{s_x}_{+1} \otimes P^{s_y}_{+1}) + Tr(WP^{s_x}_{+1} \otimes P^{s_y}_{-1}) \\ &+ Tr(WP^{s_x}_{-1} \otimes P^{s_y}_{+1}) + Tr(WP^{s_x}_{-1} \otimes P^{s_y}_{-1})\} \times \mu(xy) \end{aligned}$$

  右辺の量子的確率の和は 1 なので，$P(xy) = \mu(xy)$ となる．このことは，測定装置全体の機構によって定まる設定についての確率 μ が $(\mathcal{B}, P)$ において再現されることを意味する．
- $\mathcal{B}$ の最大元 Ω について，$P(\Omega) = 1$ である．
  ブール束 $\mathcal{B}$ の構造より，$\Omega = ab \vee ab'' \vee a'b \vee a'b''$ である．P が加法性を満たすこと，および前段落で確認した数学的事実より，

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= P(ab) + P(ab'') + P(a'b) + P(a'b'') \\ &= \mu(ab) + \mu(ab'') + \mu(a'b) + \mu(a'b'') \end{aligned}$$

  となるが，最後の式は等式 (8) より 1 である．

以上のように定義された古典確率空間 $(\mathcal{B}, P)$ は次の性質をもつ．

確率空間 $(\mathcal{B}, P)$ **の性質**

1. (a) $P(XY \mid xy) = Tr(WP^{s_x}_{+1} \otimes P^{s_y}_{+1})$,　(b) $P(XY^{\perp} \mid xy) = Tr(WP^{s_x}_{+1} \otimes P^{s_y}_{-1})$,
   (c) $P(X^{\perp}Y \mid xy) = Tr(WP^{s_x}_{-1} \otimes P^{s_y}_{+1})$, (d) $P(X^{\perp}Y^{\perp} \mid xy) = Tr(WP^{s_x}_{-1} \otimes P^{s_y}_{-1})$.
2. （a）$P(X \mid x) = Tr(WP^{s_x}_{+1} \otimes I)$,　$P(X^{\perp} \mid x) = Tr(WP^{s_x}_{-1} \otimes I)$.
   （b）$P(Y \mid y) = Tr(WI \otimes P^{s_y}_{+1})$,　$P(Y^{\perp} \mid y) = Tr(WI \otimes P^{s_y}_{-1})$
3. （a）$P(X \mid xy) = P(X \mid x)$,
   （b）$P(Y \mid xy) = P(Y \mid y)$.

ここで，$(x, X) = (a, A), (a', A');\ (y, Y) = (b, B), (b'', B'')$ である．

性質 1 が成立することは，条件付確率の定義式 $P(XY \mid xy) = P(XxYy)/P(xy)$ に，

各原子元に付与される値の定義式，および既にみたように $P(xy) = \mu(xy)$ である事実を適用すれば明らかである．

次に，$(x, X) = (a, A)$ の場合を具体例に，性質 2 を示そう．まず，ブール束 $\mathcal{B}$ の構造より，

$$aA = (aAbB) \vee (aAbB^{\perp}) \vee (aAb''B'') \vee (aAb''B''^{\perp})$$

である．すると，確率測度の加法性，各原子元に付与される値の定義式，そしてやはり $P(xy) = \mu(xy)$ である事実を用いると，次のように式変形できる．

$$\begin{aligned}
P(aA) &= P(aAbB) + P(aAbB^{\perp}) + P(aAb''B'') + P(aAb''B''^{\perp}) \\
&= \{Tr(WP^{s_a}_{+1} \otimes P^{s_b}_{+1}) + Tr(WP^{s_a}_{+1} \otimes P^{s_b}_{-1})\} \cdot \mu(ab) \\
&\qquad + \{Tr(WP^{s_a}_{+1} \otimes P^{s_{b''}}_{+1}) + Tr(WP^{s_a}_{+1} \otimes P^{s_{b''}}_{-1})\} \cdot \mu(ab'') \\
&= Tr(WP^{s_a}_{+1} \otimes I) \cdot P(ab) + Tr(WP^{s_a}_{+1} \otimes I) \cdot P(ab'') \\
&= Tr(WP^{s_a}_{+1} \otimes I) \cdot P(a)
\end{aligned}$$

そのとき，明らかに性質 2 が成立する．

以上の性質 1 と 2 により，$(\mathcal{B}, P)$ において量子的確率は，測定装置の設定のもとでの条件付き確率として再現されることがわかる．

性質 3 が成立することの意味を (a) を例に説明しよう．これは，粒子 1 の測定結果の確率は，粒子 2 の測定装置の設定を変えることによっては変化しないことを意味する．$(x, X) = (a, A)$; $y = b$ の場合を具体例に性質 3-(a) を次のように示すことができる．

$$\begin{aligned}
P(A \mid ab) &= P(AB \mid ab) + P(AB^{\perp} \mid ab) && \text{[確率測度の加法性より]} \\
&= Tr(WP^{s_a}_{+1} \otimes P^{s_b}_{+1}) + Tr(WP^{s_a}_{+1} \otimes P^{s_b}_{-1}) && \text{[性質 1 より]} \\
&= Tr(WP^{s_a}_{+1} \otimes I) && \text{[トレースの線形性より]} \\
&= P(A \mid a) && \text{[性質 2 より]}
\end{aligned}$$

ここでみたことは，クラウザー＝ホーンの不等式の検証実験という限られた状況ではあるが，一般に，同様のやり方で，可算個の物理量の測定に関して，量子的確率を古典確率空間上で条件付き確率として表現できる．そこで，以上のようにして得られた古典確率空間 $(\mathcal{B}, P)$ を，共通原因と考えられる事象を含む確率空間へと拡張できるか，という問題を問うことが有意味となる．

2.1.3　共通原因と共通の共通原因

前節において，古典確率空間 $(\mathcal{B}, P)$ を構成した．EPR 相関は，この古典確率空間における事象間の相関として再現される．本節では，$(\mathcal{B}, P)$ を，しかるべき要請を満たす，EPR 相関の遮蔽因子（EPR 相関の共通原因事象の候補）を含む古典確率空間 $(\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{P})$ へと拡張できるのか，について考える．

多くの論文や教科書（例えば，[12] や [48]）で，局所性に関わるいくつかの条件を満たす，そのような拡張（EPR 相関の共通原因モデル）は存在しない，と言われてきた．実際，本論文の 1 章でも，「共通原因」と名付けた条件を含む諸条件からクラウザー＝ホーンの不等式を導出し，その不等式が実験において破れることをみた．

このような標準的見解に，レデイとサボーは挑む（[39] と [46] 参照）．彼らの論点は次の通り．

> 共通原因とは，ある特定の相関についてその相関をもつ二つの事象に共通の原因であり，本来，相関ごとに考えられるべきものである．しかし，ベルタイプの不等式の導出では，すべての相関に**共通の**共通原因が存在することが暗黙の前提となっている．

1 章で定式化した条件「共通原因」を思い出そう．そこでは，変数 λ は，それに相対的には相関が消えるものとして，要請されていた．注目すべきは，各相関ごとにその相関を消す変数 λ が要請されたのではなく，一つの変数 λ に相対的に，すべての相関が消えるよう要請されていたことである．しかし，そのような要請をする根拠が本当にあるのか，確かに疑問の余地がある．

さて，サボーは単に概念的な議論をするだけでなく，実際に，クラウザー＝ホーンの不等式の実験的検証という具体的状況において，それぞれの相関ごとの共通原因を含むように $(\mathcal{B}, P)$ を拡張できることを，具体的モデルを構成することによって示した．クラウザー＝ホーンの不等式の実験的検証において，議論の対象となる量子論的相関は次の四つであった．

$$\triangle^{xy}(XY) \equiv P(XY \mid xy) - P(X \mid xy) \cdot P(Y \mid xy)$$

$$\text{上式において}, (x, X) = (a, A), (a', A'); \ (y, Y) = (b, B), (b'', B'') \text{である}.$$

これらは単なる二つの事象間の相関というより，むしろ条件付きの相関とでも言うべきものである．もちろんこれらの条件付相関は $(\mathcal{B}, P)$ 上で表現される．以前，「相関の遮蔽因子」なる概念を定義した．それを少々手直しして，「条件付相関の遮蔽因子」を次のよう

に定義する．

条件付相関 $\triangle^{xy}(XY) \neq 0$ の遮蔽因子
次の三つの条件を満たす事象の集合 $\{C_i\}_{i \in I}$ を条件付相関 $\triangle^{xy}(XY)$ の遮蔽因子と呼ぶ．

1. 任意の $i, j \in I$ について，$i \neq j$ ならば，$C_i \wedge C_j = \emptyset$ である．
2. $\vee_{i \in I} C_i = \Omega$ である（ここで，Ω は束の最大元）．
3. $P(C_i) \neq 0$ であるとき，$P(C_i xy) \neq 0$ であり，そのうえ $P(XY \mid xy\,C_i) = P(X \mid xy\,C_i) \cdot P(Y \mid xy\,C_i)$ である．

3 番目の条件の前半部分「 $P(C_i) \neq 0$ であるとき，$P(C_i xy) \neq 0$」は，任意の条件付相関の遮蔽因子に要請するものとしては強すぎるだろう．だが，いま議論している EPR 相関に関しては，そうでない．遠距離相関をもつ二つの測定結果に共通の原因（遮蔽因子）は，それらの測定結果がそれぞれ生じる時空領域の過去光円錐の共通部分において生じる，と考えるのが自然である．そのような共通部分で遮蔽因子のどれか一つ（例えば C_k）が生じた後でも，なにを測定するかという装置の設定は変更可能である．もし，$P(C_k) \neq 0$ であるにも拘わらず，$P(C_k xy) = 0$ となることがあるならば，C_k が生じたときには，ある特定の設定が選ばれないことになってしまう．

サボーは，次の命題における諸条件を満たす，EPR 相関の（**共通の**共通原因モデルでなく）共通原因モデル構成した（文献 [46] 参照）[*19]．

[*19] 正確にいうと，これから述べる諸条件はいくつかの点でサボーが与えた諸条件と異なる．なかでも次の点は重要だろう．本文の定式化において説明対象となるのは条件付相関であり，これまでの説明から明らかなように，これは量子力学的相関である．一方，サボーが原論文で説明対象としたのは（条件付きでない）相関 $\triangle(XY)$ である．しかし，著者はいくつかの点で，この相関を説明対象とすることに納得できない．

第一に，単なる共通原因でなく，共通の共通原因を要請する根拠はないと主張するならば，それ以外の点ではすべて同等な条件のもとで議論を進めるべきである．だが，前章において共通の共通原因の存在を仮定しベルタイプの不等式が導出された際，説明対象としていたのは条件付相関であった．もちろん，このこと自体は間違いというわけではない．しかし，それでは共通原因モデルが存在しても，説明対象を変えたからということになりかねない．

第二の論点はより重要である．$\triangle(XY)$ の遮蔽因子が存在したとしよう．この遮蔽因子は，粒子対にたいするある特定のスピン成分の測定結果がともに $+$ である相関についてのものである．この同一の遮蔽因子が，同じスピン成分の測定結果で，一方は $+$ でもう一方は $-$ である相関についてのものでもあることを期待するだろう．しかし，そうではない．確かに $\triangle(XY)$ の遮蔽因子は $\triangle(XY^{\perp})$ などの遮蔽因子ではある．しかし，$Y^{\perp}$ はある特定のスピン成分の測定結果が $-$ であることを表さない．その測定結果は $yY^{\perp}$ と表される．すると今度は，一方が $+$ でもう一方が $-$ である相関の遮蔽因子が新たに必要となる．

ただし，これら二つの論点は決定的なものとはいえない．著者の論文 [25] では，たとえ相関 $\triangle(XY)$

命題 1. 古典確率空間 $(\mathcal{B}, P)$ の拡張 $(\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{P})$ で，上述の量子論的相関 $\triangle^{xy}(XY)$ のそれぞれについて，次の条件を満たす事象 C^{XY} および $(C^{XY})^{\perp}$ を $\tilde{\mathcal{B}}$ に含むものが存在する．

1.（*a*）$C^{XY} \leq X$ または $X \leq C^{XY}$ ならば，$P(C^{XY}) \neq P(X)$ である．
（*b*）$(C^{XY})^{\perp} \leq X$ または $X \leq (C^{XY})^{\perp}$ ならば，$P((C^{XY})^{\perp}) \neq P(X)$ である．

2.（*a*）$C^{XY} \leq Y$ または $Y \leq C^{XY}$ ならば，$P(C^{XY}) \neq P(Y)$ である．
（*b*）$(C^{XY})^{\perp} \leq Y$ または $Y \leq (C^{XY})^{\perp}$ ならば，$P((C^{XY})^{\perp}) \neq P(Y)$ である．

3.（*a*）$P(XY \mid xy\, C^{XY}) = P(X \mid xy\, C^{XY}) \cdot P(Y \mid xy\, C^{XY})$.
（*b*）$P(XY \mid xy\, (C^{XY})^{\perp}) = P(X \mid xy\, (C^{XY})^{\perp}) \cdot P(Y \mid xy\, (C^{XY})^{\perp})$.

4.（*a*）$P(X \mid xy\, C^{XY}) = P(X \mid x\, C^{XY})$.
（*b*）$P(X \mid xy\, (C^{XY})^{\perp}) = P(X \mid x\, (C^{XY})^{\perp})$.
（*c*）$P(Y \mid xy\, C^{XY}) = P(Y \mid y\, C^{XY})$.
（*d*）$P(Y \mid xy\, (C^{XY})^{\perp}) = P(Y \mid y\, (C^{XY})^{\perp})$.

5.（*a*）$P(C^{XY} xy) = P(C^{XY}) \cdot P(xy)$.
（*b*）$P((C^{XY})^{\perp} xy) = P((C^{XY})^{\perp}) \cdot P(xy)$.

順番は前後するが，条件 3 によって $\{C^{XY}, (C^{XY})^{\perp}\}$ が条件付相関 $\triangle^{xy}(XY)$ の遮蔽因子であることが要請されている．いま，共通の共通原因でなく相関ごとの共通原因を考えているので，このような遮蔽因子が各相関ごとに要請される．サボーのモデルにおいて遮蔽因子は二つの要素からなる集合である．これは，彼が，共通原因の原理のライヘンバッハ自身によるオリジナルの定式化にこだわった結果である．

条件 1 と 2 は，局所性の維持という観点からすると興味のない遮蔽因子（例えば，$\{X, X^{\perp}\}$ など）を排除するためのものである．以前に述べたように，$\{YY, XY^{\perp}, X^{\perp}Y, X^{\perp}Y^{\perp}\}$ も遮蔽因子の条件をトリヴィアルに満たす事象の集合だが，サボーはライヘンバッハに忠実に遮蔽因子が二つの要素のみからなる集合だけを考えるので，その集合は自動的に排除される．サボーが実際に構成したモデルにおいて，C^{XY} と $(C^{XY})^{\perp}$ は，ともに X や Y と束の順序関係にない．よって，それらの条件は自動的に満たされる．

クラウザー＝ホーンの不等式を導出する際，「共通原因」以外にも，「非局所的文脈-独立性」や「λ - 独立性」といった条件を用いた．それら二つの条件を，それぞれ，すべての相関に共通の共通原因でなく，各相関の共通原因のみを要請する場合へと書き直したの

を説明対象とし，共通原因モデルを構成しても，条件付相関を説明対象としたときと同じように不等式が導出されることが示される．議論がかなり複雑になるので，本論文では，この点についてはこれ以上議論しない．

が上の条件 4 と 5 である．前章において λ-独立性は，$\rho(\lambda) = \rho(\lambda)^{ab}$ のように定式化された．これは，本章での言葉使いを用いると，共通の共通原因 λ の確率密度は測定装置の設定に依存しないということであり，要するに，変数 λ がとる値と装置の設定は統計的に独立であるということだ．そこで，条件 5 のように定式化している．

実をいうと，サポーは条件 4 と 5 を明示的に述べていないし，よって当然のことだが，それらの条件を満たすことを確かめてもいない．しかし，共通の共通原因モデルは存在しないが単なる共通原因モデルは存在するというならば，その一点を除きそれ以外の諸条件はすべて変えずに議論するべきである．詳細は省くが，彼のモデルを精査すると，幸いにも，それらの条件が満たされていることを確かめられる．

さて，上述の命題における諸条件に，次の条件を付け加えるとしよう．

$$C^{AB} = C^{AB''} = C^{A'B} = C^{A'B''}$$

この条件は，すべての条件付相関に共通の遮蔽因子が存在することを意味する．そのとき，1 章で述べたのと同じやり方で，クラウザー＝ホーンの不等式を導出できる．上述の諸条件に加え，すべての相関に共通の共通原因を要請すると量子力学の予測と不整合が生じるということである．

より一般には，次の命題が成立する．

命題 2. 古典確率空間 $(\mathcal{B}, P)$ のある拡張 $(\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{P})$ が存在し，条件付相関（量子論的相関）

$$\triangle^{xy}(XY) \quad (x, X) = (a, A), (a', A'); \, (y, Y) = (b, B), (b'', B'')$$

すべてに共通の遮蔽因子 $\{C_i\}_{i \in I}$ で次の条件を満たすものを $\tilde{\mathcal{B}}$ に含むとする．

1. (a) $P(X \mid xy\, C_i) = P(X \mid x\, C_i)$.
   (b) $P(Y \mid xy\, C_i) = P(Y \mid y\, C_i)$.
2. $P(C_i xy) = P(C_i) \cdot P(xy)$.

そのとき，クラウザー＝ホーンの不等式

$$0 \leq P(A \mid a) + P(B \mid b) + P(A'B'' \mid a' \wedge b'') - P(AB \mid ab) - P(A'B \mid a'b) - P(AB'' \mid ab'') \leq 1$$

が導出される．

以上の結果をふまえ，暫定的な結論は次の通りである．$(\mathcal{B}, P)$ は，量子力学の測定結果を表現する古典確率空間であり，クラウザー＝ホーンの不等式の各項における量子力学的確率（$P(A \mid a) = Tr(WP^{s_a}_{+1} \otimes I)$ や $P(AB \mid ab) = Tr(WP^{s_a}_{+1} \otimes P^{s_b}_{+1})$ など）もその古典

確率空間上で表現される．$(\mathcal{B}, P)$ の，すべての相関に共通の共通原因を含む古典確率空間 $(\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{P})$ への拡張が存在すると仮定すると，その拡張された確率空間上でクラウザー＝ホーンの不等式が導出される．しかし，1 章でみたように，ある状況においては，量子力学的確率はこの不等式を満たさない．そのような状況においては，$(\mathcal{B}, P)$ の $(\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{P})$ への拡張は存在不可能であり，すべての相関に共通の共通原因モデルは存在しない（命題 2）．一方，すべての相関について，各相関の共通原因のみを含むように，$(\mathcal{B}, P)$ を $(\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{P})$ へと拡張することは可能である．もちろん，この場合には，クラウザー＝ホーンの不等式は導出できない．それぞれの相関の共通原因すべてを含む共通原因モデルは存在する（命題 1）ということである．

2.2　共通原因モデルの限界

2.2.1　サボー＝レデイ問題

サボーは命題 1 で述べた諸条件を満たすモデルを実際に構成した．その命題の条件 5 を思い出してほしい．そこでは，ある特定の条件付相関の共通原因と，その相関が生じうる測定設定とが，統計的に独立であるよう要請されていた．ただしその要請を満たしても，次の要請を満たすとは限らない．（次の条件はあえて少々直感的に述べられている．あとで厳密に定式化する．）

サボー＝レデイ条件
$\{C^{XY} \mid X = A, A'; Y = B, B''\} \cup \{(C^{XY})^{\perp} \mid X = A, A'; Y = B, B''\}$ が生成する σ 完備なブール束の任意の原子元 Z は，二つの測定装置の設定と統計的に独立である．

サボー自身とレデイが正しく指摘するように，サボーが構成したモデルはサボー＝レデイ条件を満たさない（[46] の ch. 8，[39] の ch. 6 参照）．これから，サボー＝レデイ条件の厳密な定式化，その意味と必要性，さらには定式化された条件を満たす共通原因モデルの存在，非存在について考察する．そのようなモデルが存在するのか否かは，サボーとレデイが未解決問題と呼んだものである．次の三つの点に留意しつつ，この問題について考察する．

1. **相関の遮蔽因子の一般化**　ライヘンバッハを強く意識して，サボーはモデルを構成した．よってそのモデルにおいて，条件付相関の遮蔽因子は，要素が 2 つの集合 $\{C^{XY}, (C^{XY})^{\perp}\}$ であり，サボー＝レデイ条件もその集合を用いて述べられてい

る．だが以下では，条件付相関 $\triangle^{xy}(XY)$ の遮蔽因子 $\{C_i^{XY}\}_{i\in I^{XY}}$ は，より一般に可算集合である（要するにインデックス集合 I^{XY} は可算集合）とする．

2. **測定装置は三つのパラレル設定をとりうる**　これまで，一方の粒子（粒子 1）の装置がとりうる設定は a か a'，もう一方の粒子（粒子 2）の装置がとりうる設定は b か b'' であるとして議論を進めてきた．これからはそれらの設定に，粒子 1 には a'' を粒子 2 には b' を加え，それらは $\theta_{ab}=\theta_{a'b'}=\theta_{a''b''}=0$ を満たすとする．要するに，対をなす 2 粒子にたいし，回転軸が平行（パラレル）なスピン成分を 3 つずつ測定可能であるとする．

   新たな測定設定を加えたので，古典確率空間 $(\mathcal{B},P)$ とその性質（28 頁参照）について少々手直しを要する．ただし，確率空間をどのように修正すればよいかは，明らかだろう．今後は，その修正された確率空間を改めて $(\mathcal{B},P)$ と呼ぶ．$(\mathcal{B},P)$ の性質についてだが，式の形式自体は 28 頁で述べたままでよい．(x,X) と (y,Y) がとりうる値の範囲を，

$$(x,X)=(a,A),\,(a',A'),\,(a'',A'')$$
$$(y,Y)=(b,B),\,(b',B')\,(b'',B'')$$

   のように変更する．

   また，今後この章では，$(\mathcal{B},P)$ において，次のことを仮定する．
   - $P(x)\neq 0 \qquad (x=a,\,a',\,a'')$ および $P(y)\neq 0 \qquad (y=b,\,b',\,b'')$.
   - $P(a)+P(a')+P(a'')=1$ および $P(b)+P(b')+P(b'')=1$.
   - $P(xy)=P(x)\cdot P(y) \quad (x=a,\,a',\,a'';\,y=b,\,b',\,b'')$.

   3 番目の仮定について少し説明を加えたい．これによって，2 粒子それぞれの測定装置の設定は統計的に独立である，ということが仮定される．仮に統計的に独立でないならば，その非独立性を用いて量子力学的相関を説明するモデルが構成されるかもしれない．しかし，そのようなモデルに興味はないだろう[*20]．なぜなら，そのようなモデルが存在しても，二つの装置の設定が独立である場合（ベルタイプの不等式が実際に実験された状況）におけるモデルの存在・非存在についてなにも教えてくれないからである．

3. **サボー＝レデイ条件の厳密な定式化**　サボー＝レデイ条件における「原子元 Z は，二つの測定装置の設定と統計的に独立である」という表現を次の 2 通りに解釈し，それぞれ満たす共通原因モデルの存在，非存在について考える．

[*20] ちなみに，サボーが実際に構成したモデルでは二つの装置の設定は統計的に独立である．

$\mathcal{C}$-**独立性 I**　$\{C_i^{XY}(i \in I^{XY}) \mid X = A, A', A''; Y = B, B', B''\}$ によって生成される σ 完備なブール束 $\mathcal{C}$ の任意の原子元 Z について

$$P(Zxy) = P(Z) \cdot P(xy) \qquad (x = a,\, a',\, a''; \, y = b,\, b',\, b'')$$

である．

$\mathcal{C}$-**独立性 II**　$\{C_i^{XY}(i \in I^{XY}) \mid X = A, A', A''; Y = B, B', B''\}$ によって生成される σ 完備なブール束 $\mathcal{C}$ の任意の原子元 Z について

$$P(Zx) = P(Z) \cdot P(x) \qquad (x = a,\, a',\, a''),$$
$$P(Zy) = P(Z) \cdot P(y) \qquad (y = b,\, b',\, b'').$$

である．

「サボー＝レデイ条件の厳密な定式化」について説明したい．２つの $\mathcal{C}$-独立性はともに，$\mathcal{C}$ の原子元が満たすよう要請された条件である．だが，$\mathcal{C}$-独立性 II を例に説明すると，$\mathcal{C}$ の原子元（に対応する事象）が粒子 1，粒子 2 それぞれの装置の設定と統計的に独立であることと，$\mathcal{C}$ の任意の元（に対応する事象）が粒子 1，粒子 2 それぞれの装置の設定と統計的に独立であることは，同等である．このことは，原子元の定義と加法性から直ちに明らかである．よって，$\mathcal{C}$-独立性 I，II を満たすことは，それぞれ，その条件で述べられた等式を $\mathcal{C}$ の任意の元が満たすということと同じである．

$\mathcal{C}$-独立性 I は II より強い条件である．実際，前者が成立すると仮定すると，例えば $P(xZ)$（ここで，Z は $\mathcal{C}$ の原子元）を次のように式変形できるが，そのことから後者が成立することがわかる．

$$\begin{aligned} P(xZ) &= P(xbZ) + P(xb'Z) + P(xb''Z) \\ &= \{P(xb) + P(xb') + P(xb'')\}P(Z) \qquad [\mathcal{C}\text{-独立性 I より}] \\ &= P(x)P(Z). \end{aligned}$$

実は，サボーとレデイが未解決問題を提示したとき，彼らが考えていたのは $\mathcal{C}$-独立性 II に該当する条件であった．そこで，次節における議論のように $\mathcal{C}$-独立性 I を課す場合，彼らが提示した問題を考察するのに，彼らが考えていた条件より強い制約を課すことになる．理由は二つ後の段落で述べるが，著者は $\mathcal{C}$-独立性 II より I のほうが適切な要請だと考えている．

それにしても，なぜ，$\mathcal{C}$-独立性を満たす必要があるのだろうか．以前も利用した次の図を用いて説明しよう．時空領域 R_1 において粒子 1 のスピン $\mathbf{a}$ 成分の測定が，R_2 におい

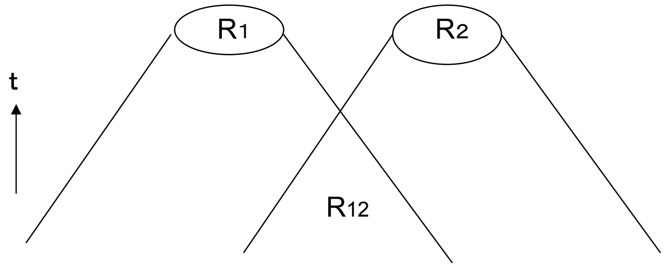

図 5

て粒子 2 のスピン $\mathbf{b}$ 成分の測定が行われるとする．繰り返しになるが，R_1 と R_2 において生じる 2 つの事象に共通の原因というものが存在するならば，それは，R_1 と R_2 の過去光円錐の共通部分 R_{12} において生じる事象であろう．すると，条件付相関 $\triangle^{ab}(AB)$ の遮蔽因子 $\{C_i^{AB}\}_{i\in I^{AB}}$ に属するどれか一つの事象 C_k^{AB} が，R_1 と R_2 の過去光円錐の共通部分 R_{12} において生じることになる．だが，R_{12} において C_k^{AB} が生じたあとでも，測定する物理量を変更できる．そこで，各粒子の測定設定と原子元にあたる事象が統計的に独立であるという，$\mathcal{C}$-独立性を要請するのである．

では，$\mathcal{C}$-独立性 I と II の違いはなんだろうか．すでに述べたように，I は II より強い．そこで，II は満たすが I は満たさないことがありうる．もっとも興味深い違いが生じるのは次の数学的事実が具体化する状況であろう．

事実 1. 粒子 1 と粒子 2，それぞれにたいする測定装置の設定が統計的に独立であり（すなわち $P(xy) = P(x) \cdot P(y)$），そのうえ，$\mathcal{C}$-独立性 II を満たす（$P(xZ) = P(x) \cdot P(Z)$）とする．そのとき，$\mathcal{C}$-独立性 I を満たさない（$P(xyZ) \neq P(xy) \cdot P(Z)$）ならば，$P(y \mid xZ) \neq P(y \mid Z)$ である．

Proof. 測定装置の設定が統計的に独立であること，および $\mathcal{C}$-独立性 II を満たすことを仮定して，対偶，すなわち「$P(y \mid xZ) = P(y \mid Z)$ ならば，$P(xyZ) = P(xy) \cdot P(Z)$ である」ことを示す．

$$\begin{aligned}
P(xyZ) &= P(y \mid xZ) \cdot P(xZ) \\
&= P(y \mid Z) \cdot P(xZ) && \text{[対偶における前件より]} \\
&= P(y \mid Z) \cdot P(x) \cdot P(Z) && \text{[}\mathcal{C}\text{-独立性 II より]} \\
&= P(y) \cdot P(x) \cdot P(Z) && \text{[}\mathcal{C}\text{-独立性 II より]} \\
&= P(xy) \cdot P(Z) && \text{[装置の設定の統計的独立性より]}
\end{aligned}$$

よって，題意が示された．□

すでに述べたように，サボーとレデイが問題を提示したとき，考えていた条件は $\mathcal{C}$-独立性 II に該当するものであった．彼らが提示した問題を彼らが与えたものより強い条件（$\mathcal{C}$-独立性 I）のもとで考える場合，それ相当の根拠が必要だろう．事実 1 はその根拠を与える．$\mathcal{C}$ の原子元のどれか一つに対応する事象が R_{12} において生じるとしよう．もし $\mathcal{C}$-独立性 II は満たすが I を満たさない場合，その事象が生じた後に，粒子 1 の装置の設定を変えると，粒子 2 の設定の確率に変化が生じることになってしまう．

以上のことは，$\mathcal{C}$-独立性 II だけでなく I も満たすべきと考える強い根拠を与える．しかし次の 2.2.2 節において，いくつかの適切な条件のもとでは $\mathcal{C}$-独立性 I を満たす共通原因モデルが存在しない，ということが数学的に示される．もし共通原因アプローチを続けるならば，なんらかの条件をなくすか，弱める必要がある．そこで，2.2.3 節では，$\mathcal{C}$-独立性 II を満たす共通原因モデルの存在可能性について考察する．$\mathcal{C}$-独立性 I を除き 2.2.2 節と同一条件のもとで，$\mathcal{C}$-独立性 II を満たす共通原因モデルが存在しない，ということが数学的に示される．

2.2.2 $\mathcal{C}$-独立性 I を満たす共通原因モデルは存在するか？

本節では，次の問題に数学的議論により否定的解答を与える．（また，下の問題で古典確率空間 $(\mathcal{B}, P)$ と述べるとき，その確率空間における性質（28 頁参照）と，その確率空間における仮定（34 頁参照）が成立していることを含意する．）

問題 1． 1 重項状態にある粒子対について，各測定装置が，パラレル設定（$\theta_{ab} = \theta_{a'b'} = \theta_{a''b''} = 0$）をなす三つのスピン成分（$a$, a', a''; b, b', b'' の三つのパラレル設定）を測定可能であるとする．そのとき，古典確率空間 $(\mathcal{B}, P)$ を，次の三つの要請を満たす遮蔽因子を含む古典確率空間 $(\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{P})$ へと拡張できるのか？

共通原因　$\{C_i^{XY}\}_{i \in I^{XY}}$ は条件付相関 $\triangle^{xy}(XY)$ の遮蔽因子である．

非局所的文脈-独立性　$P(X \mid xy\, C_i^{XY}) = P(X \mid x\, C_i^{XY})$

$P(Y \mid xy\, C_i^{XY}) = P(Y \mid y\, C_i^{XY})$

$\mathcal{C}$-独立性 I　$\{C_i^{XY}(i \in I^{XY}) \mid X = A, A', A''; Y = B, B', B''\}$ によって生成される σ 完備なブール束 $\mathcal{C}$ の任意の原子元 Z について

$$P(Zxy) = P(Z) \cdot P(xy) \qquad (x = a,\, a',\, a''; \, y = b,\, b',\, b'')$$

である．

前章においても（すなわち，共通の共通原因アプローチにおいても），「共通原因」，「非局所的 - 文脈独立性」という条件の呼び名を用いた．同じ名で呼ばれる二つの条件は，「共通の共通原因」アプローチと「共通原因」アプローチという一点を除くと，根本となる考え方に違いはない．そこで，対応する条件を同一の名前で呼ぶ．

さて，一般に次のことが成立する．二つの事象 E_1 と E_2 の間に完全（反）相関があるとしよう．すなわち，$P(E_2 \mid E_1) = P(E_2^{\perp} \mid E_1^{\perp}) = 1$ である（反相関の場合は，$P(E_2 \mid E_1) = P(E_2^{\perp} \mid E_1^{\perp}) = 0$ であり，よって $P(E_2^{\perp} \mid E_1) = P(E_2 \mid E_1^{\perp}) = 1$ である）としよう．そのとき，よく知られているように，その相関の遮蔽因子 $\{C_i\}_{i\in I}$ が存在するならば，任意の $i \in I$ について，$P(E_1 \mid C_i)$ と $P(E_2 \mid C_i)$ の値は必ず 0 か 1 となる（例えば，文献 [48] の 4.3 節参照）．

いま，粒子対にたいし，三つパラレルなスピン成分を測定できる状況について考察していた．すると，もし粒子対が「1 重項状態」にあるならば，同一スピン成分の測定結果は完全反相関の関係にあることになる．すると，次の事実が成立することは当然のことである．

事実 2． 1 重項スピン状態にある粒子対にたいし同一スピン成分を測定する（すなわち，粒子 1 については S_x を，粒子 2 については S_y を測定し，ただし $\theta_{xy} = 0$ である）とし，その条件付相関 $\triangle^{xy}(XY)$ の遮蔽因子 $\{C_i^{XY}\}_{i\in I^{XY}}$ が存在する（すなわち，**共通原因**が成立する）とする．さらに，**非局所的文脈 - 独立性**が成立するとする．そのとき，$P(C_i^{XY}) \neq 0$ である任意の $i \in I^{XY}$ について，

$$P(X \mid xC_i^{XY}) = 0 \text{ かつ } \quad P(Y \mid yC_i^{XY}) = 1$$
あるいは
$$P(X \mid xC_i^{XY}) = 1 \text{ かつ } \quad P(Y \mid yC_i^{XY}) = 0$$

となる．そのうえ，

$$C^X \equiv \vee_{i\in I^X}\ C_i^{XY}\ \ (\text{ここで}, I^X \equiv \{i \in I^{XY} \mid\ \ P(X \mid xC_i^{XY}) = 1\ \}),$$
$$C^Y \equiv \vee_{i\in I^Y}\ C_i^{XY}\ \ (\text{ここで}, I^Y \equiv \{i \in I^{XY} \mid\ \ P(Y \mid yC_i^{XY}) = 1\ \}).$$

と定義すると，$P(C^X C^Y) = 0$ かつ $P((C^X)^{\perp}(C^Y)^{\perp}) = 0$ となる．

Proof. $P(C_i^{XY}) \neq 0$ である任意の $i \in I^{XY}$ について，次の等式が成立する[*21]．

[*21] 細かい点になるが，本文でこれからみる式変形 2 番目の等号で条件付確率の定義可能性について疑問をも

$$
\begin{aligned}
0 &= P(XY \mid xy) && [\text{完全反相関より}]\\
&= P(XY \mid xyC_i^{XY}) && [P(XYxyC_i) \le P(XYxy) = 0 \text{ より}]\\
&= P(X \mid xyC_i^{XY}) \cdot P(Y \mid xyC_i^{XY}) && [\textbf{共通原因}\text{より}]\\
&= P(X \mid xC_i^{XY}) \cdot P(Y \mid yC_i^{XY}) && [\textbf{非局所的文脈-独立性}\text{より}]
\end{aligned}
$$

よって，

$$P(X \mid xC_i^{XY}) = 0 \ \text{あるいは}\ P(Y \mid yC_i^{XY}) = 0$$

である．同様の議論を，$0 = P(X^{\perp}Y^{\perp} \mid xy)$ から始めると，

$$P(X^{\perp} \mid xC_i^{XY}) = 0 \ \text{あるいは}\ P(Y^{\perp} \mid yC_i^{XY}) = 0$$

であることもわかる．

これら二つのことから，次のようにして

$$P(X \mid xC_i^{XY}) = 0 \ \text{ならば}\ P(Y \mid yC_i^{XY}) = 1$$

と結論できる．まず，$P(X \mid xC_i^{XY}) = 0$ とする．そのとき，$P(X^{\perp} \mid xC_i^{XY}) = 1$ である．すると，前段落最後で述べたように，$P(X^{\perp} \mid xC_i^{XY})$ か $P(Y^{\perp} \mid yC_i^{XY})$ は 0 なので，$P(Y^{\perp} \mid yC_i^{XY}) = 0$ である．そのとき，$P(Y \mid yC_i^{XY}) = 1$ である．

同様にして，

$$P(Y \mid yC_i^{XY}) = 0 \ \text{ならば}\ P(X \mid xC_i^{XY}) = 1$$

であることも結論できる．

以上のことから，$P(C_i^{XY}) \neq 0$ であるとき，

$$
\begin{gathered}
P(X \mid xC_i^{XY}) = 0 \ \text{かつ}\ \ P(Y \mid yC_i^{XY}) = 1\\
\text{あるいは}\\
P(X \mid xC_i^{XY}) = 1 \ \text{かつ}\ \ P(Y \mid yC_i^{XY}) = 0
\end{gathered}
$$

であることがわかる．

次に，上述のように定義された C^X と C^Y について，$P(C^X C^Y)$ と $P((C^X)^{\perp}(C^Y)^{\perp})$ の値が 0 であることを示す．前段落でわかったことから，明らかに $C^X C^Y = \emptyset$ で

つかもしれない．しかし，まず仮定より $P(C_i^{XY}) \neq 0$．そのとき，条件付相関の遮蔽因子の条件 3 の前半より，$P(C_i^{XY}xy) \neq 0$ なので，定義可能である．

ある．よってその確率は 0 である．続けて，$P((C^X)^\perp(C^Y)^\perp) = 0$ を示す．$C_i^{XY} \leq (C^X)^\perp(C^Y)^\perp$ とする．そのとき，$P(C_i^{XY}) = 0$ である．なぜなら，$P(C_i^{XY}) \neq 0$ とすると，$P(X \mid xC_i^{XY})$ と $P(Y \mid yC_i^{XY})$ の値は 0 か 1 であることと，C^X，C^Y の定義から，$P(X \mid xC_i^{XY}) = P(Y \mid yC_i^{XY}) = 0$ となるが，すでにみたようにそのような C_i^{XY} は存在しないからである．このことから，$P((C^X)^\perp(C^Y)^\perp) = 0$ であることがわかる． □

この事実の導出に $\mathcal{C}$ 独立性を用いていないことに注意してほしい．そこで，本節では $\mathcal{C}$-独立性 I を満たすモデルの存在，非存在について考察しているのだが，次節において $\mathcal{C}$-独立性 II を満たすモデルについて考察するときにも，この事実を利用できる．

さて，この事実を用いて次の命題を示すことができる．

命題 3. 1 重項スピン状態にある粒子対にたいし，3 つのパラレル設定 ($\theta_{\mathbf{ab}} = \theta_{\mathbf{a'b'}} = \theta_{\mathbf{a''b''}} = 0$) を含むスピン測定を行い，そのうえ粒子 1 と 2 の測定装置の設定は統計的に独立である（すなわち，$P(xy) = P(x) \cdot P(y)$）とする．また，条件付相関 $\triangle^{ab}(AB)$ ，$\triangle^{a'b'}(A'B')$ および $\triangle^{a''b''}(A''B'')$ のそれぞれの遮蔽因子 $\{C_i^{AB}\}_{i \in I^{AB}}$，$\{C_j^{A'B'}\}_{j \in I^{A'B'}}$，$\{C_k^{A''B''}\}_{k \in I^{A''B''}}$ が存在するとする（**共通原因**が成立するとする）．さらに，非局所的文脈-独立性，$\mathcal{C}$-独立性 I が成立しているとする．そのとき，クラウザー＝ホーンの不等式が導出される．

Proof. 事象の集合 $\mathcal{D}$ を次のように定義する．

$$\mathcal{D} \equiv \{C_i^{AB}C_j^{A'B'}C_k^{A''B''} \ (i \in I^{AB}; j \in I^{A'B'}; k \in I^{A''B''}) \ \mid \ C_i^{AB}C_j^{A'B'}C_k^{A''B''} \neq \emptyset \ \}.$$

そのとき，次の段落以降で示すように，まず，$\mathcal{D}$ が四つの条件付相関 $\triangle^{ab}(AB)$, $\triangle^{ab''}(AB'')$, $\triangle^{a'b}(A'B)$, および $\triangle^{a'b''}(A'B'')$ に**共通**の遮蔽因子であることがわかる．さらに，$\mathcal{D}$ が命題 2 で述べた二つの条件を満たすことも示すことができる．すると，命題 2 より，クラウザー＝ホーンの不等式が導出される．

$\mathcal{D}$ が四つの条件付相関の遮蔽因子であることの証明

具体例として，$\mathcal{D}$ が $\triangle^{ab''}(AB'')$ の遮蔽因子であることを示す．条件付相関の遮蔽因子の 3 条件（30 頁参照）のなかで，条件 1 と 2 を満たすことは明らかであろう．3 番目の条件，すなわち，任意の $D \in \mathcal{D}$ について，$P(D) \neq 0$ であるとき，$P(ab''D) \neq 0$ であり，そのうえ等式

$$P(AB'' \mid ab''D) = P(A \mid ab''D) \cdot P(B'' \mid ab''D) \tag{9}$$

が成立することをみていこう．

$P(D) \neq 0$ であるとする．まず $P(ab''D) \neq 0$ を示したいのだが，$\mathcal{C}$-独立性 I より $P(ab''D) = P(ab'') \cdot P(D)$ なので，$P(ab'') \neq 0$ を示せば十分である．さて，$P(a) \neq 0$ および $P(b'') \neq 0$ であった．すると，2 粒子それぞれの装置の設定の統計的独立性より $P(ab'') \neq 0$ である．よって，$P(ab''D) \neq 0$ であり，事象 $ab''D$ によって条件付けられた条件付確率は定義可能である．

次に等式 (9) を示す．まず，

$$C^A \equiv \vee_{i \in I^A}\ C_i^{AB} \qquad (I^A \equiv \{i \in I^{AB} \mid\ P(A \mid a \wedge C_i^{AB}) = 1\ \}),$$
$$C^{B''} \equiv \vee_{k \in I^{B''}}\ C_k^{A''B''} \qquad (I^{B''} \equiv \{k \in I^{A''B''} \mid\ P(B'' \mid b'' \wedge C_k^{A''B''}) = 1\ \}).$$

と，定義する．$D \in \mathcal{D}$ が $D = C_i^{AB} C_j^{A'B'} C_k^{A''B''}$ と表されるとする．遮蔽因子と C^A の定義から，明らかに，$C_i^{AB} \leq C^A$ あるいは $C_i^{AB} \leq (C^A)^\perp$ である．同様にして，$C_k^{A''B''} \leq C^{B''}$ あるいは $C_k^{A''B''} \leq (C^{B''})^\perp$ であることもわかる．そこで，次のように場合分けして考えよう．

- $C_i^{AB} \leq C^A$ かつ $C_k^{A''B''} \leq C^{B''}$ である場合：
  $P(A \mid aC_i^{AB}) = 1$ かつ $P(B'' \mid b''C_k^{A''B''}) = 1$ である．一般に，任意の事象 E_1，E_2，E_3 について，$E_1 \leq E_2$ かつ $P(E_3 \mid E_2) = 1$ であるとき，$P(E_1) \neq 0$ ならば $P(E_3 \mid E_1) = 1$ である．すると，$ab''D \leq aD \leq aC_i^{AB}$ なので，$P(A \mid ab''D) = 1$ である．同様に，$ab''D \leq b''D \leq b''C_k^{A''B''}$ なので，$P(B'' \mid ab''D) = 1$ である．そのとき，$P(AB'' \mid ab''D)$ の値は 1 以外ありえない．よって，等式 (9) の両辺は共に 1 であり，等号が成立する．
- $C_i^{AB} \leq (C^A)^\perp$ あるいは $C_k^{A''B''} \leq (C^{B''})^\perp$ である場合：
  $C_i^{AB} \leq (C^A)^\perp$ である場合について証明する．そのとき，$P(A \mid aC_i^{AB}) = 0$ である[*22]．よって，$P(AaC_i^{AB}) = 0$ である．また，$AB''ab''D \leq AaC_i^{AB}$ なので，$P(AB''ab''D) = 0$ であり，等式 (9) の左辺 $P(AB'' \mid ab''D)$ の値は 0 である．一方，$Aab''D \leq AaC_i^{AB}$ なので，$P(Aab''D)$ の値も 0 であることから，等式 (9) の右辺の値も 0 となり，等号が成立する．

$\mathcal{D}$ が四つの条件付相関について命題 2 の条件 1 を満たすこと

条件付相関 $\triangle^{ab''}(AB'')$ を具体例として，任意の $D = C_i^{AB} C_j^{A'B'} C_k^{A''B''} \in \mathcal{D}$ が命題 2 の条件 1-(a) を満たすこと，すなわち

$$P(A \mid ab''D) = P(A \mid aD) \tag{10}$$

[*22] $P(ab''D) \neq 0$ および $ab''D \leq aC_i^{AB}$ より，この条件付確率は定義可能である．

を満たすことをみていこう．

再び，次のように場合分けする．

- $C_i^{AB} \leq C^A$ である場合
  等式 (10) の両辺はともに 1 であり，等号が成立する．
- $C_i^{AB} \leq (C^A)^{\perp}$ である場合
  等式 (10) の両辺はともに 0 であり，等号が成立する．

$\mathcal{D}$ の任意の元が命題 2 の条件 2 を満たすこと

$\mathcal{C}$ 独立性-I が成立するので，$\mathcal{C}$ の任意の原子元について命題 2 の条件 2 の等式が成立する．そのとき，同式は $\mathcal{C}$ の任意の元についても成立する．

以上より，$\mathcal{D}$ について命題 2 を適用可能となり，クラウザー＝ホーンの不等式が導出される． □

したがって，結合系が「1 重項状態」という特殊な状態にあるとき，**共通原因**，**非局所的文脈-独立性**，**$\mathcal{C}$-独立性 I** を用いて，クラウザー＝ホーンの不等式が導出される．各相関ごとの共通原因のみを要請しても，すべての相関に共通の遮蔽因子が構成され，不等式が導出可能となる．不等式が破れる場合には，量子力学の現象的確率を表現する古典確率空間 $(\mathcal{B}, P)$ を，三つの要請（共通原因，非局所的文脈-独立性，$\mathcal{C}$-独立性 I）を満たす遮蔽因子を含む古典確率空間 $(\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{P})$ へと拡張することは不可能であり，それらの要請を満たす共通原因モデルは存在しない．

2.2.3 $\mathcal{C}$-独立性 II を満たす共通原因モデルは存在するか？

命題 1 を思い出してほしい．そこで述べた五つの条件を満たす共通原因モデルが存在した．だが，前節で明らかになったように，命題 1 の 5 番目の条件を C 独立性-I へと強めた共通原因モデルはいつでも存在するわけではない．では，$\mathcal{C}$ 独立性-I を $\mathcal{C}$ 独立性-II へと弱めた共通原因モデルはいつでも存在するのだろうか．本節ではこの問題について考察する．

前節の命題 3 と同様に，これから考える状況設定では，二つの粒子それぞれの測定装置の設定が統計的に独立であることを仮定する．36 頁の図を用いて説明すると，本節では次の状況について考察することになる．

- 時空領域 R_1 における測定装置の設定と時空領域 R_2 における測定装置の設定は統計的に独立である．

- R_1 における測定装置の設定，R_2 における測定装置の設定は，それぞれ，R_{12} において生じる事象 $Z \in \mathcal{C}$ と統計的に独立である．

そのとき，次の命題が示される．

命題 4. 1 重項スピン状態にある粒子対にたいし，3 つのパラレル設定 ($\theta_{\mathbf{ab}} = \theta_{\mathbf{a'b'}} = \theta_{\mathbf{a''b''}} = 0$) を含むスピン測定を行い，そのうえ粒子 1 と 2 の測定装置の設定は統計的に独立である（すなわち，$P(xy) = P(x) \cdot P(y)$）とする．また，条件付相関 $\triangle^{ab}(AB)$，$\triangle^{a'b'}(A'B')$ および $\triangle^{a''b''}(A''B'')$ のそれぞれの遮蔽因子 $\{C_i^{AB}\}_{i \in I^{AB}}$，$\{C_j^{A'B'}\}_{j \in I^{A'B'}}$，$\{C_k^{A''B''}\}_{k \in I^{A''B''}}$ が存在するとする（**共通原因**が成立するとする）．さらに，非局所的文脈-独立性，$\mathcal{C}$-独立性 II が成立しているとする．そのとき，次の不等式が導出される．

$$
\begin{aligned}
P(A'B'' \mid a'b'') \leq \frac{1}{P(b'')} & P(A^{\perp} \mid a) - P(A^{\perp}B''^{\perp} \mid ab'') \\
& + \frac{1}{P(a')}P(B^{\perp} \mid b) - P(A'^{\perp}B^{\perp} \mid a'b)
\end{aligned}
$$

Proof. C^A, $C^{A'}$, C^B, $C^{B''}$ を事実 2 と同じように定義する．そのとき，下のように変形すると次の不等式 (11) が得られる．

$$
\frac{1}{P(a')}P(C^{A'}(C^B)^{\perp}) + \frac{1}{P(b'')}P((C^A)^{\perp}C^{B''}) \geq P(C^{A'}C^{B''} \mid a'b''). \tag{11}
$$

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{P(a')}P(C^{A'}(C^B)^{\perp}) + \frac{1}{P(b'')}P((C^A)^{\perp}C^{B''}) \\
= & \frac{1}{P(a'b'')}\{P(C^{A'}(C^B)^{\perp}b'') + P((C^A)^{\perp}C^{B''}a')\} \\
\geq & \frac{1}{P(a'b'')}\{P((C^B)^{\perp}C^{A'}C^{B''}a'b'') + P((C^A)^{\perp}C^{A'}C^{B''}a'b'')\} \\
= & \frac{1}{P(a'b'')}\{P(C^A C^{A'}C^{B''}a'b'') + P((C^A)^{\perp}C^{A'}C^{B''}a'b'')\} \\
= & P(C^{A'}C^{B''} \mid a'b'').
\end{aligned}
$$

この式変形におけるはじめの等号は，装置の設定の統計的独立性と $\mathcal{C}$ 独立性-II により，最後から二つ目の等号は，事実 2 で示したように $P(C^A C^B) = 0$ かつ $P((C^A)^{\perp}(C^B)^{\perp}) = 0$ なので，任意の事象 E について $P((C^B)^{\perp}E) = P(C^A E)$ であることによる．

さて，不等式 (11) の左辺第 1 項は次のように変形できる．

$$\begin{aligned}\frac{1}{P(a')}P(C^{A'}(C^B)^\perp) &= \frac{1}{P(a'b)}P(bC^{A'}(C^B)^\perp)\\ &\le \frac{1}{P(a'b)}\{P(b(C^B)^\perp) - P(a'b(C^{A'})^\perp(C^B)^\perp)\}\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{P(a')}P(C^{A'}(C^B)^\perp)\\ &\qquad \le \frac{1}{P(a'b)}\{P(b(C^B)^\perp) - P(a'b(C^{A'})^\perp(C^B)^\perp)\}.\end{aligned} \tag{12}$$

が得られる．同様にして，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{P(b'')}P((C^A)^\perp C^{B''})\\ &\qquad \le \frac{1}{P(ab'')}\{P(a(C^A)^\perp) - P(ab''(C^A)^\perp(C^{B''})^\perp)\}.\end{aligned} \tag{13}$$

が得られる．すると，(11)， (12) および (13) から，不等式

$$\begin{aligned}&P(C^{A'}C^{B''} \mid a'b'')\\ &\quad \le \frac{1}{P(a'b)}\{P(b(C^B)^\perp) - P(a'b(C^{A'})^\perp(C^B)^\perp)\}\\ &\qquad + \frac{1}{P(ab'')}\{P(a(C^A)^\perp) - P(ab''(C^A)^\perp(C^{B''})^\perp)\}.\end{aligned} \tag{14}$$

が得られる．

さて，事実 2 でみたように，$(\theta_{xy} = 0)$ なるパラレル設定に二つの装置があるとき，$P(C_i^{XY}) \neq 0$ である任意の $i \in I^{XY}$ について，

$$P(X \mid xC_i^{XY}) = 1 \quad \text{か} \quad 0,$$

$$P(Y \mid yC_i^{XY}) = 1 \quad \text{か} \quad 0$$

であった．このことと C^X と C^Y の定義から，次の等式が導かれる．

$$P(X \mid xC^X) = 1 \qquad \text{かつ} \qquad P(xC^X \mid X) = 1,$$

$$P(Y \mid yC^Y) = 1 \qquad \text{かつ} \qquad P(yC^Y \mid Y) = 1,$$

$$P(xX^\perp \mid x(C^X)^\perp) = 1 \qquad \text{かつ} \qquad P(x(C^X)^\perp \mid xX^\perp) = 1,$$

$$P(yY^{\perp} \mid y(C^Y)^{\perp}) = 1 \qquad \text{かつ} \qquad P(y(C^Y)^{\perp} \mid yY^{\perp}) = 1,$$

（ここで，$(x, X) = (a, A), (a', A')$;　$(y, Y) = (b, B), (b'', B'')$ である．）一般に，二つの事象 E_1 と E_2 について，$P(E_2 \mid E_1) = 1$ かつ $P(E_1 \mid E_2) = 1$ であるならば，任意の事象 F について $P(E_1F) = P(E_2F)$ である．

このことを用いると，不等式 (14) の左辺は

$$\begin{aligned} P(C^{A'}C^{B''} \mid a'b'') &= \frac{P(C^{A'}a'C^{B''}b'')}{P(a'b'')} \\ &= \frac{P(A'B'')}{P(a'b'')} \\ &= P(A'B'' \mid a'b''). \end{aligned}$$

となる．すなわち，

$$P(C^{A'}C^{B''} \mid a'b'') = P(A'B'' \mid a'b'') \tag{15}$$

である．

また，不等式 (14) の右辺第 1 項，第 2 項については，それぞれ，

$$\begin{aligned} &\frac{1}{P(a'b)}\{P(b(C^B)^{\perp}) - P(a'b(C^{A'})^{\perp}(C^B)^{\perp})\} \\ &\qquad = \frac{1}{P(a'b)}\{P(bB^{\perp}) - P(a'bA'^{\perp}B^{\perp})\} \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{P(ab'')}\{P(a(C^A)^{\perp}) - P(ab''(C^A)^{\perp}(C^{B''})^{\perp})\} \\ &\qquad = \frac{1}{P(ab'')}\{P(aA^{\perp}) - P(ab''A^{\perp}B''^{\perp})\} \end{aligned} \tag{17}$$

不等式 (14) に (15)，(16)，(17) を代入し，二つの測定装置の設定の統計的独立性と $\mathcal{C}$ 独立性-II を用いると，

$$\begin{aligned} P(A'B'' \mid a'b'') \leq \frac{1}{P(b'')}&P(A^{\perp} \mid a) - P(A^{\perp}B''^{\perp} \mid ab'') \\ &+ \frac{1}{P(a')}P(B^{\perp} \mid b) - P(A'^{\perp}B^{\perp} \mid a'b) \end{aligned} \tag{18}$$

が導出される．　□

この命題の意味を述べたい．量子力学によると，

$$P(A' \wedge B''|a' \wedge b'') = \frac{1}{2}\sin^2(\frac{\theta_{\mathbf{a}'\mathbf{b}''}}{2}),$$

$$\frac{1}{P(b'')}P(A^{\perp}|a) - P(A^{\perp} \wedge (B'')^{\perp}|a \wedge b'') = \frac{1}{2P(b'')} - \frac{1}{2}\sin^2(\frac{\theta_{\mathbf{ab}''}}{2}),$$

$$\frac{1}{P(a')}P(B^{\perp}|b) - P((A')^{\perp} \wedge B^{\perp}|a' \wedge b) = \frac{1}{2P(a')} - \frac{1}{2}\sin^2(\frac{\theta_{\mathbf{a}'\mathbf{b}}}{2})$$

である．これらの式を不等式 (18) に代入すると

$$\sin^2(\frac{\theta_{\mathbf{a}'\mathbf{b}''}}{2}) \leq \frac{1}{P(b'')} + \frac{1}{P(a')} - \sin^2(\frac{\theta_{\mathbf{ab}''}}{2}) - \sin^2(\frac{\theta_{\mathbf{a}'\mathbf{b}}}{2})$$

となる．例えば， $\theta_{\mathbf{ab}''} = \theta_{\mathbf{a}'\mathbf{b}} = \theta_{\mathbf{a}'\mathbf{b}''} = \frac{2\pi}{3}$ であるとき，この不等式は

$$\frac{3}{4} \leq \frac{1}{P(a')} + \frac{1}{P(b'')} - \frac{3}{4} - \frac{3}{4}$$

となるが，この不等式はいつでも成立するわけではない． $\frac{8}{9} \lneq P(a')$ かつ $\frac{8}{9} \lneq P(b'')$ であるとしよう．そのときその不等式は破れることになる．

命題 4 の不等式は，結合系が「1 重項状態」という特殊な状態にあるときに，**共通原因**，**非局所的文脈-独立性**，$\mathcal{C}$**-独立性 II** を用いて，導出された．この不等式が破れる場合には，量子力学の現象的確率を表現する古典確率空間 $(\mathcal{B}, P)$ を，三つの要請（共通原因，非局所的文脈-独立性，$\mathcal{C}$-独立性 II）を満たす遮蔽因子を含む古典確率空間 $(\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{P})$ へと拡張することは不可能であり，それらの要請を満たす共通原因モデルは存在しない．

命題 3 と命題 4 で，それぞれにおいて，量子力学的確率と不整合な不等式を導出した．それぞれの不等式の導出に用いた条件は，命題 3 では $\mathcal{C}$ 独立性-I を用い，命題 4 では $\mathcal{C}$ 独立性-II を用いた点においてのみ異なる．$\mathcal{C}$ 独立性-II は $\mathcal{C}$ 独立性-I より弱い条件であった．その弱い条件のもとで共通原因モデルの非存在が導かれたので，同じ結論は，$\mathcal{C}$ 独立性-I を要請する共通原因モデルにも適用される．命題 4 は，そこで示された不等式が破れる場合には，$\mathcal{C}$ 独立性-I を要請する共通原因モデルが存在しないことも示している．

ただし，二つの命題は，共通原因モデルの非存在を示すことができる適用範囲において異なる．命題 4 で導出された不等式においては，$1/P(a')$ や $1/P(b'')$ のように，測定装置の設定の確率がそれ単独で現れる．その結果，命題 4 の不等式が破れる具体的状況の説明で述べたように，命題 4 の適用結果として共通原因モデルの非存在を述べる際，測定装置の設定の確率に言及する必要がある．一方，命題 3 の不等式（クラウザー＝ホーンの不等式）の各項は量子力学的確率であり，その不等式に測定装置の設定の確率が単独で現れることはない．命題 3 の適用結果として共通原因モデルの非存在を示す場合には，測定装置の設定の確率に言及する必要はない．

サボーは，局所性に関するいくつかの条件を満たす共通原因モデルを構成した（命題1）．しかし，そのモデルは，共通原因事象からなる代数と測定装置の設定が統計的に独立であるという条件，サボー＝レデイ条件を満たすとは限らない．この条件は，共通原因事象は測定が行われる二つの時空領域の過去光円錐の共通部分で生じると考え，そのうえ装置の設定は粒子対が粒子源を離れてからでも変更可能とするとき，満たして然るべき条件であった．本論文では，サボー＝レデイ条件を 2 通りの仕方で定式化した（$\mathcal{C}$ 独立性-I と II）．$\mathcal{C}$ 独立性-I を要請すると，クラウザー＝ホーンの不等式が導出された．$\mathcal{C}$ 独立性-I より弱い $\mathcal{C}$ 独立性-II を要請しても，量子力学的予測と両立しないある不等式が導出された．この意味で，$\mathcal{C}$ 独立性-II は，量子力学的予測と両立する共通原因モデルにとっての限界とでもいうべき条件である．

本章最後に，共通原因モデルに残された道についてコメントしたい．本論文では，相関をもつ二つの事象に共通の原因はそれぞれの事象が生じる時空領域の過去光円錐の共通部分で生じる，ということをほぼ自明のこととして考えたきた．このことを疑ってみるのは一つの方策かもしれない．条件付相関の遮蔽因子が生じうる時空領域を，例えば測定が行われる二つの時空領域の過去光円錐の和集合へと，広げるのである．本論文ではこれ以上考察しないが，それぞれの時空領域上で生じる事象間にどのような関係があるのかを考慮しつつ，共通原因事象が生じうる時空領域を考えるのは面白いだろう．

3　非局所性・信号伝達可能性・因果

1 章でみたように，局所的な「隠れた変数」の存在を仮定すると，ベルタイプの不等式が導出される．その不等式を導出するのに用いる条件の一つ，「共通原因」を弱めても，2 章でみたように，やはり不等式が導出された．そして，不等式は破れることが実験的に検証されたというのが，多くの研究者に共通の見解である．すると，（これまで述べてきた意味で）「局所的な」理論は存在しないことになる．ここで注意すべきは，これまでの議論で局所的なのか否かを問われてきたのは，あくまで存在を仮定された隠れた変数やそれに類似のなにかを含む理論なのであり，決して量子力学そのものではないということだ．「量子力学は非局所的な理論である」といわれることがある．だが，存在を仮定された隠れた変数理論などの非局所性でなく，量子力学自体の非局所性がいかなるものなのかは定かでない．この点をできる限り明確にすることが，次の課題である．

3.1　量子力学的相関と信号伝達可能性

EPR 相関のような量子力学的相関は，原理的にはどんなに遠く離れた 2 粒子間においても生じうる．実際，量子力学は確率的予測を与えるが，その確率的予測には粒子間の距離についてのただし書きなどない．以下では，現代物理学によって少なくとも公式に認められた物理的的影響など存在しないとされる遠く離れた 2 領域上に，例えば，36 頁の図でいうと R_1 と R_2 に，量子力学的相関をもつ 2 粒子があるとしよう．この遠距離相関を用いてなんらかの信号を送ることは可能だろうか．本節では，この問いについて考える．

この問いについて考える前に，この問いの重要性について述べておこう．仮に量子力学における遠距離相関を用いて信号を送ることが可能であるとしよう．すると，隠れた変数理論や量子力学の様々な解釈とは独立に，量子力学という理論自体が非局所的性質をもつことが明らかとなる．しかも，その非局所性は次の意味で非常に「露骨な」ものとなる．信号を送れるということは，単になんらかの意味での非局所性が**存在する**だけでなく，その非局所性を信号の送り手が**利用できる**ことを意味する．再び 36 頁の図を用いて説明したい．量子力学的相関を用いて R_2 上の送り手から R_1 上の受け手へ信号を送れるとしよう．すると，R_2 上の送り手がその人の気分次第でいかなる信号を送るのかに応じて（あるいは信号を送るのか否かに応じて），R_1 上で異なることが生じうる．そのとき，哲学には事象間における因果関係の有無を判別する様々な方法があるが（章末のコメント参照），どの判別方法を採ろうとも，信号の送り手側のなんらかの事象と受け手側のなんらかの事

象との間に因果関係が存在しないと主張することは困難であろう．ただし，このこと自体が問題なのではない．本当に問題となるのは次の点である．そのような信号伝達が本当に可能であり，信号の送り手と受け手のなんらかの事象が原因-結果の関係にあるならば，その信号はいかなる仕方で近接的に伝播したのだろうか．それとも，近接的でない形で（例えば，いかなる媒質上も伝播することなく）信号は送られたのだろうか．もし前者ならば，光より速い物理的影響が存在することになる[*23]．すると，ある慣性系においては原因-結果という自然な順序で生じていた事象の系列が，別のある慣性系では逆の順序で（結果-原因の順序で）生じていたこととなる．このことは，いかなる場合も原因は結果に先立つ，というわれわれの因果についての常識と相容れない．（もちろん，その常識自体を疑うことは可能である．）一方，もし後者ならば，近接的でない原因-結果の系列が存在することを認めなければならない．いずれにせよ，われわれの物理的，哲学的常識を大きく改める必要性がでてきてしまう．

さて，量子力学の遠距離相関を用いた信号伝達は可能なのか，という問題に戻ろう．まず，信号を送るということを，信号の送り手と受け手，それぞれの立場からみていこう．信号を送るとき，送り手はまず信号を伝える媒体になんらかの操作を加える．例えば，電話という信号伝達媒体を用いてなんらかの信号を送るとき，電話番号を押すという「操作」を電話機に加える．いま考えたい状況では，信号伝達媒体は遠距離相関をもつ 2 粒子系である．そこで，送り手は一方の粒子に（これを粒子 2 としよう）「操作」を加えることによって，その粒子の状態を変えることになる．物理学的ないいかたをすれば，粒子 2 は第三の系と相互作用した結果，状態を変えるということだ．

信号の受け手は，粒子 1 の測定をするのだが，信号が送られたときとそうでないときとの違いに気づけなければならない．ここで，実際には信号が送られてきたが，うっかりしていて気づけなかった場合を考えているのではない．信号が送られてきたのか，そうでないのかを，受け手が判別できる客観的違いがなければならない，といっているのである．量子力学のような確率的理論において，一度や二度の測定結果によってはそういった「違い」に気づくことは無理である．あくまで粒子 1 の測定結果についての統計を変えることが必要である．

以上をふまえると，「量子力学の遠距離相関を使って，信号を送ることは可能だろうか？」という問題はより厳密には次のようになる．

問題　量子力学における遠距離相関をもつ一方の粒子（粒子 2）の状態を変えることに

[*23] ただし，仮に光より速い物理的対象や物理的過程が存在するにせよ，このことが相対性理論といかなる意味で緊張関係にあるのかは，議論の余地がある．

よって，もう一方の粒子（粒子 1）に関する統計的予測を変えることができるか？

結論を先にいうと，量子力学における相関を利用して，そのような形で統計的予測を変えることはできない．粒子 2 になんらかの物理的操作が加えられたとしよう．粒子 2 と第三の系が相互作用したということだ．その相互作用がいかなるものであれ，粒子 1 の任意の物理量について，相互作用があった場合の粒子 1 の統計的予測は，相互作用がなかった場合の粒子 1 の統計的予測と同じであることを証明できるのである．したがって，受け手が気づきうる客観的な「違い」は存在しない．以下でこのことを，再び，スピン物理量と「1 重項状態」を具体例にみていこう．

粒子 2 は第三の系と t_0 から t_1 まで（厳密には，t_0 から t_1 までの開区間）相互作用するとしよう．相互作用直前の時刻 t_0 における，第三の系の状態を $|\phi_0\rangle_3$ と表記する．すると，その時刻における，第三の系を含めた系全体の状態は,

$$
\begin{aligned}
|\Psi(t_0)\rangle \;=\; \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\, & |s_z=+\rangle_1 \otimes\, |s_z=-\rangle_2 \\
& - \frac{1}{\sqrt{2}}\, |s_z=-\rangle_1 \otimes\, |s_z=+\rangle_2 \Big) \otimes\, |\phi_0\rangle_3
\end{aligned}
$$

である．この時点では，まだ相互作用ははじまっていないので，2 粒子系の状態と第三の系の状態は分離させて考えることができる．そこで，t_0 において粒子 1 にたいしスピン Z 成分を測定すると，測定結果が $+\hbar/2$ ，$-\hbar/2$ となる確率はそれぞれ $1/2$ である．

では，相互作用後の状態はどのようになるだろうか．粒子 2 と第三の系のいかなる相互作用であれ，相互作用の間におけるそれら二つの系からなる結合系の状態の時間発展は，その結合系の状態空間上で（すなわち，それぞれの状態空間からなるテンソル積ヒルベルト空間上で）作用するユニタリ作用素 $U_{(t_0,t_1)}$ によって与えられる．そのとき，粒子 1 を含めた系全体の状態の時間発展は，$I \otimes U_{(t_0,t_1)}$ によって与えられる（ここで，I は粒子 1 の状態空間上の単位作用素）．相互作用直後の時刻 t_1 における系全体の状態は,

$$
\begin{aligned}
\big(I \otimes U_{(t_0,t_1)}\big)|\Psi(t_0)\rangle \;=\; & \frac{1}{\sqrt{2}}\, |s_z=+\rangle_1 \otimes U_{(t_0,t_1)}\, \big(|s_z=-\rangle_2 \otimes\, |\phi_0\rangle_3\big) \\
& - \frac{1}{\sqrt{2}}\, |s_z=-\rangle_1 \otimes U_{(t_0,t_1)}\, \big(|s_z=+\rangle_2 \,\otimes\, |\phi_0\rangle_3\big)
\end{aligned}
$$

である．すると，相互作用直後にスピン Z 成分を測定しても，測定結果が $+\hbar/2$ ，$-\hbar/2$ となる確率は，それぞれ $1/2$ となり，その確率に変化はないことがわかる．

いまのところの結論は，粒子 2 の状態をどのように変えようとも（粒子 2 と第三の系との間にいかなる相互作用があろうとも），粒子 1 のスピン Z 成分という特定のスピン成

分についてはその測定結果の確率に変化は生じないというものにすぎない．だが,「1 重項状態」は任意のスピン成分の固有状態を基底として表示し直してもその形式は変わらないのであった．したがって，任意のスピン成分についても，同様の結論が得られる．よって，粒子 2 の状態をどのように変えようとも，粒子 1 の任意のスピン成分の測定結果の確率に変化は生じない．

ただし，以上の議論は，2 粒子系の状態が「1 重項状態」であるときに限定された証明に過ぎない．より一般には次のことを証明できる．二つのヒルベルト空間 $\mathcal{H}_1$ と $\mathcal{H}_2$ からなるテンソル積ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ を考えよう．これは 2 粒子系の状態空間である．$\{\zeta_i\}_i$，$\{\eta_j\}_j$ は，それぞれ $\mathcal{H}_1$，$\mathcal{H}_2$ の完全正規直交系であるとする．そのとき，$\{\zeta_i \otimes \eta_j\}_{i,j}$ は $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ の完全正規直交系となる．そこで，テンソル積空間に属する任意の状態は,

$$\sum_{i,j} \alpha_{ij}\zeta_i \otimes \eta_j \qquad (\text{ただし} \sum_{i,j} |\alpha_{ij}|^2 = 1)$$

のように表示できる．「1 重項状態」を含む，どのように「エンタングル」したいかなる状態も，すべて上式のように表示されることに注意してほしい．

時刻 t_0 における 2 粒子系の状態が $\sum_{i,j} \alpha_{ij}\zeta_i \otimes \eta_j$ であるとする．粒子 2 と相互作用する第三の系の状態空間を $\mathcal{H}_3$ と表す．第三の系は時刻 t_0 に状態 ϕ_0 にあり，粒子 2 と第三の系は開区間 $(t_0,\, t_1)$ において相互作用し，その間の時間発展は $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$ 上のあるユニタリー作用素 $U_{(t_0,t_1)}$ によって与えられる．三つの系からなる結合系の状態は，t_0 において

$$\Psi(t_0) = \sum_{i,j} \alpha_{ij}\zeta_i \otimes \eta_j \otimes \phi_0$$

であり，t_1 において

$$\Psi(t_1) = \sum_{i,j} \alpha_{ij}\zeta_i \otimes U_{(t_0,t_1)}\big(\eta_j \otimes \phi_0\big)$$

である．

さて，ここで，いま考えている具体例をしばらく離れて，次の数学的事実に注目してほしい．一般に，結合系 $\mathrm{I}+\mathrm{II}$ のある状態ベクトル $\Phi \in \mathcal{H}_{\mathrm{I}} \otimes \mathcal{H}_{\mathrm{II}}$ が与えられたとき，その状態が，$\mathcal{H}_{\mathrm{I}}$ 上のそれぞれの自己共役作用素に与えるのと同じ確率を与える系 I の状態ベクトル $\phi \in \mathcal{H}_{\mathrm{I}}$ が存在するとは限らない．すなわち，系 $\mathrm{I}+\mathrm{II}$ のある状態ベクトル Φ が与えられたとき，系 I のある状態ベクトル ϕ が存在し，$\mathcal{H}_{\mathrm{I}}$ 上の任意の自己共役作用素 X について，等式

$$(\Phi, X \otimes I\Phi)_{\mathrm{I+II}} = (\phi,\, X\phi)_{\mathrm{I}}$$

を満たす，ということが成立しないことがある（ここで，左辺は $\mathcal{H}_{\mathrm{I}} \otimes \mathcal{H}_{\mathrm{II}}$ 上の内積を，右辺は $\mathcal{H}_{\mathrm{I}}$ 上の内積を表す）．例えば，「1 重項状態」には，そのような要件を満たす，片方の粒子の状態ベクトルは存在しない．しかし，そのようなときでも密度作用素ならば与えることができる．実際，任意の状態ベクトル $\Phi \in \mathcal{H}_{\mathrm{I}} \otimes \mathcal{H}_{\mathrm{II}}$ には，すべての $\mathcal{H}_{\mathrm{I}}$ 上の自己共役作用素 X について，等式

$$(\Phi, X \otimes I\Phi)_{\mathrm{I+II}} = Tr(WX)_{\mathrm{I}}$$

が成立する系 I の密度作用素 W が存在し，そのうえそのような密度作用素は一意である（ここで，左辺は $\mathcal{H}_{\mathrm{I}} \otimes \mathcal{H}_{\mathrm{II}}$ 上での内積を，右辺は $\mathcal{H}_{\mathrm{I}}$ 上のトレースを表す）．この一意存在する密度作用素 W を実際に算出するには次のようにすればよい．まず，系 $\mathrm{I} + \mathrm{II}$ の状態ベクトル Φ を密度作用素表示 D_{Φ}（これは，$\{\Phi\}$ が張る 1 次元部分空間の上への 1 次元射影）し，系 II のヒルベルト空間の完全正規直交系 $\{\psi_i\}_i$ を利用して D_{Φ} の部分トレースをとればよい．すなわち，

$$W = \sum_i (\psi_i, D_{\Phi}\psi_i)$$

ということである．

話をもとにもどそう．いま説明した数学的事実を用いると，まず $\Psi(t_0)$ について，粒子 1 の密度作用素 $W(t_0)$ が一意存在し，$\mathcal{H}_1$ 上の任意の自己共役作用素 X について，等式

$$(\Psi(t_0), (X \otimes I \otimes I)\Psi(t_0)) = Tr(W(t_0)X)$$

を満たす．次に，$\Psi(t_1)$ についても，同様に，粒子 1 の密度作用素 $W(t_1)$ が一意存在し，$\mathcal{H}_1$ 上の任意の自己共役作用素 X について，等式

$$(\Psi(t_1), (X \otimes I \otimes I)\Psi(t_1)) = Tr(W(t_1)X)$$

を満たす．ここで，実際に $W(t_0)$ と $W(t_1)$ を算出するには，$\Psi(t_0)$ と $\Psi(t_1)$，それぞれの部分トレースを腕力にまかせて計算すればよい．すると，$W(t_0) = W(t_1)$ が得られる．

以上の議論より，2 粒子系の任意の状態について，粒子 2 の状態をどのように変えようとも，粒子 1 の任意のスピン成分の測定結果の確率に変化は生じない．量子力学における遠距離相関を用いて信号を伝達することは不可能なのである．

3.2　量子力学的相関と因果

前節でみたように，量子力学的相関を用いて信号を送ることはできない．したがって，量子力学自体が非常に「露骨な」形で非局所的性質をもつ，という結論は避けられた．そ

こでこのことをもって，量子力学的相関をもつ二つの事象間に因果関係はないという自然で望ましい結論が得られると考えるかもしれない．だが，信号伝達が不可能であることから，因果関係がないということがただちに帰結するわけではない．前節では，量子力学における遠距離相関をもつ一方の粒子（粒子 2）の状態を変えることによって，もう一方の粒子（粒子 1）に関する統計的予測を変えることができるか，という問題について考えた．そこで考察されたのは，信号の受け手が**認識できる**客観的な違いが存在するかという問いであった．だが，因果関係の有無は，それを**認識できる**かというレベルで論じられるよりも，まずは自然の側にそのような関係が**存在する**のかというレベルで論じられるべきことである．認識可能な違いが存在しないということと，因果関係がないということとの間には少々距離がある．もちろん，「認識可能な違いがないときに因果関係の有無を論じる意味はない」と考え，「信号伝達が可能であるか否かを因果関係の有無の基準として採用せよ」と主張することはできる．だが，それとは異なる，因果関係の有無を判別するいくつかの基準が存在する．信号伝達可能性を因果関係の有無の基準として考えるのは，それとは異なる別の基準について考えてからでも遅くないであろう．以下で，著者にとって最も自然と思われる判別基準を定式化し，その基準について議論する[*24]．また，これから述べる定式化は，量子力学に少々違和感をもつ人たちがなんとなく感じていることの厳密な定式化になっていると思う．仮に因果の有無の判別基準として間違っていたとしても，その定式化自体には意味があるだろう．

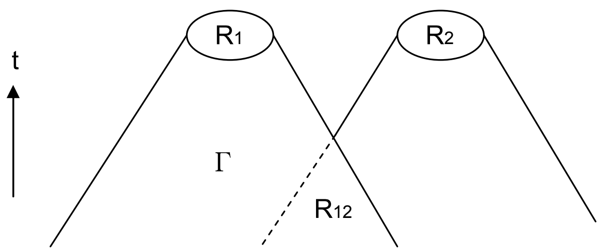

図 6

これから問題にするのは，上の図 6 にあるように，空間的に分離している二つの時空領域（R_1 と R_2）で生じる事象間に因果関係が存在するのか否かである．いかなる物理的影響も光速を超える速さでは伝わらないと考えると，R_1 の過去光円錐内で生じた出来事だ

[*24] 以下の議論はベルの論文 [7] に考え方の枠組みにおいて強い影響を受けている．

けが R_1 で生じる事象に因果的影響をおよぼすと考えるのが自然である．R_1 で生じる出来事の原因はすべて，R_1 の過去光円錐のなかにあるということである．このことを「R_1 で生じる事象について，因果的に閉じている」と呼ぼう．ただし，単に「原因は過去光円錐内にある」といっても議論は進まない．因果的に閉じているのか否かを判別する条件が必要である．そこで以下の議論に必要とされる限りで，「因果的に閉じているための必要条件」，すなわち因果的に閉じているならば満たさねばならない条件を定式化しよう．

以下では，R_1 の過去光円錐内において生じたすべての出来事を Γ と略記する．R_1 の過去光円錐内において生じたすべての出来事の連言，すなわちそれらの出来事を「かつ (and)」で結んだもののことである．例えば，R_1 において「マッチが点火する」という事象が生じたならば，通常の理解では，Γ には，「マッチを擦る」や「マッチのそばに酸素が存在する」ことなど，原因とされるすべてのことが（もちろんそれ以外のことも）含まれるだろう．また，以下で任意の事象 E について，E が生じなかったという「事象」を $E^{\perp}$ と表記する．

R_1 **が因果的に閉じているための必要条件**　次の二つの条件を満たす，R_1 における事象 E_1 と R_2 における事象 E_2 は存在しない．

条件 1　$P(\Gamma \ \& \ E_2) \neq 0$，かつ $P(\Gamma \ \& \ E_2^{\perp}) \neq 0$ である．

条件 2　$P(E_1|\Gamma \ \& \ E_2) \neq P(E_1|\Gamma \ \& \ E_2^{\perp})$ である．

それぞれの条件を設定する動機は次の通りである．条件 1 は条件 2 を有意味とするための「ただし書き」のようなものである．これにより条件 2 の条件付確率は有意味となる．いうまでもなく，重要なのは条件 2 である．確率論で成立する等式

$$P(E_1|\Gamma) = P(E_1|\Gamma \ \& \ E_2)P(E_2|\Gamma) + P(E_1|\Gamma \ \& \ E_2^{\perp})P(E_2^{\perp}|\Gamma)$$

から容易にわかるように，この条件は

条件 $2'$　$P(E_1|\Gamma \ \& \ E_2) \neq P(E_1|\Gamma)$

と等価である．そこで，条件 2 を満たす事象 E_1 と E_2 が存在するならば，その事象は条件 $2'$ も満たすこととなる．条件 2 を設定する動機は，もし R_2 におけるある事象 E_2 を条件付確率の条件 Γ に付け加えることで R_1 における事象 E_1 の確率が変化するならば，Γ は E_1 の原因としては不十分である，というものである．もちろん，確率の値が変化するといっても，その値が大きくなる場合と小さくなる場合がある．大きくなるならば，E_2 は E_1 の原因の有力な一候補であろう．一方，小さくなるならば，E_2 でなくむしろ $E_2^{\perp}$ が E_1 の原因の有力な一候補であると考えられる．

この基準を用いて量子力学自体がもつ非局所性についての概念的分析を進めていくわけだが，その前にこの基準を用いた別の分析を一つみておこう．その分析は，量子力学そのものではなく，存在可能な隠れた変数理論についてのものであるが，その分析をみることによって上述の基準が因果関係の有無を判別するうえで自然なものであることが理解できると思う．

事例分析 1：非局所的な隠れた変数　これまでと同じように「1 重項状態」にある 2 粒子を準備し，粒子 1 にたいしては R_1 上で，粒子 2 にたいしては R_2 上で，スピン測定が行われるとする．R_1 の過去光円錐と R_2 の過去光円錐との共通部分上で，すなわち 52 頁の図でいうと R_{12} 上で値が指定される隠れた変数 λ によって，それぞれの粒子にたいする測定結果が一意に定まるような局所的な隠れた変数理論は存在しない．一方，局所性を満たさない隠れた変数理論なら存在しうる．例えば R_{12} 上で値が指定される変数 λ の値と R_2 におけるスピン測定装置の設定（どのスピン成分を測定するか）とによって R_1 における測定結果が一意に決まるような，非局所的な隠れた変数理論は存在する[*25]．このようなタイプの隠れた変数理論において上述の二つの条件を満たす E_1 と E_2 が存在する．このことを以下でみていく．

具体的に E_1，Γ，E_2 をそれぞれ次のような事象とすれば上述の二つの条件を満たす．順にみていこう．

E_1 **について**:　R_1，R_2 上の測定装置がスピン Z 成分を測定する設定になっていることを，それぞれ Z_1，Z_2 と表記し，それらの測定結果を $+_1$，$-_1$，$+_2$，$-_2$ と表す．粒子 1 にたいするスピン Z 成分の測定結果，すなわち $+_1$（あるいは $-_1$）を E_1 として考えよう．

Γ **について**:　すでに述べたように Γ は R_1 の過去光円錐内において生じたすべての出来事であった．いま考えている状況は，変数 λ の値は過去光円錐の共通部分 R_{12} において指定されるというものだったので，変数 λ の値がしかじかであることは Γ に含まれる．また，Γ には，粒子源において 2 粒子が「1 重項状態」に準備されたことも含まれる．2 粒子系を「一重項状態」に準備する一連の手続きを「事象」と考えればよい．ほかにも，Γ には，粒子 1 が測定装置に障害なく到達することに関わるあらゆる出来事も含まれる．さらに粒子 1 の測定装置の設定がスピン Z 成分を測定するようになっていること（すなわち Z_1）も，Γ に含まれているとする．

[*25] そのような非局所的な隠れた変数理論の具体例はボームの理論である．

E_2 **について**: 「粒子 2 にたいするスピン測定装置の設定が Z 成分を測定するようになっていること」，すなわち Z_2 を E_2 としてとる．

最後に，R_2 における粒子 2 の測定装置の設定は，粒子対が粒子源を離れる段階では決まっていないことを仮定する．粒子 2 にたいしどのスピン成分を測定するかは粒子 2 が粒子源を離れた後でも（粒子 2 が R_{12} の外にあるときでも）変更可能なので，このように仮定することに問題はない．

以上で述べたように E_1 と E_2 をとると上述の二つの条件は満たされる．まず，条件 1 について考えよう．繰り返しになるが，粒子 2 にたいしどのスピン成分を測定するかは，粒子 2 が R_{12} を離れた後でも変更可能である．したがって R_{12} 上でなにごとが生じるかだけでは，さらには R_1 の過去光円錐においてなにごとが生じるかを特定するだけでは，粒子 2 にたいしどのスピン成分を測定するのかは決まらない．それゆえ $P(\Gamma\ \&\ E_2) \neq 0$，かつ $P(\Gamma\ \&\ E_2^{\perp}) \neq 0$ であり，条件 1 を満たす．

次に，条件 2（条件 2′）について考えよう．考察している非局所的隠れた変数理論では，R_{12} で指定される変数 λ の値と R_2 におけるスピン測定装置の設定（どのスピン成分を測定するか）とによって，R_1 におけるスピン測定の結果が決まった．したがって，確率 $P(+_1|\Gamma\ \&\ Z_2)$ は 1 である．一方，$P(+_1|\Gamma)$ の値は 1 ではない（より正確には，つねに 1 とは限らない）．もし後者の確率もつねに 1 であるならば，R_1 におけるスピン測定の結果が R_2 におけるスピン測定装置の設定には依存しないことになるが，いま考えている非局所的隠れた変数理論はそのようなものではなかった（そのような隠れた変数理論は存在しないというのが 1.2 節の結論であったことを思い出そう）．したがって，上述のように E_1 と E_2 をとるとそれらは条件 2 を満たすのである．

よって上述の判別基準にしたがうとここで議論した非局所的隠れた変数理論は因果的に閉じておらず，過去光円錐のなかにすべての原因を含まない事象が存在することとなる．もちろん，この結論が得られたこと自体は驚くべきことではない．ある粒子にたいする測定結果が，当の粒子と相互作用しない遠く離れた測定装置の設定に依存するような理論が「因果的に閉じている」とは考えられない．むしろここで大事なのは，そのような自然な結論を上述の判別基準がもたらしたということである．この意味で，その判別基準は健全なのである．

次に，「R_1 が因果的に閉じているための必要条件」を量子力学そのものに適用する．結論を先にいうと，この判別基準にしたがうと量子力学は「因果的に閉じていない」ということになる．再び，「1 重項状態」にある 2 粒子系を具体例に考えよう．

事例分析 2：量子力学　状況設定および表記法については事例分析 1 と同様であるとする．ただし，今回は量子力学自体が分析の対象なので隠れた変数は存在しない．具体的に E_1，Γ，E_2 をそれぞれ次のような事象とすれば上述の二つの条件を満たす．

E_1 **について**:　事例分析 1 と同じように，粒子 1 にたいするスピン Z 成分の測定結果，すなわち $+_1$（あるいは $-_1$）を E_1 として考える．

Γ **について**:　Γ には，粒子源において 2 粒子が「1 重項状態」に準備されたことや，粒子 1 が測定装置に障害なく到達することに関わるあらゆる出来事が含まれる．また，事例分析 1 と同じように，粒子 1 の測定装置の設定がスピン Z 成分を測定するようになっていること（すなわち Z_1）も，Γ に含まれているとする．

E_2 **について**:　事例分析 1 と異なり，事象 E_2 として，「スピン Z 成分を測定する設定になっていて，粒子 2 の測定装置が測定結果 $-_2$ を表示する」，すなわち $Z_2\ \&\ -_2$ をとる．

このとき，事象 E_1 と E_2 は上述の 2 条件を満たす．条件 1 については事例分析 1 と同じである．粒子 2 にたいしどのスピン成分を測定するかは粒子 2 が R_{12} を離れた後でも変更可能なので，$P(\Gamma\ \&\ E_2) \neq 0$，かつ $P(\Gamma\ \&\ E_2^{\perp}) \neq 0$ である．

次に，条件 2 についてみていこう．$P(+_1|\Gamma)$ の値は 1/2 である．これは，「1 重項状態」に準備した 2 粒子系の一方にたいするスピン測定について，量子力学自体が与える予測から帰結することである．一方，$P(+_1|\Gamma\ \&\ Z_2\ \&\ -_2)$ の値は 1 である．これも「1 重項状態」にある 2 粒子系にたいし同じスピン成分を測定すると正負が反対の測定結果が得られるという，量子力学自体による予測から帰結することである．したがって，二つの確率の値は異なるので条件 2 も満たされる．

以上より，「R_1 が因果的に閉じているための必要条件」は破られる．この分析で用いた判別基準は極めて自然なものである．だがその基準によると，空間的に分離している二つの時空領域上で生じる事象間に因果関係が存在するということが帰結する．

以上の分析にたいし，様々な対応をとることが可能である．ここでは，主要と思われる対応を挙げ，それらにコメントを付ける．

- そもそも因果というのは決定論的世界においてのみ通用する概念であり，量子力学が述べるような確率的世界においては無意味な概念である．

  コメント：科学とはなにかという問いにたいする答えとして，諸現象の原因を究明する営為である，と考える人は多い．因果関係の解明こそ，科学の本質であるとい

う科学観である．この科学観を受け入れ，そのうえ，因果概念は確率的世界では無意味であると考える場合，量子力学を額面どおりに受け入れることはできない．なぜなら量子力学は確率的な理論であり，そのうえ，量子力学的現象の背後になんらかの決定論的なメカニズムが存在するとは考えられていないからである．したがって，科学とは因果関係を解明するものであり，そのうえ，確率的世界に因果はないと考えるならば，量子力学を不完全な理論であると考えざるをえない．だが，そのように考えるときの困難（ベルの不等式が破れるなど）はすでにみた通りである．

- 仮に空間的に分離した時空領域上で生じる事象間に原因-結果の関係があったとしても，その関係を利用して信号を送るといったことはできない．それゆえ相対性理論と緊張関係が生じることはなく，いかなる困難も生じない．

  コメント：確かに物理学内部での困難や矛盾は生じないかもしれない．一方で，もしそのような原因-結果の関係を認めるならば，物理学を含むわれわれの世界像は大きく変革を被ることとなる．われわれは原因-結果の関係にある事象は「近接的」に生じるということを当然のように受け入れているが，その常識を捨て去るべきなのだろうか．また，ある慣性系においては原因-結果という自然な順序で生じていた事象の系列が，別のある慣性系では逆の順序で（結果-原因の順序で）生じていたことがありうることになるが，このことは，いかなる場合も原因は結果に先立つというわれわれの因果についての常識と相容れない．

- 空間的に分離した時空領域上で生じる二つの事象間に因果関係があるのか否かを判別する異なる基準を用いる．

  コメント 1: そのような基準の候補の一つは「反事実的条件文」という形式の文を用いる考え方である．その考え方によると，「（実際に生じた事実と異なり）もし A が生じなかったとしたら，B は生じなかったであろう」が正しいとき，A は B の原因であると考える．例えば，「もしマッチを擦らなかったら，マッチは点火しなかったであろう」が正しいならば，マッチを擦ったことがマッチの点火の原因（少なくとも原因の一つ）である．だが，このようにして因果関係のある，なしを判別しても，ただちにうまくいくわけではない．A と B という二つの事象間に完全相関があるとしよう．すなわち，$P(B|A)=1$，かつ $P(B^{\perp}|A^{\perp})=1$ ということである．もちろん，相関があるからといって，それらの間に原因-結果の関係が成立しているとは限らない．だが，反事実的条件法のみを用いて，A と B の間に完全相関があることとそれらの間に原因-結果の関係があることを区別するのは困難であろう．実際，モードリン [33] のように，反事実的条件法の判別法にしたがうと，「1 重項状態」にある粒子対にたいする同一スピン成分の測定結果間には超光速の因果

関係が存在することになる，と考える論者もいる．

コメント 2: 因果関係の有無を判別する基準のもう一つの候補は，前節で触れたものである．そこで述べたように，量子力学における相関を利用して信号を送ることはできなかった．そこで，信号を送れるか否かということを因果関係の有無の判別基準として採用すれば，空間的に離れた領域間の因果関係を否定する，自然で望ましい結論が得られるのではないか．このような考え方についてコメントしたい．まず，「ある事象の系列が存在しそれを利用して信号を送れるならば，その事象の系列は因果的系列である」と考えることに問題はないであろう．だが，その逆，すなわち

命題∗　ある事象間に因果関係が存在するならば，それを利用して信号を送ることができる

は正しいだろうか．「空間的に分離した時空領域上で生じる二つの事象間に因果関係は存在しない」と結論するには，命題∗が正しい必要がある．なぜなら，その命題が正しいとき，その対偶と前節でみた信号を送れないという事実から，因果関係は存在しないという帰結が得られるからである．それにしても，なぜ信号を送るのに利用できない因果関係が存在してはいけないのだろうか．現時点でもっとも魅力的な考え方であるが，この考え方を採用するならばこの問いに答えなければならない．

本章では，「因果的に閉じているための必要条件」を定式化した．この条件自体は多くの人が因果に関してもつ直観を表現した自然な条件であると思う．しかし，量子力学はその条件を満たさない．そこで，我々は，因果性概念そのものの再検討を迫られることになる．最も有力なのは，信号伝達が可能なのか否かを因果性の判定の基準として用いることであるが，コメントしたように，その提案になんの課題もないわけではない．

第 II 部

コッヘン＝シュペッカーの NO-GO 定理と非局所性

4　コッヘン＝シュペッカーの NO-GO 定理と測定文脈依存性

量子力学の標準的な理解に反し，ある人がすべての物理量はシャープである決まった値をもつと信じているとしよう．ただしその人は，量子力学が与える統計的予測自体は正しいとも信じているとする．要するに，量子力学は不完全だが，その統計的予測そのものは正しいと考えているわけだ．このような考えを机上の空論としないには，次の二つのことが可能でなければならない．

(a) 個々の系について，すべての物理量に同時にシャープな確定した値（今後，確定値と呼ぶ）を付与できる．

(b) そのように個々の系に付与された値が，集団としては量子力学の統計的予測を再現する．

ベルは，局所性条件，(a)，(b) の三つが両立しないことを示した．すると，局所性条件と量子力学の統計的予測の正しさを受け入れる場合，(a) が否定される．ベルの NO-GO 定理において (a) はこのようにして間接的に否定される．

一方，これからみていく議論では，(a) 自体の正否が直接的に論じられる．コッヘンとシュペッカーは，すべての物理量に確定値の付与を試みる場合，それらの値はある要請（あとでこの要請は $FUNC$ と呼ばれる）を満たすべきだと考えた．そのうえで，彼らは，その要請を満たすようにはすべての物理量に同時に確定値を付与**できない**ことを示した [31]．「できない」ことを示した定理なので，その結果はコッヘン＝シュペッカーの NO-GO 定理[*26]と呼ばれる．

*26 細かいことをいうと，これから紹介する議論は NO-GO 定理でなく NO-GO 論証と呼ばれるべきものである．コッヘンとシュペッカーはある数学的結果に解釈を与え「すべての物理量に値を付与できない」と結論付けたのである．実際，あとでみるように，解釈を変えることで彼らの NO-GO 論証自体は回避されうる．

4.1　スピン角運動量〜スピン 1 の場合

ベルの議論ではスピン 1/2 の粒子を具体例に用いた．その場合，任意のスピン成分の測定値は $+\hbar/2$ か $-\hbar/2$ の二つのどちらかであり，各スピン成分は 2 次元ヒルベルト空間上の自己共役作用素によって，スピン状態はその空間に属するノルム 1 のベクトルによって表された．一方，これから紹介する議論では，スピン 1/2 でなく，スピン 1 の粒子を具体例に用いる．スピン 1 の粒子の場合，各スピン成分の測定値は $+\hbar$ か 0 か $-\hbar$ の三つのどれかであり，各スピン成分は 3 次元ヒルベルト空間上の自己共役作用素によって，スピン状態はその空間に属するノルム 1 のベクトルによって表される．スピン 1 の場合のスピン物理量と状態について，これからの議論で必要とする事項を確認しておこう．

物理空間（3 次元実-空間）において直交系 (x, y, z) をとり，その直交系での各スピン成分を j_x，j_y，j_z と表記する．すでに述べたように，それらはそれぞれ 3 次元ヒルベルト空間上で作用する自己共役作用素によって表され，その固有値は $+\hbar$，0，$-\hbar$ である．以下では表記を簡略化したいので $\hbar = 1$ とする自然単位系を用いる．そのとき，固有値は -1, 0, $+1$ となる．j_z の固有状態からなる正規直交基底 $\{|j_z = -1\rangle,\quad |j_z = 0\rangle,\quad |j_z = +1\rangle\}$ を用いて，j_x，j_y，j_z のそれぞれを行列表示すると次のようになる．

$$j_x \to \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad j_y \to \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad j_z \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

j_x，j_y，j_z は相互に非可換であるが，それらの 2 乗作用素 $(j_x)^2$，$(j_y)^2$，$(j_z)^2$ は相互に可換となる．このことは実際に計算してもわかるが，次のように示したほうが多くの情報を得ることができる．二つの自己共役作用素が可換であることと，それらを行列表示すると同時に対角行列となる正規直交基底が存在することとは同値である．そこで，それらの作用素が可換であることを示すには，それらを同時対角化する正規直交基底が存在することを示せばよい．まず，それぞれのスピン成分の固有値が 0 である固有状態 $|j_x = 0\rangle$, $|j_y = 0\rangle$，$|j_z = 0\rangle$ を，正規直交基底 $\{|j_z = -1\rangle,\ |j_z = 0\rangle,\ |j_z = +1\rangle\}$ を用いて数ベクトル表示すると次のようになる．

$$|j_x = 0\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad |j_y = 0\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |j_z = 0\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

すると，$|j_x = 0\rangle$，$|j_y = 0\rangle$，$|j_z = 0\rangle$ の相互の内積が 0 となり，それらが直交しているこ

とがわかる．そこで，それらを基底にとり直して $(j_x)^2$，$(j_y)^2$，$(j_z)^2$ を行列表示すると

$$(j_x)^2 \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (j_y)^2 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (j_z)^2 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となり，同時に対角化される．このように，j_x，j_y，j_z は相互に非可換なのだが，$(j_x)^2$，$(j_y)^2$，$(j_z)^2$ は相互に可換となる．このようなことが可能となるのは，各スピン成分は縮退した固有値のない極大自己共役作用素だが，それらを 2 乗した自己共役作用素は縮退した固有値 1 をもつことによる．

続けて，次節以降の議論で重要な役割を果たす極大自己共役作用素

$$K_{[x,y,z]} \equiv (j_x)^2 - (j_y)^2$$

を導入しよう．この作用素は 3 次元実空間における相互に直交する三つの方向 (x, y, z) ごとに定義される．定義式には j_z は現れないが，x 方向と y 方向を指定すると z 方向は一意に定まる．正規直交基底 $\{|j_x = 0\rangle, |j_y = 0\rangle, |j_z = 0\rangle\}$ を用いて $K_{[x,y,z]}$ を行列表示すると，

$$K_{[x,y,z]} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

のように，対角成分に異なる実数が並ぶ対角行列となる．このことから，$K_{[x,y,z]}$ は極大自己共役作用素であり，そのうえ，正規直交基底をなす三つの状態は $K_{[x,y,z]}$ の固有状態となること，すなわち

$$K_{[x,y,z]}|j_x = 0\rangle = (-1)|j_x = 0\rangle, \quad K_{[x,y,z]}|j_y = 0\rangle = (+1)|j_y = 0\rangle,$$
$$K_{[x,y,z]}|j_z = 0\rangle = (0)|j_z = 0\rangle$$

となることがわかる．

スピン成分を表す自己共役作用素，その 2 乗作用素，そして $K_{[x,y,z]}$ はどのような関係にあるのだろうか．z 成分を具体例に，j_z，$(j_z)^2$，$K_{[x,y,z]}$ の関係をみていこう．まず，j_z と $K_{[x,y,z]}$ は非可換な極大自己共役作用素である．ただし，j_z を対角化する正規直交基底 $\{|j_z = -1\rangle,\ |j_z = 0\rangle,\ |j_z = +1\rangle\}$ と，$K_{[x,y,z]}$ を対角化する正規直交基底 $\{|j_x = 0\rangle,\ |j_y = 0\rangle,\ |j_z = 0\rangle\}$ には，ともに $|j_z = 0\rangle$ が含まれる．それら二つの作用素は固有状態として $|j_z = 0\rangle$ を共有するのである．下の図 7 はこの直観的理解を助けるだろう．$(j_z)^2$ の固有値は 0 と 1 であるが，固有値 1 は縮退していたのだった．固有値 1 の固有空間は $|j_z = 0\rangle$（これは $|(j_z)^2 = 0\rangle$ でもある）と直交するすべてのベクトルから

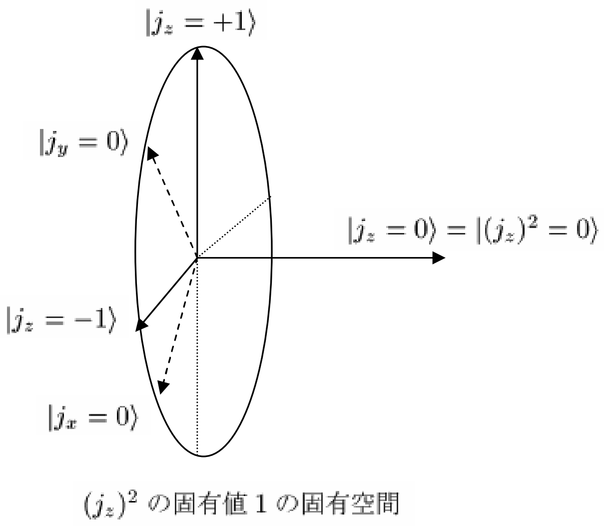

図 7

なる 2 次元部分空間である．したがって，その 2 次元部分空間に属する任意のベクトルは $(j_z)^2$ の固有ベクトルなのであり，$(j_z)^2$ は上で述べた二つの正規直交基底どちらで行列表示しても対角化される．

最後に，スピン 1 の 2 粒子系における「1 重項状態」についてみておこう．スピン 1/2 の場合，1 重項状態は任意のスピン成分について全スピン（2 粒子のスピンの値の和）が 0 の状態の「重ね合わせ」であった．同様にスピン 1 の場合にも，次の状態を 1 重項状態という．

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(|j_z=+1\rangle_1 \otimes |j_z=-1\rangle_2 + |j_z=-1\rangle_1 \otimes |j_z=+1\rangle_2 - |j_z=0\rangle_1 \otimes |j_z=0\rangle_2 \Big) \quad (19)$$

この状態においても，スピン 1/2 の 1 重項状態と同じように，3 次元物理空間における直交系をどのようにとって $|\Psi\rangle$ を書き直そうとも，式の形は変わらない．さらに次のことも重要である．$|\Psi\rangle$ を $K_{[x,y,z]}$ の固有状態を用いて表すと，

$$|\Psi\rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}}\Big(|j_x=0\rangle_1 \otimes |j_x=0\rangle_2 + |j_y=0\rangle_1 \otimes |j_y=0\rangle_2 - |j_z=0\rangle_1 \otimes |j_z=0\rangle_2 \Big) \quad (20)$$

となる．実際に計算してみるとわかることだが，この式の形も，3 次元物理空間における直交系をどのようにとっても変わらない．

4.2　コッヘンとシュペッカーによる議論の概要

コッヘンとシュペッカーが示そうとしたことは，「系の物理量すべてに同時に確定した値を付与できない」ということであった．ただし，「確定した値」でなにを意味するのかはただちに明らかではない．はじめにまず，この意味を明確にしておこう．少なくとも 2 通りの解釈が可能である．

見解 I：所有値　測定される，されないとは無関係に，系はすべての物理量について確定した値をもっている．その値は系が所有する値であり，所有値とでもいうべきものである．ひとたびある物理量が測定されると，測定相互作用がはじまる直前の時刻における所有値が装置に忠実にディスプレイされる．

見解 II：あらかじめ決まっている測定値　測定されていないときに系が所有値をもつのかどうかはわからないが，測定されたときにいかなる値が装置にディスプレイされるのかは測定以前に確定している．「確定した値」とは，このようなあらかじめ決まっている測定値のことである．要するに，測定されてないときに系は確定した値をもつのか，否かについては不問とし，なんらかのメカニズムによってすべての物理量の測定結果（測定値）が決定されていると考える．

これから，「すべての物理量に確定した値を付与する」というとき，その値を所有値として考えるのか，それともあらかじめ決まっている測定値として考えるのか，という 2 通りの解釈が可能であることに留意してほしい．

次に 4.2 節まで仮定されるあることに注意を促したい．量子力学において，「すべての物理量はヒルベルト空間上の自己共役作用素によって表される」は疑う余地なく正しい．ではこの逆，すなわち「ヒルベルト空間上の任意の自己共役作用素はなんらかの物理量（観測可能量）を表す」は正しいであろうか．その答えは自明でない．例えばそれぞれ位置と運動量を表す自己共役作用素 Q と P からなる PQP は自己共役作用素であるが，それはどのようにして実際に測定できるのだろうか．本論文ではこういった難問は直接扱わない．とりあえず，4.2 節までは任意の自己共役作用素がなんらかの物理量を表すと仮定し，議論をすすめる．そして 4.3 節で，この仮定についてコメントしたい．

では，いよいよコッヘンとシュペッカーの議論をみていこう．物理量（自己共役作用素）A に付与される「確定した値」を $[A]$ と表記する．もし $[A]$ が満たすべきいかなる要請もないならば，すべての物理量にたいする付値は可能である．単に値を適当に付与すればよい．だが，経験との一致さえ要請されないそのような付値が存在しても，無意味であ

る．まず，付値は次の規則を満たすべきであろう．

スペクトル規則　物理量（自己共役作用素）A に付与される値 $[A]$ は，A のスペクトル（本章での議論のように有限次元ヒルベルト空間に限定する場合，スペクトルは固有値すべてからなる集合と同一である）[*27]に属する値である．

量子力学では，物理量の測定値は（理想的には）その物理量を表す自己共役作用素のスペクトルに属する値であると考える．そしてこのことは，少なくともいまのところ，経験と照らし合わせて問題があるとは考えられていない．よって，「確定した値」についてのどちらの見解をとるにしても，この規則を要請するのは自然である．

次に，各物理量への付値に課されるもう一つの規則をみておこう．その規則は $FUNC$ と呼ばれ，コッヘンとシュペッカーの論証において決定的に重要な役割を果たす．$FUNC$ を理解するには，自己共役作用素のスペクトル分解とそれを用いて定義される自己共役作用素の関数について知っておく必要がある．N 次元ヒルベルト空間上の任意の自己共役作用素 A は，その固有値 a_i と，各固有値 a_i の固有空間の上への射影作用素 $P^A_{a_i}$ を用いて

$$A = \sum_{i=1}^{M} a_i P^A_{a_i}$$

のように，和の形に一意に分解される．（ここで M は A の異なる固有値の個数である．もし A が極大自己共役作用素ならば，すなわち縮退した固有値がないならば，M はヒルベルト空間の次元 N と等しい．一方，A が縮退した固有値をもつならば，M は N より小さい自然数である．）この分解をスペクトル分解という．A のスペクトル分解と，A の各固有値に実数を対応付ける（A のスペクトルから実数への）関数 f とを用いて，自己共役作用素 A の関数 $f(A)$ は

$$f(A) \equiv \sum_{i=1}^{M} f(a_i) P^A_{a_i}$$

のように定義される．ただちに明らかなように，自己共役作用素 B が A の関数であるとき，すなわち $B = f(A)$ であるとき，A と B は可換となる．

具体例を挙げよう．4.1 節で導入した作用素 j_z，$K_{[x,y,z]}$ と $(j_z)^2$ 思い出そう．$(j_z)^2$ は，j_z と $K_{[x,y,z]}$ それぞれの関数である．まず，j_z のスペクトル分解は

$$j_z = (-1)P^{j_z}_{-1} + (0)P^{j_z}_{0} + (+1)P^{j_z}_{+1}$$

[*27] 本章では，ヒルベルト空間の次元が有限の場合のみを考える．次元が無限である場合，例えば位置や運動量を表す自己共役作用素のように，固有値が存在しない自己共役作用素が存在する．そこでもし次元が無限の場合も考慮するならば，固有値すべてからなる集合とスペクトルは同一概念ではない．

となる．j_z のスペクトル $\{-1, 0, +1\}$ から実数への関数 f を用いて j_z の関数 $f(j_z)$ は

$$f(j_z) \equiv f(-1)P^z_{-1} + f(0)P^z_0 + f(+1)P^z_{+1}$$

と定義される．例えば，関数 f が具体的に $f(-1) \equiv +1,\ f(0) \equiv 0,\ f(+1) \equiv +1$（要するに，インプットの 2 乗をアウトプットする関数）であるとき，$f(j_z) = (j_z)^2$ となる．同様に，$(j_z)^2$ は $K_{[x,y,z]}$ の関数でもある．

さて，準備ができたので $FUNC$ を紹介しよう．

FUNC　二つの物理量（自己共役作用素）A と B について，B が A の関数であるならば，すなわち $B = f(A)$ であるならば，それらに付与される値の間にも $[B] = f([A])$ という同様の関数的関係が成立する．

$FUNC$ を課す動機をみる前に，まず次のことを注意しておきたい．$FUNC$ はスペクトル規則によって有意味となる．仮に $[A]$ がスペクトル規則を満たさず，その値が A のスペクトルに属する値でないならば，そのような値は f の定義域に属さないので自己共役作用素の関数の定義を適用できない．そのとき，$FUNC$ は意味をなさない．

$FUNC$ を課す動機はわかりやすい．量子力学の標準的理解において，B を測定する一つの方法は，A を測定しその値に関数 f を適用するというものである．例えば，$(j_z)^2$ を測定する一つの方法は j_z を測定し，その測定値を 2 乗することである．広く認められているこのような方法を $B = f(A)$ の値を知る一つの仕方であることを認め，そのうえさらに，すべての物理量が同時に確定した値をもつと考えるならば，次に述べるようにすべての物理量への付値が $FUNC$ を満たすと考えるのは自然なことである．「確定した値」について見解 II をとる場合についてはほとんど説明の必要もないであろう．実際の測定値の間で成立すると考えられている関数的関係は，あらかじめ決まっているとされる測定値の間においても成立しているはずである．見解 I をとるにせよ，その見解の説明で述べたように，測定において所有値が忠実に装置にディスプレイされると考えるならば，測定値の間で成立する関数的関係は所有値の間でも成立すると考えるのが自然であろう．

次に，$FUNC$ から帰結することをみていこう．まず，次の「和の規則」が $FUNC$ から導出される．

和の規則　物理量 A と B が可換であるとき，$[A+B] = [A] + [B]$ である．

$FUNC$ から和の規則は次のようにして導出される．A と B は N 次元ヒルベルト空間上の可換な自己共役作用素（物理量）であるとする．可換なので，行列表示したときにそれらを同時に対角化する正規直交基底が存在する．この正規直交基底をなすベクトルす

べてが固有ベクトルとなる極大自己共役作用素 C を考えよう．C のスペクトル分解を $C=\sum_{i=1}^{N} c_i P_{c_i}^{C}$ と表記する．そのとき，C のスペクトルから実数へのある関数 f と g が存在して $A=f(C)$，$B=g(C)$ であり，A と B はともに C の関数となる．さらに，次の等式が成立する．

$$\begin{aligned}
A+B &= f(C)+g(C) \\
&= \sum_{i=1}^{N} f(c_i)P_{c_i}^{C} + \sum_{i=1}^{N} g(c_i)P_{c_i}^{C} && [\text{作用素の関数の定義式より}] \\
&= \sum_{i=1}^{N} \{f(c_i)+g(c_i)\}P_{c_i}^{C} \\
&= \sum_{i=1}^{N} h(c_i)P_{c_i}^{C} \\
&= h(C)
\end{aligned}$$

（ここで 4 番目の等号は，新たに C のスペクトルから実数への関数 h を各固有値 c_i について $h(c_i)\equiv f(c_i)+g(c_i)$ と定義したことによる．）よって $A+B=h(C)$ であり，それらは作用素として同一なので

$$[A+B]=[h(C)] \tag{21}$$

となる．一方，

$$\begin{aligned}
[A]+[B] &= [f(C)]+[g(C)] \\
&= f([C])+g([C]) && [FUNC\ \text{より}] \\
&= h([C]) && [h\ \text{の定義より}] \\
&= [h(C)] && [FUNC\ \text{より}]
\end{aligned}$$

なので，

$$[A]+[B]=[h(C)] \tag{22}$$

である．(21) と (22) より和の規則が成立することがわかる．

続けて，このようにして得られた和の規則を射影作用素に適用しよう．$\{P_i\}_{i=1}^{M}$（ここで，M はヒルベルト空間の次元 N 以下の自然数）は相互に直交する射影作用素からなる集合であり，そのうえすべての和が単位作用素となる（$I=\sum_{i=1}^{M} P_i$）と仮定する．和の規則を繰り返し適用すると，

$$[I]=\sum_{i=1}^{M}[P_i]$$

が得られる．このような射影作用素からなる集合の具体例は，任意の自己共役作用素 $A=\sum_{i=1}^{M}a_iP_{a_i}^A$ のスペクトル射影 $\{P_{a_i}^A\}_{i=1}^M$ である．それらは相互に直交し，和が単位作用素となる．よって，任意の自己共役作用素のスペクトル射影について

$$[I]=\sum_{i=1}^{M}[P_{a_i}^A] \tag{23}$$

が成立する．スペクトル規則によると，物理量（自己共役作用素）に付与される値はスペクトルに属する値であった．単位作用素 I の固有値は 1 のみなので $[I]=1$ である．一方，射影作用素の固有値は 0 か 1 なので，等号の右辺の各射影作用素がとりうる値は 0 か 1 である．よって，スペクトル射影 $\{P_{a_i}^A\}_{i=1}^M$ に属する射影作用素の一つだけに 1 が，残りすべてには 0 が付与されることになる．したがって，もしすべての物理量（自己共役作用素）に *FUNC* を満たすように値を付与できるならば，とりわけ 1 次元射影作用素（1 次元部分空間の上への射影作用素）に限定した次の問いに肯定的に答えられなければならない．

K-S 問題　N 次元ヒルベルト空間上のすべての 1 次元射影作用素に，次の条件を満たすように 0 か 1 を付値できるか？

条件∗　$\{P_i\}_{i=1}^N$ が相互に直交する 1 次元射影作用素からなる集合であるならば，そのうちの一つだけに 1 を，残りすべてに 0 を付値する．

いま，すべての物理量に確定した値を付与できるのか，という問いについて考えているのだった．そして，そのような値付与が満たすべき二つの条件，スペクトル規則と *FUNC* を紹介した．詳しくみてきたように，仮にスペクトル規則と *FUNC* を満たす値付与が存在するならば，すべての 1 次元射影作用素にたいする，条件∗を満たす 0，1 の付値が存在しなければならない．だが，次節でみるように，コッヘンとシュペッカーは，次元が 3 以上である任意のヒルベルト空間においてそのような付値は存在しないことを証明したのである．そこで彼らは，すべての物理量に確定した値を付与できない，と結論付けたのである．

4.3　ペレスの証明

コッヘンとシュペッカーは，次元が 3 以上である任意のヒルベルト空間においては 1 次元射影作用素すべてに条件∗を満たすように 0，1 を付値できないことを証明した．彼らの証明はかなり複雑であったが，その後ほかの研究者によって簡略化されてきた．ここでは物理学者のペレスによる証明 [36] を紹介する．

量子力学の状態空間は係数体が複素数のヒルベルト空間だが，まず係数体が実数である場合に次の定理が示され，それを利用して複素数の場合が証明される．

3 次元実-不可能性定理　3 次元実ヒルベルト空間上において，1 次元射影作用素にたいする，条件＊を満たす 0，1 の付値は存在しない．

まず，この定理の証明をみていこう．

下の図 8 をみてほしい．1 辺の長さが $2\sqrt{2}$ の立方体が描かれている．立方体の中心（対

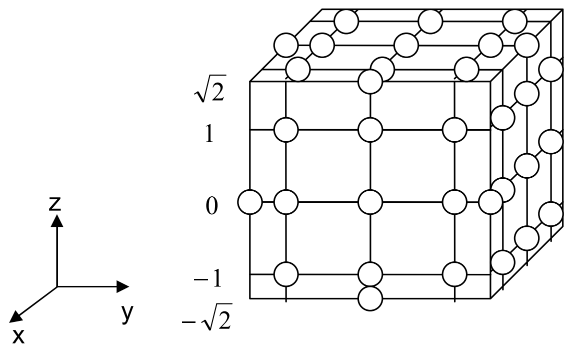

図 8

角線の交点）を原点とし，その手前方向，右方向，上方向を，それぞれ x 成分，y 成分，z 成分が正である方向として，立方体表面上の点を座標表示する．これまでの問題設定では 1 次元射影作用素にたいする条件＊を満たす 0，1 の付値の存在について考えてきたが，これからしばらくは少々設定を変えて，立方体の表面上にある点を，0 のかわりに白く，1 のかわりに黒くぬるぬり分けが存在するのか，という問題について考えよう．色のぬり分け問題において，条件＊は「三つの点の原点からの方向が相互に直交するときには，一つだけを黒に，残りの二つを白にぬり分けねばならない」という条件に対応する．今後，ぬり分け問題においてはこの条件を条件＊と呼ぶ．これから，立方体表面に印を付けた計 33 方向について，条件＊を満たすように色をぬり分けられないことが示される．これらの 33 方向はそれぞれ，相互に直交する 16 個の三つ組のどれかに属するが，いくつかの方向は複数の直交三つ組に属する．そこで，ある直交三つ組のぬり分けは別の直交三つ組のぬり分けに影響をおよぼす．最終的に，ぬり分けの不可能性が示される．

はじめに，$(0,0,\sqrt{2})$ が黒であるとしよう．ぬり分けは次のように進められる．

図 9.1　$(\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$，$(\sqrt{2},0,0)$，$(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$，$(0,\sqrt{2},0)$ は，それぞれ $(0,0,\sqrt{2})$ と

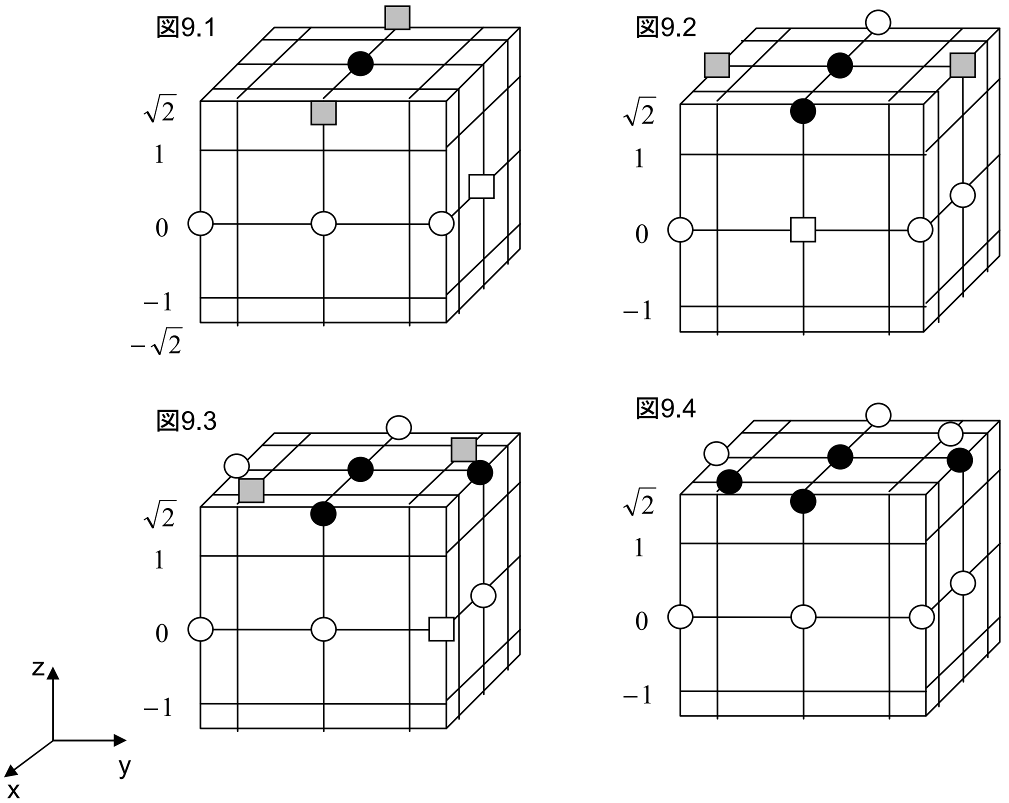

図 9

直交するので，白である．次に灰色の 2 点のぬり分けを考える．この 2 点と白くぬられた四角の点は相互に直交する．よって，灰色の 2 点のどちらか一つは黒である．この 2 点は対称な位置にあるので，どちらを黒としてもよい．ここでは，図 9.2 のように $(\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$ を黒とした．

図 9.2　灰色の 2 点のぬり分けを考える．この 2 点と白くぬられた四角の点は相互に直交する．あとは図 9.1 の推論と同様である．灰色の 2 点のうち，ここでは，図 9.3 のように $(0, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ を黒とした．

図 9.3　図 9.1，9.2 の推論と同様である．四角の 3 点は相互に直交する．灰色の 2 点のうちどちらが黒でもよいが，ここでは図 9.4 のように $(1, -1, \sqrt{2})$ を黒とした．

現段階で確定した色のぬり分けは図 9.4 の通りである．さらに推論がどのように進むのかを下の表 2 にまとめておいた．

さて，$(\sqrt{2}, 0, 0)$，$(0, \sqrt{2}, 1)$，$(0, -1, \sqrt{2})$ はともに白である（それぞれ，図 9.1 のぬり

表 2

確定するぬり分け	確定する理由	帰結
$\left.\begin{array}{c}(\sqrt{2},0,-1)\\(0,\sqrt{2},1)\end{array}\right\}$ は○	$(1,-1,\sqrt{2})$ ●と直交	
$(1,0,\sqrt{2})$ は●	$\left.\begin{array}{c}(\sqrt{2},0,-1)\ ○\\(0,\sqrt{2},0)\ ○\end{array}\right\}$ と直交	$(\sqrt{2},-1,-1)$ は○
$(\sqrt{2},1,1)$ は●	$\left.\begin{array}{c}(0,-\sqrt{2},\sqrt{2})\ ○\\(\sqrt{2},-1,-1)\ ○\end{array}\right\}$ と直交	$(-1,0,\sqrt{2})$ は○
$(\sqrt{2},0,1)$ は●	$\left.\begin{array}{c}(0,\sqrt{2},0)\ ○\\(-1,0,\sqrt{2})\ ○\end{array}\right\}$ と直交	$(-1,-1,\sqrt{2})$ は○
$(1,1,\sqrt{2})$ は●	$\left.\begin{array}{c}(\sqrt{2},-\sqrt{2},0)\ ○\\(-1,-1,\sqrt{2})\ ○\end{array}\right\}$ と直交	$(0,\sqrt{2},-1)$ は○
$(0,1,\sqrt{2})$ は●	$\left.\begin{array}{c}(\sqrt{2},0,0)\ ○\\(0,\sqrt{2},-1)\ ○\end{array}\right\}$ と直交	$(-1,\sqrt{2},-1)$ は○
$(1,\sqrt{2},1)$ は●	$\left.\begin{array}{c}(-\sqrt{2},0,\sqrt{2})\ ○\\(-1,\sqrt{2},-1)\ ○\end{array}\right\}$ と直交	$(0,-1,\sqrt{2})$ は○

分けの説明，表 2 の 1 行目と最終行を参照）．だが，それらの三つの方向は相互に直交する．よって色のぬり分けは不可能である[*28]．

次に，3 次元実-不可能性定理を用いて，3 次元複素ヒルベルト空間上のすべての 1 次元射影作用素に条件＊を満たすように 0，1 を付値できないことを示そう．証明には背理法を用いる．以下でみるように，3 次元複素ヒルベルト空間上で条件＊を満たす付値が可能である（背理法の仮定）とすると，3 次元実ヒルベルト空間上で条件＊を満たす付値が存在することになる．だが，3 次元実-不可能性定理によるとそのような付値は存在しないのであった．

3 次元実ヒルベルト空間において相互に直交する 3 方向 (x,y,z) を適当にとり，それ

[*28] この証明で言及されたのは 25 方向のぬり分けだけであり，33 方向すべてではない．それなのに矛盾が導かれたので，証明には 33 方向は必要でない，と考えるかもしれない．それは誤解である．証明にでてきた 25 方向だけなら条件＊を満たすようにぬり分けられる．証明のぬり分けではまず立方体上面の中心点を黒とした（上面の点が黒となるように立方体の配置を決めた）が，単にこの 25 方向をぬり分けるだけならばその点を黒とする必要はない．

ぞれの方向に対応するスピン成分 j_x，j_y，j_z を考えよう．それらのスピン成分は 3 次元複素ヒルベルト空間上で作用する自己共役作用素によって表されることに注意してほしい．4.1 節で説明したように，それらの自己共役作用素はそれぞれ縮退のない三つの固有値 $\{+1, 0, -1\}$ をもち，なかでも各スピン成分の固有値 0 の固有状態 $|j_x = 0\rangle$，$|j_y = 0\rangle$，$|j_z = 0\rangle$ は相互に直交するのであった．よって三つの 1 次元射影作用素 $P_0^{j_x}$，$P_0^{j_y}$，$P_0^{j_z}$ も相互に直交する（どの二つの射影作用素の積も 0 となる）．要するに，3 次元実空間における直交系 (x, y, z) をどのようにとろうとも，3 次元複素空間において $P_0^{j_x}$，$P_0^{j_y}$，$P_0^{j_z}$ は相互に直交するのである．図 10 はこのことの直観的なイメージ図である．右側にはそれぞれの 1 次元射影作用素の値域が描かれている．

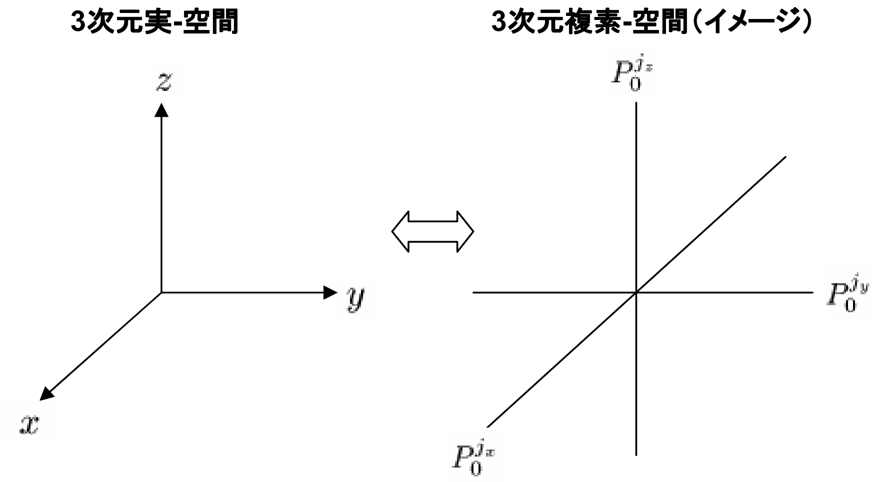

図 10

仮に 3 次元複素ヒルベルト空間上で条件∗を満たす付値が可能である（背理法の仮定）としよう．するとその付値によって，実空間における直交系 (x, y, z) をどのようにとろうとも，$P_0^{j_x}$，$P_0^{j_y}$，$P_0^{j_z}$ のなかで，一つだけに 1 が，残りの二つには 0 が与えられる．複素空間において 1 を付値されたスピン成分に対応する方向を実空間において黒く，0 を付値されたスピン成分に対応する方向を白くぬり分ければ，3 次元実空間において条件∗を満たす色のぬり分けができることになる．だが，3 次元実空間においてそのような色のぬり分けは存在しなかったので，矛盾が生じる．よって，3 次元複素ヒルベルト空間において条件∗を満たす 0，1 の付値は存在しない．

最後に，ヒルベルト空間の次元が 3 でない場合に同様の付値が存在するのか，否かについて，手短に述べておこう．まず 3 より大きな次元の場合，条件∗を満たす 1 次元射影作

用素すべてへの付値は存在しない．その理由を 4 次元の場合を例に説明しよう．4 次元ヒルベルト空間において付値が存在するとしよう（背理法の仮定）．0 を付値された方向（1 次元射影作用素の値域）を一つ勝手に選び，それと直交する 3 次元部分空間を考え，存在すると仮定している 4 次元空間における付値をその 3 次元部分空間上に制限する．そのように制限された付値は，その 3 次元部分空間（3 次元ヒルベルト空間）上の，相互に直交する 1 次元射影作用素からなる任意の三つ組について，その一つだけに 1 を，残りの二つに 0 を付与する．だがこのことは，すでにみた 3 次元ヒルベルト空間における否定的結果と矛盾する．よって，4 次元ヒルベルト空間において付値は存在しない．一方，2 次元ヒルベルト空間においては付値は存在することが知られている[*29]．したがって，最終的な結論は，次のようになる．

> 3 以上の任意の次元のヒルベルト空間において，相互に直交する 1 次元射影作用素からなる任意の集合について，そのなかの一つだけの射影作用素に 1 を与え，残りすべての射影作用素に 0 を与える付値は存在しない．

4.4 コッヘンとシュペッカーの NO-GO 定理の物理的解釈

これまで，量子力学において「すべての物理量（観測可能量）は自己共役作用素によって表される」ということだけでなく，その逆，すなわち「任意の自己共役作用素はなんらかの物理量（観測可能量）を表す」ということも仮定して議論してきた．これまでの議論では，K-S 問題に否定的解答を与える一群の射影作用素について多くの場合，数学的，形式的に論じただけで，それらが実際にはどのような物理量（観測可能量）に対応しうるのかを明らかにしてこなかった．そこで，もし「任意の自己共役作用素はなんらかの物理量（観測可能量）を表す」という仮定に根拠がないならば，議論の結論を受け入れる必要はないかもしれない．

かつてこの仮定に疑問を唱えた多くの研究者がいた．例えば，物理学者のウィグナーは次のように述べている．

> ある教科書や教師は，〔測定可能なのは自己共役作用素だけであるというだけでなく，〕さらに一歩踏み出し，すべてのエルミート的な（より厳密にいうと，自己共役であるすべての）作用素は測定可能であると主張する．しかし，ある自己共役作用素の測定はどのようになされうるのかと問うても，それらの教科書や教師はどう

[*29] 例えば，レッドヘッドの教科書 [40] の 5 章を参照．

にも答えられないだろう．というのも，$P+Q$，$PQ+QP$ や PQP といった量がどのようにして測定されうるのかわからないのである．実際，明らかにほとんどの作用素は測定できないのである（文献 [50] の p. 369）[*30]．

ウィグナーは位置 Q や運動量 P から構成される量を例に疑問を述べたが，同様の疑問は，スピン 1 の状態空間（3 次元ヒルベルト空間）上の自己共役作用素にも生じる．4.1 節で導入した自己共役作用素

$$K_{[x,y,z]} \equiv (j_x)^2 - (j_y)^2$$

を思い出そう．この量は物理量（観測可能量）なのだろうか．もしそうなら，いったいどのようにして測定できるのだろうか．

物理学者のスウィフトと数学者のライトは，ヒルベルト空間の次元が有限である場合について，この問いに解答を与えた [44]．彼らの結論を次のように要約できる．

> マクスウェル方程式と整合的ないかなる電磁場をも実際につくることができるならば，有限次元ヒルベルト空間上で作用する任意の自己共役作用素により表される量を測定できる．

われわれにとって重要な 3 次元の場合を例にいうと，もしマクスウェル方程式と整合的ないかなる電磁場をもつくることが実際にできるならば，スピン 1 の状態空間，すなわち 3 次元ヒルベルト空間上で作用する任意の自己共役作用素について，その固有値の違いに応じて異なる検出結果をうむ実験を実現できるということである．よって，「すべての自己共役作用素はなんらかの物理量（観測可能量）である」という仮定を疑問視して，前節まででみてきた値付与の不可能性の議論を否定することはできない[*31]．

さらに，次の点も強調すべきであろう．前節までの議論を成立させるには，3 次元ヒルベルト空間上のすべての自己共役作用素が必要なのではない．ペレスの証明で利用した 3 次元実-空間における 33 方向を思い出そう．各々の方向はそれぞれ，相互に直交する 3 方向からなる 16 個の三つ組のどれかに属するのであった．さて，33 方向それぞれのスピン成分を表す自己共役作用素を考えることができる．33 方向は 3 次元実-空間において指定されるのだが，各方向に対応するスピン成分作用素は 3 次元複素-空間上のものであることに注意してほしい．33 方向がそれぞれ属する直交三つ組 (x,y,z) は 16 個あったが，そ

[*30] 引用文中の〔・・〕は，著者が補った．

[*31] ただし，スウィフトとライトの議論では，PQP のような次元が無限であるヒルベルト空間上で作用する自己共役作用素の測定可能性については，依然として疑問が残る．

のそれぞれについて 4.1 節で導入した自己共役作用素 $K_{[x,y,z]} \equiv (j_x)^2 - (j_y)^2$ を定義できる．この作用素を導入した際に説明したように，それは三つの固有値 -1，0，$+1$ をもつ極大自己共役作用素で，相互に直交する三つの状態 $|j_x = 0\rangle$，$|j_y = 0\rangle$，$|j_z = 0\rangle$ がそれぞれ各固有値の固有状態となり，そのスペクトル分解は

$$K_{[x,y,z]} = (-1)P_0^{j_x} + (0)P_0^{j_y} + (+1)P_0^{j_z}$$

となるのであった．

以上の準備で，値付与の不可能性を示すのに必要な自己共役作用素を説明できる．16 個の直交三つ組それぞれについての極大自己共役作用素 $K_{[x,y,z]}$，およびそれらの 1 次元スペクトル射影 $P_0^{j_x}$，$P_0^{j_y}$，$P_0^{j_z}$，合わせて $16 + 33 = 48$ 個[*32]の作用素を用いて値付与の不可能性を示すことができるのである．もちろん再び $K_{[x,y,z]}$ は物理量（観測可能量）なのか，という疑念が生じるかもしれないが，スウィフトとライトが示したようにそれらは測定できる量なのである．

4.5 ベルの指摘

3 以上の次元の任意のヒルベルト空間において，条件∗を満たすようにすべての 1 次元射影作用素に 0 か 1 を付値できない．このこと自体は純粋に数学的な結果であり，動かしがたい事実である．コッヘンとシュペッカーは，この数学的結果はすべての物理量にたいし確定した値を付与できないことを意味する，と解釈した．だが，そのように解釈しなければならない，とは限らない．本節では，コッヘンとシュペッカーの議論にたいしベルが与えた指摘を紹介しよう．

$FUNC$ を思い出そう．それは，B が A の関数であるとき，B の値は A の値に関数 f を適用した値でなければならない，という要請であった．

FUNC: $\quad B = f(A) \qquad \Rightarrow \qquad [B] = f([A])$

関数的関係にある二つの自己共役作用素は可換である．そこで，可換な物理量に課される制約である $FUNC$ は無害であると考えるかもしれない．しかし実際には，$FUNC$ を介して非可換な物理量の値にも制約が課される．

そのようなことは，次のときに典型的に生じる．スピン 1 の状態空間上の自己共役作用素 j_z，$(j_z)^2$ と $K_{[x,y,z]}$ を思い出そう．j_z と $K_{[x,y,z]}$ は非可換だが，$(j_z)^2$ はそれぞれの関

[*32] 16 に加えるのは 33 でなく 16 の 3 倍の 48 でないか，と考えるかもしれない．それは誤解である．16 個の極大自己共役作用素のスペクトル射影は重複しているので 48 ではない．

数であった．より一般的にいうと，自己共役作用素 A と C が非可換だが，縮退した固有値をもつ自己共役作用素 B は A と C それぞれの関数となることがある．それらの関数的関係をそれぞれ適当な関数 f と g を用いて $B=f(A)$，$B=g(C)$ と表す．

$$f(A)=B=g(C) \tag{24}$$

ということである．それぞれの関数的関係に $FUNC$ を適用すると，非可換である A と C の値は B の値を介し次の等式を満たさねばならないことがわかる．

$$f([A])=[B]=g([C]) \tag{25}$$

ここで $FUNC$ と値付与の不可能性との密接な関係をより明瞭にしておきたい．そのために，値付与の不可能性という前節までで説明した事態をこれまでとは異なるやり方で説明しよう．そのやり方では $FUNC$ の役割がより強調され，和の規則は登場しない．図 11

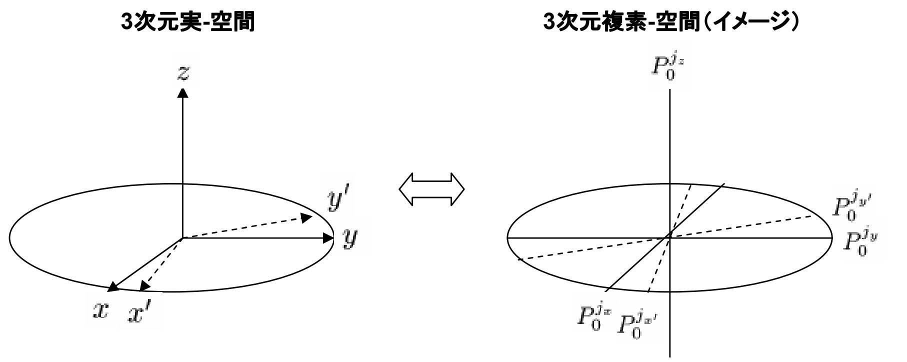

図 11

左のような関係にある二つの直交三つ組 (x,y,z)，(x',y',z) を考える．それらは方向 z を共有している．それぞれの直交三つ組に対応する $K_{[x,y,z]}$ と $K_{[x',y',z]}$ を考えよう．右の図にはそれら二つの自己共役作用素それぞれのスペクトル射影の値域が描かれている．二つの作用素はスペクトル射影 $P_0^{j_z}$ を共有している．これは二つの直交三つ組が z 方向を共有したことの結果である．すでに説明したようにスペクトル射影はもとの自己共役作用素の関数なので，$P_0^{j_z}$ は $K_{[x,y,z]}$ と $K_{[x',y',z]}$ それぞれの関数である．そこで，この二つの関数的関係に $FUNC$ を適用すると，$K_{[x,y,z]}$，$P_0^{j_z}$ と $K_{[x',y',z]}$ の値間に等式 (25) で表される制約が課される．同様の制約は，ペレスの証明にでてきた 16 個の直交三つ組に対応する自己共役作用素とそのスペクトル射影に課され，その結果，値付与できなくなるのである．

以上の説明から，コッヘンとシュペッカーの NO-GO 定理において $FUNC$ が決定的に重要な役割を果たしていることは明らかであろう．そこでこの定理を回避するには，$FUNC$ を否定する必要がある．$FUNC$ の正当性にはじめて疑念を表明したのは，1 章でも登場したベルであった[*33]．

> 物理量の測定において，ほかにいかなる物理量の測定が同時に行われるのかとは独立に同じ値が得られるに違いないということが暗黙のうちに仮定されている．（論文 [6] 参照．この論文は文献 [8] に再録されており，引用箇所はその文献の p. 9）．

ベルがいいたかったことを，上の等式 (24) を満たす自己共役作用素 A，B，C を用いて説明しよう．すでにみたように，$FUNC$ を受け入れると，それら三つの物理量の値は等式 (25) の制約を課される．だが，ベルはそのことに疑問をもった．B を測定する二つのやり方を考えよう．一つは A を測定しその測定値に関数 f を適用する方法であり，もう一つは C を測定しその測定値に関数 g を適用する方法である．等式 (25) は，（確定した値について，見解 I と見解 II のどちらをとるにせよ）それら二つの方法で得られる値は同じであるという．しかし，A と C は非可換であり，それらを同時測定できない．すると，A を測定するという文脈で得られる B の値と，C を測定するという文脈で得られる B の値が一致することを確かめることはできないのであり，等式 (25) を（さらには $FUNC$ を）受け入れるア・プリオリな理由はないことになる．このようなことをベルは指摘したのである．

4.6 文脈依存型の確定値付与

コッヘンとシュペッカーの NO-GO 定理にもかかわらず，すべての物理量に確定した値を付与しようとするならば，どのような道をとりえるのだろうか．確定した値についての 2 通りの見解を思い出そう．一つは「確定した値」を所有値とみなす見解 I であり，もう一つはあらかじめ決まっている測定値とみなす見解 II であった．どちらにせよ，$FUNC$ を受け入れる限り等式 (25) が成立し，値の付与は不可能である．これから，$FUNC$ に適用制限を設け等式 (25) がいつでも成立するのを防ぐことで，NO-GO 定理を回避する二

[*33] 正確にいうと，ベルは $FUNC$ という呼び名は知らない．引用部分を含む論文が最初に出版されたのは 1966 年で，それはコッヘンとシュペッカーの論文が出版されるより前である．次の章で説明するが，コッヘンとシュペッカーの方法とは別に，値付与の不可能性をグリーソンの定理の帰結として示すこともできる．ベルはその議論を知っており，さらにその議論における $FUNC$ に該当することの重要性を理解し引用部分の疑問を述べた．

つの方法を紹介しよう．一つは，順番が前後するが，見解 II をとる回避策であり，もう一つは見解 I をとる回避策である．なお引き続き，A，B，C は等式 (24) を満たす自己共役作用素で，A と C は非可換であり，それぞれ極大であるとする．

ベル: 見解 II をとる回避策．A を測定する文脈，C を測定する文脈など，測定文脈ごとに B の測定値はあらかじめ決まっている．A-測定の文脈での B のあらかじめ決まっている測定値と，C-測定の文脈での B のあらかじめ決まっている測定値とが一致している必要はない．（文献 [6] 参照）

ファン・フラーセン: 見解 I をとる回避策．量子力学における B は，文脈 A，文脈 C など各文脈に応じて本当は異なる複数の物理量（$B_{<A>}$ や $B_{<C>}$ と表記する）を同一視したものである．$B_{<A>}$ と $B_{<C>}$ は本当は異なる物理量なので，それらの所有値が一致する必要はない．（文献 [47] 参照）

ベルの回避策では，B は額面どおり一つの物理量であり，その値が測定文脈ごとに異なる．一方，ファン・フラーセンの回避策では，B は文脈ごとに異なる複数の物理量へと分裂させられる．この考え方によると，B のような量子力学における物理量は実在しない．量子力学における物理量は，本当は文脈ごとに異なる複数の物理量を同一視した不完全なものとなる．このような少々突飛な考え方をする動機は次の通り．ベルの回避策は測定値に関するものであり，測定されてないときの物理量の値についてなにもいわない．実在論者はこの点に不満を感じる．ファン・フラーセンの回避策は，こういった不満を解消すべく，物理量の所有値を考え，実在論を維持する試みである．これから，例えば文脈 A における B の値を $[B]_{<A>}$ と表記する．これは，ベルの回避策では A-測定文脈における B のあらかじめ決まった測定値を，ファン・フラーセンの回避策では分裂した物理量 $B_{<A>}$ の所有値を表す[*34]．

次に，このような「文脈依存型の確定値付与」において，それぞれの自己共役作用素はいかなる文脈をとりうるのか，という問いを考えよう．ベルの回避策の場合，この問いは，B のあらかじめ決まった測定値を測定文脈ごとに付与するのだが，B はいかなる測定文脈と両立するのか，というものとなる．一方，ファン・フラーセンの回避策の場合，B をどの文脈ごとに真の物理量へと分裂させるのか，という問いになる．一つの自然な解答

[*34] 本来ならば，ファン・フラーセンの回避策での分裂した物理量の $B_{<A>}$ の所有値は $[B_{<A>}]$ と表記すべきである．だが，これから二つの回避策について同時に議論を進めたいので，表記を揃えている．また，ここで述べた二つの回避策以外にも，少々バランスは悪いが論理的には，物理量についてはファン・フラーセンのように文脈ごとに分裂した物理量を考え，その確定した値については見解 II をとる（あらかじめ決まった測定値を考える）という第三の道もありうる．後で，二つの回避策の問題点を述べるが，同じ問題点がこの第三の考え方についても生じる．

は，B を関数として表せる自己共役作用素ごとに文脈を指定する，というものである．なぜなら（ベルの回避策を例に考えるとわかりやすいように）そのような自己共役作用素を測定すると，その値に関数を適用することで B の値（測定値）が得られるからである．明らかに，このような測定文脈のなかには，B を関数として表せる極大自己共役作用素（A や C など）が含まれる．これからは，そのような極大自己共役作用素のみを文脈として考えたい[*35]．要するに，ある物理量（自己共役作用素）がとりうる文脈として，その自己共役作用素を関数として表せる極大自己共役作用素のみを考えるということである．このように文脈を限定することは，「文脈依存型の確定値付与」の完全な理論化としては不備かもしれない．しかし，これからの議論の主眼は，「文脈依存型の確定値付与」の完全な理論化よりも，その考え方が直面する新たな困難をみていくことにある．それには，極大作用素だけを文脈として考えておけば十分である．

次に，「文脈依存型の確定値付与」が満たすべき二つの要請を述べよう．一つ目は，文脈依存型の場合にも「スペクトル規則」を要請するものである．自己共役作用素 Y は極大自己共役作用素 X の関数であり，Y は文脈として X をとりうるとする．

スペクトル規則　物理量（自己共役作用素）Y の文脈 X における値 $[Y]_{<X>}$ は Y のスペクトル（議論を有限次元ヒルベルト空間に限定しているので，固有値すべてからなる集合）に属する値である．

二つ目は，それぞれの文脈内に限定して $FUNC$ に該当する規則が成立することを要請するものである．自己共役作用素 Y，Z はともに極大自己共役作用素 X の関数であり $(Y = f(X)$，$Z = g(X))$，それらはともに文脈として X をとりうるとする．

文脈内の ***FUNC***　Z は Y の関数（$Z = h(Y)$）であるとき，

$$[Z]_{<X>} = h([Y]_{<X>})$$

である．

この「文脈内の $FUNC$」により，文脈 $< X >$ における X，Y，Z の値は相互に無関係でなく，それぞれの値に応じて満たすべき制約が課されることになる[*36]．仮にこの制約がなかったとしよう．そのとき，Y と Z を同時測定する方法の一つは X を測定しその測

[*35] より正確には，極大自己共役作用素ごとに文脈を考える必要はない．同一のスペクトル射影をもつ極大自己共役作用素からなる集合ごとに文脈を考えれば十分である．

[*36] 「文脈内の $FUNC$」において，Y として X 自身をとることもできる．そのとき，文脈 $< X >$ における X と Z の値に制約が課される．

定値にそれぞれの関数を適用するものだが，そういった測定における各物理量の測定値間の関係が「文脈依存型の確定値付与」においては満たされないことになってしまう．

以上の二つの規則から，「文脈依存型の確定値付与」においても 69 頁と同じやり方で，次の「文脈内の和の規則」を示すことができる．自己共役作用素 Y，Z はともに極大自己共役作用素 X の関数であり，それらはともに文脈として X をとりうるとする．

文脈内の和の規則　$[Y+Z]_{<X>} = [Y]_{<X>} + [Z]_{<X>}$ である．

この規則を極大自己共役作用素 X のスペクトル射影に繰り返し適用すると，次の規則が得られる．

加法的真理値付与　射影作用素 P は，極大自己共役作用素 X のスペクトル射影 $\{P^X_{x_i}\}_{i\in I}$ の一部（あるいは，すべて）の和である，すなわち $P = \sum_{j\in J(\subseteq I)} P^X_{x_j}$ である，とする．そのとき，

$$[P]_{<X>} = \sum_{j\in J(\subseteq I)} [P^X_{x_j}]_{<X>}$$

である．

X の 1 次元スペクトル射影すべての和は単位作用素 I であった．その和に「加法的真理値付与」を適用すると，

$$[I]_{<X>} = [P^X_{x_1}]_{<X>} + [P^X_{x_2}]_{<X>} + \cdots\cdots + [P^X_{x_N}]_{<X>}$$

となる．スペクトル規則より，左辺は 1，右辺の各項は 0 か 1 である．このことから，右辺の項のうち，一つだけが 1，残りすべてが 0 となる．そこで，1 を「真」，0 を「偽」と解釈できる．

4.7　文脈依存型の確定値付与とその問題点

「文脈依存型の確定値付与」という考え方を採用することによって，コッヘン＝シュペッカーの NO-GO 定理自体を回避することはできる．しかし，それとは別の新たな問題が生じることになる．これから二つの問題点を順にみていこう．

問題点 1：連続測定

引き続き，関数的関係 $f(A) = B = g(C)$ にある三つの自己共役作用素 A，B，C を例に考える．A と C は非可換な極大自己共役作用素だが，それぞれの固有値 a_k と c_k の固有空間は同一であると仮定する．このようなとき，「文脈依存型の確定値付与」という考え

方において，A と C の値を関連付ける制約はない．というよりむしろ，そのような制約をなくすことで，コッヘン=シュペッカーの NO-GO 定理を回避したのであった．そのような制約が必要でないと考える根拠は，ベルが指摘した次の点であった．A と C は非可換でありそれらを同時測定できないので，値の一致，不一致を確かめることはできない．

しかし，まず A を測定し，引き続き C を測定してそれらの値を比較対照することならできる．先に行われる A 測定は対象系の状態を乱さない，いわゆる「擾乱なし」の測定であるとする．「擾乱なし」の測定によって意味するのは，測定相互作用直前に対象系が A の固有状態にあるときには測定相互作用が終了した時刻においても同一の固有状態にあり対象系の状態は乱されない，ということである．A 測定がこのような「擾乱なし」の測定であるとき，これからみるように量子力学が与える確率的予測によると，A の測定結果が a_k であることと，C の測定結果が c_k であることとの間には完全相関があることがわかる．

次のような，少々変則的な A と C の連続測定を考える．系 I は対象系，系 II は対象系の物理量 A の測定装置（の一部）であり，そのメーター物理量を M とする．$t = t_0$ から $t = t_1$ まで系 I と系 II は相互作用し，系 I+II の初期状態が，A の固有状態 $|a_i\rangle$ と測定装置の基底状態（測定相互作用直前の状態）$|m_0\rangle$ の積状態であるときには，

$$|a_i\rangle \otimes |m_0\rangle \mapsto |a_i\rangle \otimes |m_i\rangle$$

のように時間発展するとしよう．系 I の初期状態が重ね合わせの状態 $\sum_i \alpha_i |a_i\rangle$ であるときには，時間発展の線形性より

$$\sum_i \alpha_i |a_i\rangle \otimes |m_0\rangle \mapsto \sum_i \alpha_i |a_i\rangle \otimes |m_i\rangle$$

のように時間変化する．

この段階で，系 I の C と系 II の M の同時測定を行うとしよう．t_1 から系 II の M を測定すると，t_0 における A の測定値が得られる．これは間接測定であり，まず系 I と系 II が，系 I の状態を系 II へと写すように相互作用し，続けて第三の系によって系 II を測定するのである．t_0 からはじまるこの一連のプロセスを A 測定と考えることができる．すると，このような M の測定と C の測定を同時に行うと，t_0 における A と t_1 における C の測定結果を比較対照できる．時刻 t_1 における系 I+II の状態から，「A の測定値が a_k である」確率 $Pr(A = a_k)$，「C の測定値が c_k である」確率 $Pr(C = c_k)$，および「A の測定値が a_k であり，かつ C の測定値が c_k である」確率 $Pr(A = a_k, C = c_k)$ について，

$$Pr(A = a_k, C = c_k) = Pr(A = a_k) = Pr(C = c_k) = |\alpha_k|^2$$

であることがわかる．そのとき，

$$Pr(C = c_k | A = a_k) = Pr(A = a_k | C = c_k) = 1$$

であり，「A の測定値が a_k である」ことと「C の測定値が c_k である」こととの間に完全相関がある．

もちろん，「文脈依存型の確定値付与」において考えられているのは同じ時刻における A と C の値である．一方，前段落で述べた連続測定による議論で考えられているのは，異なる時刻 t_0 と t_1 における，それぞれ，A と C の値である．そこで，異なる時刻における A と C の値の間には完全相関があるのだが，同じ時刻においてはそのような相関はないと考えることも，少なくとも論理的には可能である．ただし，そのように考える場合には，なぜ同時刻においてはみられなかった値の一致が，わざわざ時間差を設けることで得られるのか，なんらかの説明をあたえる必要があるだろう．

問題点 2：非局所性

続けて，結合系において「文脈依存型の確定値付与」を考えると局所性に関する興味深い困難が生じるという議論を紹介する．はじめてそのような議論をしたのは科学哲学者のヘイウッドとレッドヘッド [24] である．その後，同じ結論を別の仕方で与える議論をやはり科学哲学者であるステアーズ [43] が提示した[*37]．これから，ステアーズの議論を本章のスタイルに合わせて再定式化したものを紹介する．

以下では，スピン 1 の「1 重項状態」(65 頁の (19) および (20) にあるスピン 1 の 2 粒子からなる結合系における，それぞれの粒子のスピン成分を具体例に議論を進める．まず，4.1 節で説明した次のことを再確認してほしい．

- 物理空間（3 次元実空間）における任意の直交系 (x, y, z) での各スピン成分 j_x，j_y，j_z は 3 次元ヒルベルト空間上の極大自己共役作用素によって表される．
- 各スピン成分の固有値 0 の固有状態 $|j_x = 0\rangle$，$|j_y = 0\rangle$，$|j_z = 0\rangle$ は相互に直交する．
- これら三つの状態は，極大自己共役作用素

  $$K_{[x,y,z]} \equiv (j_x)^2 - (j_y)^2$$

  の，それぞれ固有値 -1，$+1$，0 をもつ固有状態である．

[*37] ヘイウッドとレッドヘッドの議論はレッドヘッドの教科書 [40] に再録されている．また，ステアーズの議論は [11] で厳密かつ簡潔に再定式化された．

- 物理空間（3 次元実-空間）における直交系をどのようにとろうとも，「1 重項状態」の式の形は不変である．

さて，前節で述べた「文脈依存型の確定値付与」の考え方は，主として 1 粒子からなる系を念頭においていた．これからの議論のために，2 粒子系における表記の仕方を確認しておきたい．まず 2 粒子系における「文脈」の指定についてだが，粒子 1 と粒子 2 それぞれのヒルベルト空間上の極大自己共役作用素からなるペアによって 2 粒子系の文脈が指定されると考える．例えば，粒子 1 については文脈 j_x を，粒子 2 については文脈 j_y を考える場合，それらの結合系の文脈を $< j_x, j_y >$ と表記する．文脈 $< j_x, j_y >$ において，結合系のヒルベルト空間上の射影作用素（例えば $P_0^{j_x} \otimes P_0^{j_y}$）に付与される 0，1 は，すなわち $[P_0^{j_x} \otimes P_0^{j_y}]_{<j_x,j_y>}$ の値 0，1 は，文脈 $< j_x, j_y >$ における「粒子 1 の j_x の値は 0 であり，かつ，粒子 2 の j_y の値は 0 である」という命題の真理値である．

もう一つ具体例を挙げよう．以下の議論では，$[I \otimes P_0^{j_y}]_{<j_x,j_y>}$ のように，個別の粒子のヒルベルト空間上の単位作用素を用いた形式が頻繁に登場する．このような場合，付与される 0，1 は，文脈 $< j_x, j_y >$ における，「粒子 1 の j_x の値はその固有値のどれか一つであり，粒子 2 の j_y の値は 0 である」という命題の真理値である．粒子 1 について与えられる情報は自明なものなので（単に固有値に属するどれかの値をとるといっているにすぎない），この命題を，文脈 $< j_x, j_y >$ における「粒子 2 の j_y の値は 0 である」のように粒子 1 についての情報を省略して解釈してよい．

次に，2 粒子系における付値が，満たすべきと考えられる二つの条件をみていこう．

局所性　P は粒子 1 のヒルベルト空間（$\mathcal{H}_1$）上の任意の射影作用素であるとする．また，X は $\mathcal{H}_1$ 上の極大自己共役作用素であり，その 1 次元スペクトル射影すべての和，あるいは一部の和として P を表すことができるとする．（よって，X は P の文脈でありうる．）そのとき，粒子 2 のヒルベルト空間（$\mathcal{H}_2$）上の任意の極大自己共役作用素 Y と Y' それぞれを用いて指定される文脈について，

$$[P \otimes I]_{<X,Y>} = [P \otimes I]_{<X,Y'>}$$

である．

この条件によって，粒子 1 についていかなる事態が成立しているのかは，粒子 2 の文脈に依存しないということが要請される．この条件を課す動機は，ファン・フラーセンの回避策よりもベルの回避策で考えるほうが理解しやすいだろう．ベルの考えでは，ある物理量をそれ以外のいかなる物理量の関数として測定するのかに応じて文脈は指定されるのだった．粒子 2 について，測定直前まで Y 測定をする設定であったが，突然 Y' 測定をする設

定に変えたとしよう．粒子 2 の文脈を突然変更するのである．そのとき，もし「局所性」が成立しないならば，粒子 2 の設定を変更したことによって，粒子 1 のあらかじめ決まっていた測定値は変わることになってしまう．さて，上述の条件では，粒子 1 の設定を変更したときの粒子 2 の値についてはなにも述べていない．もちろんこの場合にも同様の条件が成立すべきである．この条件もあわせて以下では「局所性」と呼ぶ．

続けて，二つ目の条件をみていこう．

同時付値の規則　P，Q は，それぞれ，$\mathcal{H}_1$，$\mathcal{H}_2$ 上の射影作用素であるとする．また，X は $\mathcal{H}_1$ 上の極大自己共役作用素であり，その 1 次元スペクトル射影すべての和，あるいは一部の和として P を表せるとする．同様に，Y は $\mathcal{H}_2$ 上の極大自己共役作用素であり，その 1 次元スペクトル射影すべての和，あるいは一部の和として Q を表せるとする．（よって，X と Y はそれぞれ P，Q の文脈でありうる．）量子論的状態 $|\Phi\rangle$ によって，P と Q に同時に付与される確率が 0 であるならば，すなわち $\langle\Phi|P \otimes Q|\Phi\rangle = 0$ であるならば，

$$[P \otimes I]_{<X,Y>} = 0 \text{ あるいは } [I \otimes Q]_{<X,Y>} = 0$$

である．

この条件を課す動機は次の通り．この規則が述べている状況では，文脈を考える以前にそもそも「P かつ Q」に付与される確率は 0 である．そこで，**任意の文脈において**「P かつ Q」が真である確率は 0 であると考えてよい．そのうえで，任意の文脈において，

$$\begin{aligned}\text{「}P \text{ かつ } Q\text{」に付与される確率は } 0 \quad &\Rightarrow \quad \text{「}P \text{ かつ } Q\text{」は偽} \\ &\Rightarrow \quad P \text{ は偽，あるいは } Q \text{ は偽}\end{aligned}$$

であると解釈しているのである．

さて，以上の準備のもとで，次の命題を示すことができる．

命題 5．(*Stairs, Heywood=Redhead*)
スピン *1* の 2 粒子からなる結合系のスピン状態が「*1* 重項状態」$|\Psi\rangle$ であるとする．そのとき，「文脈依存型の確定値付与」において，**加法的真理値付与**，**局所性**および**同時付値の規則**が同時に成り立つとすると矛盾が生じる．

以下でこの命題がどのように示されるかを概観する．

$[I \otimes P_0^{j_x}]_{<K_{[x,y,z]},j_x>} = 1$ と仮定する．「1 重項状態」について $\langle\Psi|P_0^{j_y} \otimes P_0^{j_x}|\Psi\rangle = 0$ であり，それに「同時付値の規則」を適用すると，$[P_0^{j_y} \otimes I]_{<K_{[x,y,z]},j_x>} = 0$ か $[I \otimes$

$P_0^{j_x}]_{<K_{,}[x,y,z],j_x>} = 0$ である．だが，仮定より後者の値は 1 なので前者の値が 0，すなわち $[P_0^{j_y} \otimes I]_{<K_{[x,y,z]},j_x>} = 0$ である．そのとき「局所性」より，$[P_0^{j_y} \otimes I]_{<K_{[x,y,z]},j_y>} = 0$ である．このことから容易ではあるが少々面倒な推論の結果,「加法的真理値付与」と「同時付値の規則」を用いると，$[I \otimes P_0^{j_y}]_{<K_{[x,y,z]},j_y>} = 0$ となることがわかる．直観的に説明すると，仮にその値を 1 とすると（背理法の仮定),「1 重項状態」の相関形式をみるとわかるように $[P_0^{j_y} \otimes I]_{<K_{[x,y,z]},j_y>}$ も 1 となるが，その値は 0 だったので矛盾が生じるということである．以上より，まず

$$[I \otimes P_0^{j_x}]_{<K_{[x,y,z]},j_x>} = 1 \quad \text{ならば} \quad [I \otimes P_0^{j_y}]_{<K_{[x,y,z]},j_y>} = 0$$

であることがわかる．同様にして

$$[I \otimes P_0^{j_x}]_{<K_{[x,y,z]},j_x>} = 1 \quad \text{ならば} \quad [I \otimes P_0^{j_z}]_{<K_{[x,y,z]},j_z>} = 0$$

であることがわかる．

前段落の議論は $[I \otimes P_0^{j_x}]_{<K_{[x,y,z]},j_x>}$ の値が 1 の場合についてであった．次にその値が 0 である場合を考えよう．再び「局所性」,「加法的真理値付与」,「同時付値の規則」を用いて，次の結果が得られる．$[I \otimes P_0^{j_x}]_{<K_{[x,y,z]},j_x>} = 0$ である場合，$[I \otimes P_0^{j_y}]_{<K_{[x,y,z]},j_y>}$ あるいは $[I \otimes P_0^{j_z}]_{<K_{[x,y,z]},j_z>}$ のどちらか一方の値が 1 であり，もう一方の値は 0 である．

ここまでの議論から，

$$[I \otimes P_0^{j_x}]_{<K_{[x,y,z]},j_x>},$$

$$[I \otimes P_0^{j_y}]_{<K_{[x,y,z]},j_y>},$$

$$[I \otimes P_0^{j_z}]_{<K_{[x,y,z]},j_z>}$$

の三つのうち，どれか一つが 1 であり，残り二つは 0 となることがわかった.

さて，4.3 節で証明した 3 次元実空間における色の塗りわけの不可能性を思い出してほしい．相互に直交する，任意の 3 方向について，その一つだけを黒に残りの二つを白に塗り分けることはできないのであった．しかし，仮に上述の 3 条件を満たす「文脈依存型の確定値付与」が存在するならば，これから述べるやり方で 3 次元実空間における色のぬり分けができることになってしまう．

ぬり分けは次のように定義すればよい．相互に直交する 3 方向 (x, y, z) をとり，各スピン成分 j_x, j_y, j_z を考える．さらに, j_x と j_y を用いて $K_{[x,y,z]}$ を定義せよ．これらの自己共役作用素について, 二つ前の段落で述べた結論が得られる．そこで, $[I \otimes P_0^{j_x}]_{<K_{[x,y,z]},j_x>}$, $[I \otimes P_0^{j_y}]_{<K_{[x,y,z]},j_y>}$，および $[I \otimes P_0^{j_z}]_{<K_{[x,y,z]},j_z>}$ への 0，1 の付値について，1 を付値された方向を黒に，0 を付値された方向を白に塗り分ければよい．例えば，上記三つの付

値のなかで，一つ目が 1，残り二つが 0 ならば，x を黒く，y と z を白く，といった具合にぬり分ければよい．このぬり分けはペレスが証明に利用した 16 個の直交三つ組すべてにたいしても定義できる．しかし，それらのぬり分けは不可能であった．

このようにぬり分けの仕方を定義すると，次のことを心配するかもしれない．例えば，x 方向だけを共有する二つの直交三つ組 (x, y, z) と (x, y', z') を考えよう．そのとき，x のぬり分けは二つの直交三つ組それぞれにおいて指定される．だが，二つの直交三つ組に対応する文脈 $< K_{[x,y,z]}, j_x >$ と $< K_{[x,y',z']}, j_x >$ は異なる文脈であり，二つの直交三つ組において指定されるぬり分けの仕方は一致しないかもしれない．本当にそうなら，ぬり分けの定義自体に不備があることになる．だが，そのような心配は不要である．じつは「局所性」条件によってそのぬり分けの定義はうまくいくのである．その条件により，二つの直交三つ組について

$$[I \otimes P_0^{j_x}]_{< K_{[x,y,z]}, j_x >} = [I \otimes P_0^{j_x}]_{< K_{[x,y',z']}, j_x >}$$

であることが保証される．よって，上記のやり方でぬり分けを定義すること自体に問題はない．

以上の議論により，「文脈依存型の確定値付与」において「加法的真理値付与」,「局所性」および「同時付値の規則」を同時に満たすことはできない．「加法的真理値付与」と「同時付値の規則」は，系の性質を考える際に不可欠である．そこで「文脈依存型の確定値付与」を主張する場合,「局所性」を捨てざるをえない．

5 量子力学における観測命題がなす束とグリーソンの定理

本章は，はじめ，次章の付録として書きはじめた．4 章でみたように，文脈依存型の確定値付与には非局所性という新たな問題が生じる．だが，その問題提示は，数学的に厳密ではあるが，非相対論的な設定においてなされた．しかし，できることなら，非局所性の問題は，相対論的な設定において論じられるべきである．そこで，次の 6 章では，相対論的な場の量子論（代数的場の量子論）を視野に入れ，フォン・ノイマン代数とそれに属する射影作用素を用いて議論を進める．しかし，その結果，議論は抽象的にならざるを得ず，理解しにくい．そこで，次章の抽象的な議論にイメージをもってもらえるように，比較的慣れていると思われるヒルベルト空間上の射影作用素についての諸事実を，次章で述べるフォン・ノイマン代数とそれに属する射影作用素についての諸事実に対応付けるべく，本章は書かれている．

ただし，本章は単に次章の付録的意味しかないわけではない．前章における議論がそうであったように，すべての物理量への確定値付与の不可能性を論じるのに，なぜ射影作用素を用いるのだろうか？この問いに，前章では厳密な解答を与えていない．よく，「射影作用素からなる束は観測命題束とみなしてよい」といわれるが，その正当な理由を提示している書物や論文は意外に少ない．本章は，その問いへの（おそらくよく知られた）解答を，著者なりに再構成したものでもある．

5.1 束論

はじめに，以下の議論で用いる束論の諸概念の定義を，必要とする限りにおいて，まとめておきたい．

定義 1. 半順序集合 $(\mathcal{L}, \leq)$ で，任意の $x, y \in \mathcal{L}$ に最小上界 $x \vee y$ と最大下界 $x \wedge y$ が存在するものを，**束**という．

一般に束に最大元 Ω と最小元 $\emptyset$ が存在するとは限らないが，以下ではそれらが存在すると仮定する．

定義 2. 束 $(\mathcal{L}, \leq)$ で，$\mathcal{L}$ の任意の部分集合に最小上界と最大下界が存在するものを**完備束**といい，$\mathcal{L}$ の任意の可算部分集合に最小上界と最大下界が存在するものを，σ-**完備束**という．

定義 3. 最大元 Ω と最小元 $\emptyset$ が存在する束 $(\mathcal{L}, \leq)$ に，次の条件を満たす写像 $\mathcal{L} \ni x \mapsto x^{\perp} \in \mathcal{L}$ が存在するとき，$(\mathcal{L}, \leq, \perp)$ を**直可補束**という．

1. 任意の $x \in \mathcal{L}$ について，$x \vee x^{\perp} = \Omega$ かつ $x \wedge x^{\perp} = \emptyset$ である．
2. 任意の $x, y \in \mathcal{L}$ について，$x \leq y \quad \Rightarrow \quad y^{\perp} \leq x^{\perp}$ である．
3. 任意の $x \in \mathcal{L}$ について，$(x^{\perp})^{\perp} = x$ である．

定義 4. 直可補束 $(\mathcal{L}, \leq, \perp)$ で，次の分配則が成立するものを**ブール束**という．

$$\text{任意の } x, y, z \in \mathcal{L} \text{ について}, x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

$$\text{任意の } x, y, z \in \mathcal{L} \text{ について}, x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

である．

次にみるオーソモジュラー束では，分配則が限定付きで成立するように定義される*38．

定義 5. 直可補束 $(\mathcal{L}, \leq, \perp)$ で，次の条件が成立するものを**オーソモジュラー束**という．

$$\text{任意の } x, y, z \in \mathcal{L} \text{ について}, x \leq y \text{ かつ } x^{\perp} \leq z \text{ ならば}, x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

$$\text{任意の } x, y, z \in \mathcal{L} \text{ について}, y \leq x \text{ かつ } z \leq x^{\perp} \text{ ならば}, x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

である．

ブール束，オーソモジュラー束それぞれの定義において，二つの条件式を与えたが，実際には，一方の式が成立するとド・モルガン則（任意の直可補束で成立する）を用いて他方の式を示すことができる．そこで，例えばオーソモジュラー束であることを証明するには，どちらか一方を示せば十分である*39．

さて，次に述べるように，オーソモジュラー束の定義の一つ目の条件は，次に述べるように，簡単に適用しやすい別の条件と同値であることが知られている（証明は，例えば，文献 [38] の p. 47 の Proposition 3.5 を参照）．

事実 3. 任意の直可補束 $(\mathcal{L}, \leq, \perp)$ において，次の二つは同値である．

*38 少し先回りしていうと，ヒルベルト空間上の射影作用素からなる束はオーソモジュラー束だが，射影作用素がこれから述べる定義における一つ目の条件の前件「$x \leq y$ かつ $x^{\perp} \leq z$」を満たすとき，それらの三つの射影は相互に可換となる．

*39 さらにいうと，よく知られているように，任意の束で片側分配則：$x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ と $x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ が成立するので，等号成立を示すことさえ不要である．

- 任意の $x, y, z \in \mathcal{L}$ について, $x \leq y$ かつ $x^{\perp} \leq z$ ならば, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ である.
- 任意の $x, y \in \mathcal{L}$ について, $x \leq y$ ならば, $y = x \vee (x^{\perp} \wedge y)$ である.

したがって，ある直可補束がオーソモジュラー束なのか否かは，いま述べた二つ目の条件に照らし合わせるだけで判定できる.

σ-完備なブール束，σ-完備なオーソモジュラー束ともに，次のように，σ-準同型写像, σ-同型写像が定義される.

定義 6. $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ は σ-完備なオーソモジュラー束（σ-完備なブール束）であるとする．次の条件を満たす写像 $r : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ を σ-完備なオーソモジュラー束（σ-完備なブール束）間の σ-準同型写像という.

1. 任意の $a \in \mathcal{A}$ について，$r(a^{\perp}) = (r(a))^{\perp}$ である.
2. $\mathcal{A}$ の任意の可算部分集合 $\{a_i\}$ について，$r(\vee a_i) = \vee r(a_i)$ である.

とりわけ，写像 r が全単射であるとき，σ-同型写像という.

5.2 量子力学における観測命題束

「ヒルベルト空間上の射影作用素からなる束を量子力学における観測命題がなす束と考えてよい」といわれることがある．本節と次節で，そのように主張する根拠を著者なりの仕方で再構成し，射影束を観測命題のなす束とみなして進める議論に基礎づけを与えたい．具体的には，まず観測命題がなす束を構成し，それが射影作用素がなす束と同型であることを，議論に必要な仮定を明確にしつつみていく．ただし，これから述べる多くの数学的結果は，専門家の間では知られている，あるいは少し考えれば明らかなことだと思う．多くの場合，直観的な根拠のみを述べ，その厳密な証明は省略する.

ヒルベルト空間を $\mathcal{H}$ と表記する．以下，ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ を固定して考えていく．次元は有限でも無限でも構わない．ただし，可分性[*40]を満たすヒルベルト空間であるとする.

[*40] たかだか可算個の元からなる部分集合 $\mathcal{S}(\subset \mathcal{H})$ で，その集合に属する任意有限個の線形結合すべてからなる集合，すなわち $\{\sum_{n=1}^{N} \alpha_n \phi_n \,|\, \phi_n \in \mathcal{S},\ \alpha_n \in \mathbf{C},\ (n = 1, \cdots, N)\}$ が $\mathcal{H}$ において稠密となるものが存在するとき，$\mathcal{H}$ を可分であるという．可算個のベクトルからなる完全正規直交系の存在は，可分なヒルベルト空間において用いて示される．したがって，可分性は量子力学の状態空間としては満たして当然の仮定である.

また，量子力学において，すべての物理量（観測可能量）はヒルベルト空間上の自己共役作用素によって表される．このことに異論の余地はない．本章では議論を単純にするために，その逆，すなわち「すべての自己共役作用素にはそれに対応する物理量（観測可能量）が存在する」ということも仮定する．そこで，自己共役作用素と物理量という二つの概念を置き換え可能なものとして議論を進める．

$\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素すべてからなる集合を $\mathcal{O}$，実数 $\mathbf{R}$ のボレル集合体を $\mathbf{B}(\mathbf{R})$ と表記する．$\mathbf{B}(\mathbf{R})$ とは，要するに，$\mathbf{R}$ におけるすべての開区間を含み，そのうえ，補元および可算和をとる演算に関して閉じている，最小の $\mathbf{R}$ の部分集合族のことである．それに属する集合 $E(\in \mathbf{B}(\mathbf{R}))$ をボレル集合と呼ぶ．「物理量 O を測定し，ボレル集合 E 内に測定値を得る」という観測命題を $[O, E]$ と表記する．観測命題すべてからなる集合は次の通りである．

$$\mathcal{OS} \equiv \{[O, E] \mid O \in \mathcal{O},\ E \in \mathbf{B}(\mathbf{R})\}$$

次に，観測命題に確率を付与したいのだが，それには自己共役作用素の「スペクトル表示」とその表示に現れる「1 次元の単位の分解」が必要である．まず「1 次元の単位の分解」から確認しておきたい．$\mathcal{P}(\mathcal{H})$ を $\mathcal{H}$ 上の射影作用素全体とする．写像 $\mathbf{B}(\mathbf{R}) \ni E \to P(E) \in \mathcal{H}$，すなわちそれぞれのボレル集合に射影作用素を対応づける写像が，次の 3 条件を満たすとき，**1 次元の単位の分解**という．

1. $P(\emptyset) = 0$ かつ $P(\mathbf{R}) = I$ である（ここで，0, I はそれぞれ 0 作用素と単位作用素）．
2. $\mathbf{B}(\mathbf{R})$ の可算部分集合族 $\{E_n\}$ および $E \in \mathbf{B}(\mathbf{R})$ について，$E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$，$E_n \cap E_m = \emptyset$（$n \neq m$）ならば，
$$P(E) = \text{s-}\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} P(E_n)$$
である[*41]．
3. 任意の $E_1, E_2 \in \mathbf{B}(\mathbf{R})$ について，$P(E_1)P(E_2) = P(E_1 \cap E_2)$ である．

$\mathbf{B}(\mathbf{R})$ の可算部分集合族 $\{E_n\}$ が排他的かつ網羅的，すなわち $E_n \cap E_m = \emptyset$（ただし $n \neq m$）かつ $\mathbf{R} = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ であるとしよう．そのとき，$\{P(E_n)\}$ はいかなる射影作用素の集まりであろうか？まず，$\{E_n\}$ が排他的であることと条件 3 より $P(E_n)P(E_m) = 0$ であり，それらの射影作用素は相互に直交していることがわかる．さらに，網羅的である

[*41] ここで，s- lim は作用素の強収束を表す．$\mathcal{H}$ 上の作用素列 $\{A_n\}$ が A に強収束するとは，任意の $\phi(\in \mathcal{H})$ について $\lim_{n\to\infty} \| A_n\phi - A\phi \| = 0$ となることである．

ことと条件 1，2 より

$$I = \text{s-}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} P(E_n)$$

となり，和が単位作用素となることがわかる．

1 次元の単位の分解 $\{P(E)|E \in \mathbf{B}(\mathbf{R})\}$ が与えられたとしよう．そのとき，$\mathcal{H}$ に属する ϕ，ψ ごとに， 次のようにして可測空間 $(\mathbf{R}, \mathbf{B}(\mathbf{R}))$ 上に複素測度を導入できる．

$$\nu_{\phi,\,\psi}(E) \equiv (\phi, P(E)\psi), \quad E \in \mathbf{B}(\mathbf{R})$$

ここで，右辺のかっこ「(,)」は内積である．これは有界測度となる．そこで，$\mathbf{R}$ 上のボレル可測関数をこの複素測度を用いて積分できる．ボレル可測関数 $f(\mu)$ のこの複素測度による積分を $\int_{\mathbf{R}} f(\mu)\ d(\phi,\, P(\mu)\psi)$ と表記する．

有限 N 次元ヒルベルト空間において，任意の自己共役作用素 A は固有値の集合 $\{a_n\}_{n=1}^{M}$（M は N 以下の自然数）と各固有値の固有空間の上への射影作用素 $\{P^A_{a_n}\}$ を用いて

$$A = \sum_{n=1}^{M} a_n P^A_{a_n}$$

と表され，状態ベクトル ϕ にある系の A の期待値は

$$(\phi,\, A\phi) = \sum_{n=1}^{M} a_n(\phi,\, P^A_{a_n}\phi)$$

であった．

次元が無限である場合もふくめ，より一般には次のようになる．まず，次の定理が成立する．

定理 1. A を $\mathcal{H}$ 上の任意の自己共役作用素とする．ある *1* 次元の単位の分解 $\{P^A(E)|E \in \mathbf{B}(\mathbf{R})\}$ が存在し，任意の $\phi, \psi \in \mathcal{H}$ について，等式

$$(\phi,\, A\psi) = \int_{\mathbf{R}} \mu\ d(\phi,\, P^A(\mu)\psi)$$

が成立する．

そこで，自己共役作用素 A を，（厳密には内積をとっていないので無意味な表記なのだが）

$$A = \int_{\mathbf{R}} \mu\ dP^A(\mu)$$

と表示することがある．これを自己共役作用素のスペクトル表示という．とりわけ，状態ベクトルが ϕ である系にたいし，A を測定したときの期待値は，

$$(\phi,\, A\phi) = \int_{\mathbf{R}} \mu \;\, d(\phi,\, P^A(\mu)\phi)$$

である．

対象とする系の状態ベクトルが ϕ であるとしよう．そのとき，量子力学において，観測命題 $[O, E]$，すなわち「物理量 O を測定したときに，ボレル集合 E 内に測定値を得る」が真となる確率 $Pr^{\phi}(O, E)$ は，O のスペクトル表示における 1 次元の単位の分解 $\{P^O_E \mid E \in \mathbf{B}(\mathbf{R})\}$ を用いて，

ボルン規則: $$Pr^{\phi}(O,\, E) = \| P^O_E \phi \|^2$$

によって与えられる．

ボルン規則による確率を用いて，$\mathcal{OS}$ に 2 項関係「$\sim$」を次のように定義する．

定義 7. $[O_1, E_1] \sim [O_2, E_2] \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の状態ベクトルϕについて $Pr^{\phi}(O_1, E_1) = Pr^{\phi}(O_2, E_2)$ である．

状態ベクトルは，量子力学において，純粋状態と呼ばれることもある．その物理的意味は，もうそれ以上対象とする系の状態を細かく記述できない，直観的にいうと，系についての最大限の情報がコード化された状態ということである．量子力学による状態記述を完全と考えるとき，そのような最大限の情報がコード化されたいかなる純粋状態によっても区別できない観測命題を同一視する，とこの定義はいっているのである．さて，この 2 項関係は推移性，反射性，対称性を満たすことが容易にわかる．よって，この関係によって $\mathcal{OS}$ は同値類分割される．以下では，そのように同値類分割されたすべての集まりを $\tilde{\mathcal{OS}}(\equiv \mathcal{OS}/\sim)$ と表記し，各同値類を，その同値類に属する観測命題 $[O, E]$ を用いて，$|[O, E]|$ と表記する．

$\tilde{\mathcal{OS}}$ 上に 2 項関係「$\leq$」を次のように定義する．

定義 8. $|[O_1, E_1]| \leq |[O_2, E_2]|$ であるのは，次の 3 つの条件を満たす $O_3 \in \mathcal{O}$ と E_3，$E_3' \in \mathbf{B}(\mathbf{R})$ が存在するとき，そしてそのときに限る．

- $[O_3, E_3] \in |[O_1, E_1]|$
- $[O_3, E_3'] \in |[O_2, E_2]|$
- $E_3 \subseteq E_3'$

ボレル集合の包含関係 $E_3 \subseteq E_3'$ が成立するとき，$[O_3, E_3]$ が真であるならば，必ず $[O_3, E_3']$ も真であると考えてよい，ということである．

$|[O_1, E_1]|$ と $|[O_2, E_2]|$ について上述のように定義した 2 項関係が成立することと，

$$\text{任意の状態ベクトル } \phi \text{ について，} Pr^{\phi}(O_1, E_1) \leq Pr^{\phi}(O_2, E_2) \tag{26}$$

であることとは同値である．ここでは，物理的意味を明確にすることを優先するので前者のように定義したが，数学的には後者を用いて定義しても同等であるし，後者の方が数学的事実を導出するには便利である．実際，後者のように定義すると，そのように定義した 2 項関係において推移性，反射性，反対称性が成立することは直ちに明らかであろう．よって，二つの定義が同等であることから，

- $\tilde{\mathcal{OS}}$ は順序 $\leq$ によって半順序集合である．

今後，順序「$\leq$」というとき，二つの定義を臨機応変に用いることにする．

さらに，この順序関係において $\tilde{\mathcal{OS}}$ に属する任意の 2 元について，それらの最大下界と最小上界が存在することを示すことができる．実際，$|[O_1, E_1]|$ と $|[O_2, E_2]|$ について，射影作用素 $P^{O_1}_{E_1}$ と $P^{O_2}_{E_2}$，それぞれの値域の共通部分（これは $\mathcal{H}$ の閉部分空間）の上への射影作用素 P をとると，$|[P, \{1\}]|$ は，$|[O_1, E_1]|$ と $|[O_2, E_2]|$ の最大下界となっている．最小上界についても，次の事実が成立する．射影作用素 $P^{O_1}_{E_1}$ と $P^{O_2}_{E_2}$ それぞれの値域を $range(P^{O_1}_{E_1})$，$range(P^{O_2}_{E_2})$ と表記する．$range(P^{O_1}_{E_1}) \cup range(P^{O_2}_{E_2})$ に属する有限個のベクトルからなる線形結合すべてからなる集合は $\mathcal{H}$ の部分空間となる．ただし，その部分空間はヒルベルト空間のノルムの位相で完備ではない．そこでその部分空間の閉包をとり（以下では，このように，ヒルベルト空間のある集合から，まずその線形結合すべてからなる部分空間を構成し，その後，閉包をとり得られる閉部分空間のことを，もとの部分集合の「線形包」と呼ぶ），その上への射影作用素 Q をとる[*42]．$|[Q, \{1\}]|$ は，$|[O_1, E_1]|$ と $|[O_2, E_2]|$ の最小上界となっている．よって，$(\tilde{\mathcal{OS}}, \leq)$ は束である．ここで，いま，観測命題のなす構造が射影作用素のなす構造と同型であることを示したいのに，射影作用素を密輸入して最小上界や最大下界を定義するのはいかがなものか，と考えるかもしれない．しかし，それは誤解である．そもそも，最小上界や最大下界を射影作用素を用いて定義したのではない．観測命題の集合上に（物理的に理に適った）順序「$\leq$」をいれたところ，**たまたま**上のような射影についての観測命題が，最小上界や最大下界に対応していただけ

[*42] 「ヒルベルト空間の部分空間と射影作用素は 1 対 1 に対応する」といわれることがあるが，これは有限次元ヒルベルト空間においてのみ正しい．正確には，ヒルベルト空間の閉部分空間とその上への射影作用素が 1 対 1 に対応する．

である．というよりむしろ，だからこそ，射影作用素がなす構造が観測命題のなす構造を表すうえで有用だとわかるのである．

まず，自己共役作用素 O を固定して考えよう．O のスペクトルを $\sigma(O)$ と表記する．O が有限次元ヒルベルト空間上の自己共役作用素であるならば，スペクトルは単に固有値すべてからなる集合である．だが，一般には（次元が無限である場合も含むと）固有値が存在しない自己共役作用素も存在する．スペクトルとは，直観的にいうと，固有値集合の一般化された概念である．さて，スペクトルは $\mathbf{R}$ 上の閉集合であり，ボレル集合である（証明は，例えば，[52] の 90 頁を参照）．固有値集合の一般化ということから予測されるように，任意の状態ベクトル ϕ について，$Pr^{\phi}(O, \sigma(O)) = 1$ である．すると，(26) から，明らかに $|[O, \sigma(O)]|$ は束 $(\tilde{\mathcal{OS}}, \leq)$ の最大元であることがわかる．とりあえず，O を固定して考えたが，もちろん，たとえ $O_1 \neq O_2$ であっても，$|[O_1, \sigma(O_1)]| = |[O_2, \sigma(O_2)]|$ である．

最小元についても容易に想像がつくだろう．任意の状態ベクトル ϕ について，$Pr^{\phi}(O, \emptyset) = 0$ である．すると，やはり (26) から，明らかに $|[O, \emptyset]|$ は束 $(\tilde{\mathcal{OS}}, \leq)$ の最小元であることがわかる．最大元のときと同じく，たとえ $O_1 \neq O_2$ であっても，$|[O_1, \emptyset]| = |[O_2, \emptyset]|$ である．以上より，

- 束 $(\tilde{\mathcal{OS}}, \leq)$ には最大元と最小元が存在する．

次に束 $(\tilde{\mathcal{OS}}, \leq)$ が直可補束であることをみていこう．$\tilde{\mathcal{OS}}$ 上の写像「$\perp$」を次のように定義する．

$$|[O, E]|^{\perp} \equiv |[O, E^c]|$$

（ここで，E^c は E の実数全体の集合 $\mathbf{R}$ にたいする補集合である．）このように定義したとき，定義 3 の三つの条件を満たすことは容易にわかると思う．以上より，

- $(\tilde{\mathcal{OS}}, \leq, \perp)$ は直可補束である．

さて，直可補束 $(\tilde{\mathcal{OS}}, \leq, \perp)$ において，自己共役作用素を固定して考えると観測命題について次の事実が成立する．

事実 4. 任意の自己共役作用素 O，任意のボレル集合 E_1, E_2 について，

1. $|[O, E_1]| \vee |[O, E_2]| = |[O, E_1 \cup E_2]|$
2. $|[O, E_1]| \wedge |[O, E_2]| = |[O, E_1 \cap E_2]|$

Proof. （一つ目の等式の証明のみ与える．）すでにみたように，$range(P^O_{E_1}) \cup range(P^O_{E_2})$

の線形包の上への射影作用素 P について，$|[O,E_1]| \vee |[O,E_2]| = |[P, \{1\}]|$ であった．さらに，この射影について，$P = P^O_{E_1} + P^O_{E_2} - P^O_{E_1} P^O_{E_2} = P^O_{E_1 \cup E_2}$ と変形できるので，$|[O,E_1]| \vee |[O,E_2]| = |[P^O_{E_1 \cup E_2}, \{1\}]|$ である．また，任意の $\phi \in \mathcal{H}$ について，

$$Pr^{\phi}(P^O_{E_1 \cup E_2}, \{1\}) = \| P^O_{E_1 \cup E_2} \phi \|^2 = Pr^{\phi}(O, E_1 \cup E_2)$$

なので，$|[P^O_{E_1 \cup E_2}, \{1\}]| = |[O, E_1 \cup E_2]|$ である．よって，等式 $|[O,E_1]| \vee |[O,E_2]| = |[O, E_1 \cup E_2]|$ が成立する． □

この事実を用いて，直可補束 $(\tilde{\mathcal{OS}}, \leq, \perp)$ がオーソモジュラー束であることをみていこう．それには，事実 3 より，

$$|[O_1,E_1]| \leq |[O_2,E_2]| \quad \Rightarrow \quad |[O_2,E_2]| = |[O_1,E_1]| \vee \big(|[O_1,E_1]|^{\perp} \wedge |[O_1,E_1]|\big)$$

が成立していればよい．$\tilde{\mathcal{OS}}$ 上の順序の定義より，$|[O_1,E_1]| \leq |[O_2,E_2]|$ であるとき，ある $O_3 \in \mathcal{O}$ と $F, G \in \mathbf{B}(\mathbf{R})$ が存在して，(i) $[O_3,\, F] \in |[O_1,\, E_1]|$, (ii) $[O_3,\, G] \in |[O_2,\, E_2]|$, (iii) $F \subseteq G$ を満たす．そこで，O_3 を用いて考えよう．そのとき，

$$|[O_3,G]| = |[O_3,F]| \vee \big(|[O_3,F]|^{\perp} \wedge |[O_3,G]|\big)$$

が成立していればよい．右辺からはじめて，事実 4 を利用して次のように変形すると左辺が導出される．

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= |[O_3,F]| \vee \big(|[O_3,F^c]| \wedge |[O_3,G]|\big) \\ &= |[O_3,F]| \vee |[O_3,F^c \cap G]| \\ &= |[O_3,F \cup (F^c \cap G)]| \\ &= |[O_3,G]| \end{aligned}$$

以上より，

- $(\tilde{\mathcal{OS}}, \leq, \perp)$ はオーソモジュラ束である．

最後に，オーソモジュラー束 $(\tilde{\mathcal{OS}}, \leq, \perp)$ が σ 完備であることをみていこう．それには観測命題（の同値類）からなる任意の可算集合 $\{|[O_n,E_n]|\}$ について，その最小上界が存在することを示せば十分である．なぜなら，直可補束においては，最小上界が存在するならば，ド・モルガンの法則（これは任意の直可補束で成立）を用いて最大下界の存在を示すことができるからである．さて，$\cup_n range(P^{O_n}_{E_n})$ の線形包を $\mathcal{S}$ と表記する．そのとき，$\mathcal{S}$ の上への射影作用素 $P_{\mathcal{S}}$ についての観測命題 $|[P_{\mathcal{S}}, \{1\}]|$ は，$\{|[O_n,E_n]|\} (\subset \tilde{\mathcal{OS}})$ の最小上界となっていることを示すことができる．以上より，

- $(\tilde{\mathcal{OS}}, \leq, \perp)$ は σ 完備なオーソモジュラ束である．

5.3 ヒルベルト空間上の射影作用素がなす束

この節では，まず，よく知られている数学的結果「ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の射影作用素すべてからなる集合 $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ は σ-完備なオーソモジュラー束である」を概観し，その後，それが前節で構成した観測命題束と同型であることをみていく．それによって，射影束を観測命題がなす束とみなす，根拠が与えられる．

まず，$\mathcal{P}(\mathcal{H})$ について，次の四つの事実については，数学者や物理学者のみならず科学哲学者にもひろく知られていることなので，既知としたい．

1. $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ に次のように順序「$\leq_p$」を導入できる．

$$P \leq_p Q \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad range(P) \subseteq range(Q) \qquad P, Q \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$$

2. 順序集合 $(\mathcal{P}(\mathcal{H}), \leq_p)$ には，任意の 2 元 $P, Q \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ について，それらの最大下界 $P \wedge_p Q$，最小上界 $P \vee_p Q$ が存在し，$(\mathcal{P}(\mathcal{H}), \leq_p)$ は束である．実際，
(a) $range(P) \cap range(Q)$ の上への射影作用素が $P \wedge_p Q$,
(b) $range(P) \cup range(Q)$ の線形包の上への射影作用素が $P \vee_p Q$
となる．
3. 束 $(\mathcal{P}(\mathcal{H}), \leq_p)$ には最大元（単位作用素 I）と最小元（0 作用素）が存在する．
4. 最大元 I と最小元 0 をもつ束 $(\mathcal{P}(\mathcal{H}), \leq_p)$ において，$\mathcal{P}(\mathcal{H})$ 上の写像 $\perp_p$ を

$$P^{\perp_p} \equiv I - P$$

と定義すると，この写像によって直可補束 $(\mathcal{P}(\mathcal{H}), \leq_p, \perp_p)$ となる．

以下では，直可補束 $(\mathcal{P}(\mathcal{H}), \leq_p, \perp_p)$ はオーソモジュラー束となること，さらにその束が σ-完備であることを概観しよう．なお，以下では，射影束における順序などの記号の添え字 p を，射影束における記号であることを強調したい場合を除き省略する．

- 直可補束 $(\mathcal{P}(\mathcal{H}), \leq_p, \perp_p)$ はオーソモジュラー束である．
オーソモジュラー束となるには，その定義における条件，
条件 a　任意の射影作用素 $P, Q, R \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ について，$P \leq Q$ かつ $P^{\perp} \leq R$ ならば，$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ である
を満たせばよい．そして，この条件 a は事実 3 でみたように直可補束において，

条件 b　任意の $P, Q \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ について，$P \leq Q$ ならば，$Q = P \vee (P^{\perp} \wedge Q)$ である

と同等である．したがって，条件 b を満たすとオーソモジュラー束となるのだが，この条件を満たすことは直観的には明らかだと思う．なぜなら，$P \leq Q$ のとき，それらの射影作用素は可換 $[P, Q] \equiv PO - QP = 0$ であり，そのように射影 P，Q が可換であるとき，少々先取りしていうと，P と Q を含む最小の直可補部分束はブール束となるからである．

ついでになるが，オーソモジュラー束になるためのもとの条件（条件 a) の意味についても述べておきたい．条件 a の前件を満たす三つの射影 P, Q, R は相互に可換である．その理由は次の通り．$P \leq Q$ かつ $P^{\perp} \leq R$ とする．そのとき，明らかに Q と P，P と R は，それぞれ可換である．ただし，可換関係は推移的ではないので，このことだけから直ちに Q と R が可換とは限らない．しかし，$P \leq Q$ より $Q = P + QP^{\perp}$，さらに，$P^{\perp} \leq R$ より $R = P^{\perp} + RP$ であり，それらを用いると，

$$\begin{aligned} QR &= \left(P + QP^{\perp}\right)\left(P^{\perp} + RP\right) \\ &= PRP + QP^{\perp} + QP^{\perp}RP \\ &= RP + QP^{\perp} \end{aligned}$$

となる．同様に，$RQ = RP + QP^{\perp}$ となり，Q と R は可換である．よって，三つの射影は相互に可換である．条件 a は，そのような射影に限定して分配則を満たすように要請していることになる．

- オーソモジュラー束 $(\mathcal{P}(\mathcal{H}), \leq_p, \perp_p)$ は σ-完備である[*43]．
  射影作用素からなる可算集合 $\{P_n\}$ について，$\cup_n range(P_n)$ の線形包の上への射影作用素は，$\{P_n\}$ の最小上界となることを証明できる．また，$\cap_n range(P_n)$ の上への射影作用素が，$\{P_n\}$ の最大下界となっていることも証明できる．

以上より，ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ を固定するとき，観測命題束 $(\tilde{\mathcal{OS}}, \leq, \perp)$ と射影束 $(\mathcal{P}(\mathcal{H}), \leq_p, \perp_p)$ はともに，σ 完備なオーソモジュラー束である．そのうえ，それらは，これからみるように，次の写像 $r : \tilde{\mathcal{OS}} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ によって σ-同型となる．

$$r(|[O, E]|) \equiv P_E^O$$

それには，この写像が σ-同型写像となるための次の三つの要件を満たせばよい．

[*43] 実際には，射影束は完備束でさえある．

- 写像 r が全単射であること:
  $r(|[O_1, E_1]|) = r(|[O_2, E_2]|)$ であるとする．写像 r の定義より，$P^{O_1}_{E_1} = P^{O_2}_{E_2}$ である．すると，任意の状態ベクトル ϕ について $Pr^{\phi}(O_1, E_1) = Pr^{\phi}(O_1, E_1)$ なので，$|[O_1, E_1]| = |[O_2, E_2]|$．よって，$r$ は単射である．また，任意の $P(\in \mathcal{P}(\mathcal{H}))$ について，観測命題 $|[P, \{1\}]|$ を構成すると，$r(|[P, \{1\}]|) = P$ である．よって，r は全射である．
- $r(|[O, E]|^{\perp}) = P^{O}_{E^c}$:
  観測命題束での直補元の定義より $|[O, E]|^{\perp} = |[O, E^c]|$．すると，$r(|[O, E]|^{\perp}) = r(|[O, E^c]|) = P^{O}_{E^c}$ となる．
- $r(\vee_n |[O_n, E_n]|) = \vee_n P^{O_n}_{E_n}$:
  観測命題束が σ-完備であることを確認したときにみたように，$\vee_n |[O_n, E_n]|$ と，$\cup_n range(P^{O_n}_{E_n})$ の線形包 $\mathcal{S}$ の上への射影作用素 $P_{\mathcal{S}}$ についての観測命題 $|[P_{\mathcal{S}}, \{1\}]|$ との間に等号 $\vee_n |[O_n, E_n]| = |[P_{\mathcal{S}}, \{1\}]|$ が成立した．すると，$r(\vee_n |[O_n, E_n]|) = r(|[P_{\mathcal{S}}, \{1\}]|) = P_{\mathcal{S}}$ となるが，射影束において，$P_{\mathcal{S}} = \vee_n P^{O_n}_{E_n}$ であった．よって，$r(\vee_n |[O_n, E_n]|) = \vee_n P^{O_n}_{E_n}$ となる．

5.4 量子力学〜観測命題束とその上の確率

前節において，射影束を観測命題束と考える根拠を述べた．そこで，以下では，射影束を観測命題束と呼び議論を進める．また，前節でみたように，射影作用素 P^{O}_{E}（自己共役作用素 O の 1 次元の単位の分解において，ボレル集合 E に対応付けられる射影作用素）は観測命題 $|[O, E]|$（「物理量 O を測定しボレル集合 E 内に測定値を得る」）と対応付けられる．

$$P^{O}_{E} \quad \Leftrightarrow \quad |[O, E]|$$

そこで，この対応付けをもって，P^{O}_{E} 自体を観測命題と呼ぶこともある．

本節の目的は，量子力学という理論の標準的理解をできる限り厳密に与えることである．ただし，ここでいう標準的理解とは，コペンハーゲン解釈やボーア＝ハイゼンベルグの解釈のことではない．現在の数理物理学の標準的教科書（例えば，文献 [52]）において量子力学の公理として与えられる理論的内容を，その根拠づけも含めてより精緻に定式化することを目指す．

まず，観測命題束 $(\mathcal{P}(\mathcal{H}), \leq, \perp)$ 上に確率測度を導入しよう．なお，次の定義は，$\mathcal{P}(\mathcal{H})$（ヒルベルト空間上の**すべて**の射影作用素からなる束）だけでなく，後のより一般的な議

論も視野に入れて，ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の射影作用素からなる任意の σ-完備なオーソモジュラー束 $\mathcal{P}$ 上で定義しておく．

定義 9. $\mathcal{P}$ をヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の射影作用素からなる σ-完備なオーソモジュラー束であるとする．$\mathcal{P}$ から $[0,1]$（0 から 1 までの閉区間）への写像 ρ が次の条件を満たすとき，$\mathcal{P}$ 上の**確率測度**という．

1. 単位作用素 I について，$\rho(I) = 1$ である．
2. 相互に直交する射影作用素からなる可算集合 $\{P_n\}$ について，級数 $\sum_n \rho(P_n)$ が収束し，

$$\rho(\vee_n P_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_n \rho(P_n)$$

である．

上で定義したときのように，$\{P_n\}$ が相互に直交した射影作用素の可算集合であるとき，$\{P_n\}$ を含む，最小の σ-完備な直可補部分束は，σ-完備なブール束となる．上で定義した $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ 上の確率測度を，このブール束上に制限すると，古典的な確率測度となる．

もちろん，量子力学的状態が与えられると，それを用いて $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ 上に確率測度を定めることができる．例えば，状態ベクトル ϕ が与えられると，それぞれの射影作用素について，

$$\rho^{\phi}(P) \equiv (\phi,\, P\phi) \qquad P \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$$

と定義すると，これは $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ 上の確率測度となっている．

ただし，あとの議論のことも考え，状態ベクトルによる状態表示ではなく，密度作用素によるより一般的な状態表示を用いたい．密度作用素の数学的定義は，次の通りである．

定義 10. ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の線形作用素 D が次の条件を満たすとき，**密度作用素**という．

1. D は正作用素である（すなわち，任意の $\phi \in \mathcal{H}$ について，$(\phi,\, D\phi) \geq 0$）．
2. $Tr(D) = 1$ である．

条件 2 における $Tr(D)$ は，線形作用素 D の「トレース」と呼ばれる値である．その値は，$\mathcal{H}$ の完全正規直交系 $\{\phi_n\}$ を用いて，

$$Tr(D) \equiv \sum_n (\phi_n, D\phi_n)$$

と定義される．条件 1 より，D は正作用素なので，それぞれの n について，$(\phi_n, D\phi_n)$ の値は非負の実数である．一般には，トレースは収束するとは限らない．条件 2 は，密度作用素はトレースの値が収束し，そのうえ収束先は 1 である，といっているのである．

正作用素は自己共役作用素なので*44，密度作用素は自己共役作用素である．そのうえ，上のように定義された密度作用素は，いつでも，和が 1 へと収束する正の実数の可算集合 $\{e_n\}$（ここで，$e_1 \geq e_2 \geq e_3 \geq \cdots$）と相互に直交する 1 次元射影作用素 $\{P_n\}$ を用いて次の等式 (27) のように表示できる*45．逆に，上述の条件を満たす $\{e_n\}$ と $\{P_n\}$ を用いて下の等式右辺のように書いた作用素は密度作用素となる．

$$D = \sum_n e_n P_n \tag{27}$$

さて，系の状態が密度作用素表示を用いて D であるとき，証明は省略するが，

$$\rho^D(P) \equiv Tr(DP) \qquad P \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$$

と定義すると，これは $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ 上の確率測度となっている．D が単なる 1 次元射影作用素である場合（これもまた，上の定義に照らし合わせると密度作用素である），すなわち，$D = P_\psi$（ここで，右辺はノルム 1 のあるベクトル ψ によって張られる 1 次元部分空間の上への射影作用素）であるとき，任意の観測命題 $|[O, E]|$ について，

$$Tr(DP^O_E) = Tr(P_\psi P^O_E) = (\psi, P^O_E \psi)$$

となるが，最後の式は，ボルン規則によって，測定対象である系が状態ベクトル ψ で表される状態にあるときに観測命題 $|[O, E]|$ に付与される確率に他ならない．要するに，状態ベクトルにより表される状態は，密度作用素による状態表示において 1 次元射影単独で表される密度作用素に対応する．このような状態は純粋状態と呼ばれる．

一方，D が単なる 1 次元射影作用素でない場合には，次のようになる．その場合 $D = \sum_n e_n P_n$ のように和の形式をとるが，P_n は 1 次元射影なので，それぞれの n につき $P_n = P_{\psi_n}$ となるノルム 1 のベクトル ψ_n が存在する．よって，

$$D = \sum_n e_n P_n = \sum_n e_n P_{\psi_n}$$

となる．すると，任意の観測命題 $|[O, E]|$ について，

$$Tr(DP^O_E) = Tr\big((\sum_n e_n P_{\psi_n}) P^O_E\big) = \sum_n e_n (\psi_n, P^O_E \psi_n)$$

---

*44 証明は，例えば [54] の 35 頁の命題 2.1.9 を参照

*45 このことは密度作用素がコンパクト作用素であることから証明できる（文献 [54] の「コンパクト作用素の節を参照）．

となる．最右辺の各項における $(\psi_n, P^O_E\psi_n)$ は，対象とする系の状態が ψ_n のときに観測命題 $|[O, E]|$ が真となる確率であった．上式の最右辺では, それらの各項が, 和が 1 となる正の実数 $\{e_n\}$ の重み付けのもとで加えられている．そこで，密度作用素 $D = \sum_n e_n P_{\psi_n}$ は，次のような部分集団からなる統計集団の状態を表すと考えることができる．各部分集団は n ごとに与えられ，状態ベクトル ψ_n で表される純粋状態にある系からなる．そのような各部分集団をそれぞれ割合 e_n で含む統計集団である．このように，複数の純粋状態それぞれに和が 1 となる重み付けを掛け，それらを加えた状態のことを混合状態という．

すでに述べたように，密度作用素 D により $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ 上に確率測度 $Tr(DP)$ が導入される．ところで，その逆は成立するだろうか．すなわち，$\mathcal{P}(\mathcal{H})$ 上の任意の確率測度 ρ には,

$$\rho(P) = Tr(DP)$$

を満たす密度作用素が存在するのだろうか．もし存在しないならば，量子力学による状態表示は不完全ということになるだろう．この問いにたいし，グリーソン [19] は次の定理を証明した．

定理 2．グリーソンの定理
$\mathcal{P}(\mathcal{H})$ 上の任意の確率測度 ρ にたいし，ある密度作用素 D が存在し，任意の射影作用素 $P \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ について，

$$\rho(P) = Tr(DP)$$

が成立する．

したがって，量子力学において密度作用素を用いて導入される確率測度は，$\mathcal{P}(\mathcal{H})$ 上のすべての確率測度を尽くしている．

物理量（自己共役作用素）O を固定し，その 1 次元の単位の分解に現れるすべての射影作用素の集合，すなわち $\mathcal{B}(O) \equiv \{P^O_E : E \in \mathbf{B}(\mathbf{R})\}$ は，$\mathcal{P}(\mathcal{H})$ における演算「$\wedge$ 」,「$\vee$ 」,「$\perp$」をそのまま用いて，σ-完備ブール束となる．実際，次の諸事項が成立する．
(a) $P^O_{E_1} \vee P^O_{E_2} = P^O_{E_1 \cup E_2} \quad \in \mathcal{B}(O)$.
(b) $P^O_{E_1} \wedge P^O_{E_2} = P^O_{E_1 \cap E_2} \quad \in \mathcal{B}(O)$.
(c) $(P^O_E)^\perp = I - P^O_E = P^O_{\sigma(O)} - P^O_E = P^O_{E^c} \quad \in \mathcal{B}(O)$.
(d) σ-完備性：可算集合 $\{P^O_{E_n}\}$ について，$\vee_n P^O_{E_n} = P^O_{\cup_n E_n} \quad \in \mathcal{B}(O)$.
σ-完備性についてのみ，みておこう．$\{E_n\}$ は相互に排他的である（すなわち，$l \neq m$ であるとき $E_l \cap E_m = \emptyset$）とは限らないが, $F_1 \equiv E_1$, $F_2 \equiv E_2 - F_1$, $F_3 \equiv E_3 - (F_1 \cup F_2)$, $\cdots$ のように定義すると，相互に排他的な集合 $\{F_n\}$ を定義でき，そのうえ $\vee_n P^O_{E_n} = \vee_n P^O_{F_n}$

および $P^O_{\cup_n E_n} = P^O_{\cup_n F_n}$ となる．そこで，$\{E_n\}$ が相互に排他的である場合のみを考えれば十分である．さて，一般に，相互に直交する射影の可算集合 $\{A_n\}$ において，

$$\vee_n A_n = \text{s-}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} A_n$$

となる（証明は，例えば [38] の p. 57 の Proposition 4.15 を参照）．$\{E_n\}$ が相互に排他的であるとき，「1 次元の単位の分解」の定義より $\{P^O_{E_n}\}$ は相互に直交する．すると，

$$\vee_n P^O_{E_n} = \text{s-}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} P^O_{E_n}$$

となる．一方，上式の右辺は, やはり,「1 次元の単位の分解」の定義より，

$$\text{s-}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} P^O_{E_n} = P^O_{\cup_n E_n}$$

である．よって，$\vee_n P^O_{E_n} = P^O_{\cup_n E_n}$ となる．

さて，すでに述べたように，対象とする系の密度作用素が D であるとき，$\mathcal{P}(\mathcal{H})$ 上に確率測度 $\rho^D \equiv Tr(DP)$ が与えられるのだった．この確率測度の定義域を，自己共役作用素 O の σ-完備ブール束 $\mathcal{B}(O)$ に制限すると（制限したものを $\rho^D_{[\mathcal{B}(O)]}$ と表記する），これは $\mathcal{B}(O)$ 上の古典的な確率測度となる．そこで，$\big(\mathcal{B}(O),\, \rho^D_{[\mathcal{B}(O)]}\big)$ は古典確率空間となる．

とりわけ，こらからみるように，次の事実が成立する．$\{E_n\}$ は，$E = \cup_n E_n$ なる，相互に排他的な可算個のボレル集合であるとする．密度作用素 D の状態にある系にたいし O を測定したときに，観測命題 $|[O, E]|$ が真となる確率 $Pr^D(O, E) = \rho^D_{[\mathcal{B}(O)]}(P^O_E)$ と，それぞれの n について，観測命題 $|[O, E_n]|$ が真となる確率 $Pr^D(O, E_n) = \rho^D_{[\mathcal{B}(O)]}(P^O_{E_n})$ との間に，可算加法性

$$Pr^D(O, E) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} Pr^D(O, E_n)$$

が成立する．

まず，1 次元の単位の分解の定義における条件 2 より，$P^O_E = s - \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} P^O_{E_n}$ である．以下，わかりやすさのために，D が純粋状態である場合と，混合状態である場合に分けて考えよう．混合状態である場合は，純粋状態である場合の線形結合になっていることに注意してみてほしい．

- 純粋状態である場合（$D = P_\psi$）
  そのとき，

$$\begin{aligned}
Pr^D(O,\, E) &= (\psi,\, P^O_E \psi) \\
&= (\psi,\, \big(\text{s-}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} P^O_{E_n}\big)\psi) \\
&= (\psi,\, \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\big(P^O_{E_n}\psi\big)) \\
&= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}(\psi,\, P^O_{E_n}\psi)) \\
&= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} Pr^D(O,\, E_n)
\end{aligned}$$

- D が混合状態である場合（$D = \sum_m e_m P_{\psi_m}$）

$$\begin{aligned}
Pr^D(O,\, E) &= Tr(DP^O_E) \\
&= \sum_m e_m(\psi_m,\, P^O_E \psi_m) \\
&= \sum_m e_m(\psi_m,\, \big(\text{s-}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} P^O_{E_n}\big)\psi_m) \\
&= \sum_m e_m(\psi_m,\, \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\big(P^O_{E_n}\psi_m\big)) \\
&= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\sum_m e_m(\psi_m,\, P^O_{E_n}\psi_m)) \\
&= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} Tr(DP^O_{E_n})
\end{aligned}$$

したがって，$\mathcal{P}(\mathcal{H})$ 上の確率測度を $\mathcal{B}(O)$ に制限して考えると，ボレル集合族において可算加法性を満たすことがわかる．

さきに，系の状態が状態ベクトルで表される場合におけるボルンの確率規則を述べた．密度作用素表示において，その規則は次のようになる．

ボルンの確率規則: 「物理量 O を測定したとき，ボレル集合 E 内に測定値を得る」確率は $Tr(DP^O_E)$ である．

ここで，「物理量 O を測定したとき」ということによって，$\mathcal{P}(\mathcal{H})$ からブール的枠組み $\mathcal{B}(O)$ が選び出され，そのうえに古典的な確率測度が量子論的状態によって与えられることになる．

5.5 グリーソンの定理の帰結

4 章においてみたように，コッヘンとシュペッカーはすべての物理量（自己共役作用素）にたいし，スペクトル規則と $FUNC$ を満たすように確定した値を付与できないことを示した．前節で紹介したグリーソンの定理を用いると，同じ結論をより一般的に与えることができる．次章では，代数的場の量子論を視野に入れ，単なるヒルベルト空間上のすべての自己共役作用素からなる集合だけでなく，より一般にフォン・ノイマン代数上で議論を進める．グリーソンの定理はフォン・ノイマン代数にも一般化されており，汎用性が高い．そこで，本節では，その準備として，まず，$\mathcal{P}(\mathcal{H})$ においてグリーソンの定理を利用して確定値付与の不可能性を示す議論を紹介したい．その議論を理解することで，後で行うより抽象度の高い議論が理解しやすくなると思う．

ただし，これまで本章ではヒルベルト空間の次元が無限の場合も含み一般的に議論してきたのだが，本節では有限次元に限定したい．その理由は，次元が無限の場合，連続スペクトルをもつ自己共役作用素 X（例えば，位置や運動量を表す作用素）とその「1 次元の単位の分解」$\mathcal{B}(X) = \{P_E^X : E \in \mathbf{B}(\mathbf{R})\}$ をも議論の対象としなければならない．すでにみたように，$\mathcal{B}(X)$ は σ-完備ブール束ではある．しかし，$\mathcal{B}(X)$ には σ-完備な極大フィルターが存在しない（証明については，文献 [53] の付録 1 を参照）．すると，真理値付与と極大フィルターは 1 対 1 に対応するので，σ-加法的真理値付与（$\mathcal{B}(X)$ から $\{0,1\}$ への写像 ν で，(i) 単位作用素 I について，$\nu(I) = 1$，および (ii)$\mathcal{B}(X)$ に属する相互に直交する可算個の射影 $\{P_n\}$ について，$\nu(\vee_n P_n) = \sum_n \nu(P_n)$，を満たすもの）は存在しないことになる．この問題自体は大変重要だが，それについては別の機会に考察したい．いまは，この問題による技術的困難を避け，説明をわかりやすくするために，議論が有限次元である場合に限定する．

これから，グリーソンの定理を用いて，すべての物理量にたいする確定した値の付与が不可能であることをみていく．まず，次の写像，$\mathcal{P}(\mathcal{H})$ 上の有限加法的真理値付与を定義しよう．

定義 11. 次の条件を満たす，$\mathcal{P}(\mathcal{H})$ から $\{0,1\}$ への写像 μ を**有限加法的真理値付与**という．

1. 単位作用素 I について，$\mu(I) = 1$ である．

2. 直交する任意の射影 $P, Q \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ について，$\mu(P+Q) = \mu(P) + \mu(Q)$ である．

さて，「すべての物理量（自己共役作用素）にたいし，スペクトル規則と $FUNC$ を満たすように確定した値を付与できる」としよう（背理法の仮定）．そのとき，すべての自己共役作用素に値が付与されるのだが，なかでも射影作用素への付値 $[P]$ $P \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ だけに注目しよう．その付値はスペクトル規則を満たすので，$[P]$ の値は 0 か 1 である．また，付値は和の規則も満たすので，直交する射影 P, Q について，$[P+Q] = [P] + [Q]$ である．すると，すべての射影作用素から $\{0, 1\}$ への写像 μ を，

$$\mu(P) \equiv [P] \quad\quad P \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$$

のように定義すると，μ は $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ 上の有限加法的真理値付与となる．

議論が少々脇道にそれるが，次のことに注目してほしい．いまみたのは，スペクトル規則と $FUNC$ を満たす，すべての自己共役作用素への値の付与を射影作用素だけに制限すると，$\mathcal{P}(\mathcal{H})$ 上の有限加法的真理値付与となる，ということであった．一方，証明は省略するが，$\mathcal{P}(\mathcal{H})$ 上の有限加法的真理値付与が与えられると，それをもとにして，すべての自己共役作用素に，スペクトル規則と $FUNC$ を満たすように値を付与できる．したがって，スペクトル規則と $FUNC$ を満たす，自己共役作用素への値の付与と，$\mathcal{P}(\mathcal{H})$ 上の有限加法的真理値付与は，1 対 1 に対応する．次節以降，フォン・ノイマン代数上で議論を進めるが，そこでは，フォン・ノイマン代数に属する射影作用素にたいする有限加法的真理値付与を考える．その背景には，いま述べた 1 対 1 対応がある．

議論をもとにもどそう．さて，$\mathcal{P}(\mathcal{H})$ 上の有限加法的真理値付与は，前節での定義 9 に照らし合わせるとわかるように，$\mathcal{P}(\mathcal{H})$ 上の確率測度となる．すると，グリーソンの定理により，ある密度作用素 D が存在し，任意の射影作用素 P について $\mu(P) = Tr(DP)$ を満たさねばならない．$\mu(P)$ の値は常に 0 か 1 であったが，これからみるように，任意の射影作用素に 0 か 1 のみを $Tr(DP)$ により付与する密度作用素など存在しないのである．

密度作用素が 0 と 1 以外の固有値をもつ場合　0 と 1 以外の固有値 d の固有空間の上への射影作用素 P_d^D について $Tr(DP_d^D) = d \neq 0, 1$ となる．一方，任意の射影作用素にたいし μ が付与する値は 0 か 1 であった．よって，それらの値は等しくない．

密度作用素が 0 と 1 以外の固有値をもたない場合　固有値 0 の固有空間にも固有値 1 の固有空間にも属さないベクトルを一つとり，そのベクトルを含む 1 次元部分空間の上への射影作用素 Q を考えよう．$Tr(DQ)$ の値は 0 より大きく 1 より小さい．一方，任意の射影作用素にたいし μ が付与する値は 0 か 1 であった．よって，それら

の値は等しくない.

かくして矛盾が生じ，背理法を用いて，すべての物理量（自己共役作用素）に確定した値を付与できない，というコッヘン＝シュペッカーの NO-GO 定理と同じ結論が得られるのである.

6　フォン・ノイマン代数における確定値付与の不可能性と測定文脈依存性

コッヘンとシュペッカーは，量子力学においてすべての物理量に確定値を付与できないことを証明した．前章でみたように，同じ結論は，グリーソンの定理の帰結としても導かれる．この不可能性を回避すべく文脈依存型の確定値付与という方法が提案されたが，ヘイウッドとレッドヘッドが示したように，その考え方には非局所性という新たな困難が生じる．

以上は 4 章における議論の要約だが，そこでの議論には次の二つの点で不満が残る．第一に，議論が有限次元ヒルベルト空間に限定されていること，第二に，議論が非相対論的量子力学に限定されていることである．有限次元の議論はわかりやすく，議論の本質を明らかにするにはよい．しかし，最終的には量子論は次元が無限のヒルベルト空間上のベクトルと自己共役作用素を数学的道具とする理論である．また，本論文の主題である非局所性の問題は，多くの場合，非相対論的な数学的設定で議論されるのだが，本来は，相対論的設定において議論されるべきものであろう．そこで，本章の議論では上述の二つの制限を撤廃し，より一般的に，文脈依存型の確定値付与という考え方に非局所性の問題が生じることを数学的に示す．

6.1　フォン・ノイマン代数とその射影作用素からなる束

前章において，ヒルベルト空間上の自己共役作用素と射影作用素についての諸事実を，本論考で必要とされる限りで述べた．これは，非相対論的量子力学における数学的道具立てである．そこでは，系にヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ が対応づけられ，測定可能量（物理量）は $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素によって表される．一方，相対論的場の量子論（代数的場の量子論）においては，ミンコフスキー時空上の各有界領域に，フォン・ノイマン代数という，ヒルベルト空間上の有界作用素からなるある代数構造が対応づけられ，その領域上で測定可能な物理量はそのフォン・ノイマン代数に属する自己共役作用素によって表される．そこで，本節では，フォン・ノイマン代数とそれに属する射影作用素に関する諸定義と事実を概観する．

以下では，ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界作用素[*46] すべてからなる集合を $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ と表記す

[*46] $\mathcal{H}$ 上の線形作用素 A が，ノルムが 1 である任意のベクトル $\phi \in \mathcal{H}$ について $\| A\phi \|$ が上に有界である

る．また，以下で $*$ 写像というとき，それは，$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ に属する A をその共役作用素 A^* へと写す $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上の写像のことである[*47].

定義 12. $\mathcal{R}$ は，$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の部分代数（作用素どうしの加法と乗法，そして作用素のスカラー倍について閉じている）であり，そのうえ $*$ 写像について閉じているとする．さらに，次の条件を満たす $\mathcal{R}$ を**フォン・ノイマン代数**という[*48].

1. 単位元 I は $\mathcal{R}$ に属する．
2. $\{X_\alpha\}(\subset \mathcal{R})$ が $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ へと強収束するならば（すなわち，任意の $\phi \in \mathcal{H}$ について $\| X\phi - X_\alpha\phi \| \to 0$ が成立するならば），$X \in \mathcal{R}$.

フォン・ノイマン代数 $\mathcal{R}$ で，任意の二つの要素 $X, Y \in \mathcal{R}$ について $XY = YX$ となるものを**可換フォン・ノイマン代数**という．

本章冒頭で，ヒルベルト空間の次元が有限という制限をなくして議論を一般的に進めると述べた．定義から明らかに，$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ は $\mathcal{H}$ の次元に関わらずフォン・ノイマン代数となる．それゆえ，フォン・ノイマン代数を用いてこれからなされる議論では，ヒルベルト空間の次元が有限であるという制限は課されていない．

定義 13. $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の部分集合 $\mathcal{S}$ にたいし，集合 $\mathcal{S}'$ を次のように定義する．

$$\mathcal{S}' \equiv \{X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \forall_{Y \in \mathcal{S}}(XY = YX)\}$$

$\mathcal{S}'$ を $\mathcal{S}$ の**交換子**という．また，$\mathcal{S}$ の**二重交換子**を $\mathcal{S}''$ と表記するが，これは $\mathcal{S}'$ の交換子のことである．

フォン・ノイマン代数について次の事実が成立する．

事実 5. $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の部分集合 $\mathcal{S}$ が $*$-写像について閉じているならば，$\mathcal{S}'$ はフォン・ノイマン代数となる．すると，$\mathcal{S}'$ も $*$-写像について閉じているので，$\mathcal{S}'' \equiv (\mathcal{S}')'$ もフォン・ノイマン代数である．とりわけ，$\mathcal{S}''$ は $\mathcal{S}$ を含む最小のフォン・ノイマン代数となる．

とき，有界作用素という．

[*47] 任意の $\phi, \psi \in \mathcal{H}$ について等式 $(\phi, A\psi) = (B\phi, \psi)$ が成立する $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ を，A の共役作用素という．

[*48] すでに述べたように，代数的場の量子論では，各時空領域にフォン・ノイマン代数を対応づけ，物理量（自己共役作用素）はその代数に含まれるのだった．すると，本文の定義のようにフォン・ノイマン代数を有界作用素の部分代数として定めると，非有界作用素が自動的に排除されることになる．だが，非有界作用素によって表される物理量も存在する．このことに不安を感じるかもしれない．フォン・ノイマン代数における非有界作用素の扱いについては，文献 [29] の 5.6 節を参照してほしい．

X が有界な自己共役作用素であるとき，単元集合 $\{X\}$ は $*$ 写像について閉じているので，事実 5 より $\{X\}''$ は X を要素とする最小のフォン・ノイマン代数となる．そのうえ，これから示すように，$\{X\}''$ は可換フォン・ノイマン代数である．

任意の $A,\, B \in \{X\}''$ について，$[A, B] = 0$ となることを示せばよい．$A \in \{X\}''$ より，

$$[X, Y] = 0 \text{ となる任意の } Y \text{ について}, [A, Y] = 0 \tag{a}$$

である．同様に，$B \in \{X\}''$ より，

$$[X, Y] = 0 \text{ となる任意の } Y \text{ について}, [B, Y] = 0 \tag{b}$$

である．さて，$[X, X] = 0$ なので，(a) より $[A, X] = 0$ である．すると，(b) より $[A, B] = 0$ である．

$\{X\}''$ のことを X が生成するフォン・ノイマン代数と呼ぼう．この代数には，いかなる自己共役作用素が含まれるのだろうか．その答えを述べるには，「自己共役作用素の関数」という概念が必要である[*49]．5 章で説明した X のスペクトル表示

$$X = \int_{\mathbf{R}} \mu \; dP^X(\mu)$$

を思い出してほしい．このスペクトル表示と，$\mathbf{R}$ 上の実数値有界ボレル可測関数 f [*50]を用いて，X の関数 $f(X)$ は

$$f(X) \equiv \int_{\mathbf{R}} f(\mu) \; dP^X(\mu)$$

のように定義される．このように定義された，$f(X)$ は有界自己共役作用素となる．

X のボレル関数 $f(X)$ を用いて，X が生成する可換フォン・ノイマン代数 $\{X\}''$ にいかなる自己共役作用素が含まれるのか，についての事実を述べよう．

事実 6. 任意の実数値有界ボレル可測関数 f について，$f(X)$ は $\{X\}''$ に属する自己共役作用素である．また，$\{X\}''$ に属する任意の自己共役作用素 Y には，$Y = f(X)$ となる実数値有界ボレル可測関数 f が存在する[*51]．

[*49] 有限次元のヒルベルト空間における作用素の関数については，4 章で $FUNC$ を導入した際に説明済みである．これから述べるのは，次元が無限である場合，しかも連続スペクトルをもつ自己共役作用素にも通用する，一般的な説明である．

[*50] 実数値有界ボレル可測関数 f とは，実数値数直線上の任意の開集合の，f による逆像が，ボレル集合となる有界実数値関数のことである．

[*51] 二つ目の文で述べた事実の証明については，文献 [29] の p. 322 の Theorem 5.2.9 を参照してほしい．

X と可換であっても，$\{X\}''$ に含まれない自己共役作用素が存在することに注意してほしい．直観的にいうと，$\{X\}''$ に含まれる自己共役作用素は，X を測定すると，その測定値に関数 f を適用することでその値を知ることができる自己共役作用素である．

また，事実 6 から，次のようにして X の 1 次元の単位の分解 $\{P_E^X : E \in \mathbf{B}(\mathbf{R})\}$ が $\{X\}''$ に含まれること，さらには説明を省くが，$\{X\}''$ に属する射影作用素は X の 1 次元の単位の分解に現れる射影のみであることがわかる．任意のボレル集合 E について，実数 $\mathbf{R}$ 上の特性関数を

$$\chi_E(\mu) \equiv \begin{cases} 1 & \mu \in E \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

のように定義すると，これは実数値有界ボレル可測関数なので $\chi_E(X)$ は $\{X\}''$ に属する．さて，任意の $\phi, \psi \in \mathcal{H}$ について，

$$(\phi, \chi_E(X)\psi) = \int_{\mathbf{R}} \chi_E(\mu)\ d(\phi, P^X(\mu)\psi) = (\phi, P^X(E)\psi)$$

となる．上の等式が任意の $\phi, \psi \in \mathcal{H}$ について成立するので，作用素として $\chi_E(X)$ と $P^X(E)$ は同じであり，$\chi_E(X) = P^X(E)$ である．

さて，すでにみたように，任意の有界自己共役作用素 X について $\{X\}''$ は可換フォン・ノイマン代数となる．一方，次の事実も成立する．

事実 7. 任意の可換フォン・ノイマン代数 $\mathcal{R}$ には，$\mathcal{R} = \{X\}''$ を満たす有界自己共役作用素 X が存在する．

任意の可換フォン・ノイマン代数には，それを生成する自己共役作用素が存在し，その作用素について事実 6 で述べたことが成立する．

5 章でみたように，ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上のすべての射影作用素からなる集合 $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ は σ-完備オーソモジュラー束となり，そのうえ，任意の自己共役作用素 X について，$\mathcal{B}(X) \equiv \{P_E^X : E \in \mathbf{B}(\mathbf{R})\}$ は σ-完備ブール束となるのであった．フォン・ノイマン代数においても次の事実が成立する．

事実 8. フォン・ノイマン代数 $\mathcal{R}$ に属する射影作用素すべてからなる集合を $\mathcal{P}(\mathcal{R})$ と表記する．$\mathcal{P}(\mathcal{R})$ は σ-完備オーソモジュラー束となる．もし $\mathcal{R}$ が可換ならば $\mathcal{P}(\mathcal{R})$ は σ-完備ブール束となる*52．

*52 実際は，σ-完備どころか，完備となる（証明については文献 [38] の p. 82 を参照）．

フォン・ノイマン代数 $\mathcal{R}$ が可換であるとき，事実 7 より，それを生成する自己共役作用素 X が存在するのだった．すなわち，$\mathcal{R} = \{X\}''$ である．事実 8 より，$\mathcal{P}(\{X\}'')$ は σ-完備ブール束となる．そのうえ，

$$\mathcal{P}(\{X\}'') = \{P_E^X : E \in \mathbf{B}(\mathbf{R})\}$$

が成立する．

量子力学について論じる際，状態概念は二つの異なる意味で使用されているようだ．一つは，「重ね合わせの状態」というときのように，それによって対象の物理的状態を表す．これはおそらく，古典力学における状態概念の名残であろう．もう一つは，単に，測定結果に確率を付与する確率測度としての状態概念である．フォン・ノイマン代数自体は数学理論ということもあり，後者の定義を用いる．

定義 14. フォン・ノイマン代数 $\mathcal{R}$ 上の線形汎関数 ρ *53で，次の条件を満たすものを**状態**という．

1. 任意の $X \in \mathcal{R}$ について，$\rho(X^*X) \geq 0$ である．
2. 単位作用素 $I \in \mathcal{R}$ について，$\rho(I) = 1$ である．

とりわけ，$\mathcal{R}$ 上の状態 ρ で，任意の $X \in \mathcal{R}$ について $\rho(X) = Tr(DX)$ を満たす密度作用素 D が存在するものを**正規状態**という．

6.2 文脈依存型の確定値付与

6.2.1 一般化されたグリーソンの定理とその帰結

ヒルベルト空間上の射影作用素 $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ についてのグリーソンの定理は，フォン・ノイマン代数に属する射影作用素 $\mathcal{P}(\mathcal{R})$ へと一般化された（文献 [22] の Chapter 5 を参照）．代数的場の量子論では，ミンコフスキー空間 $\mathbf{R}^4 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$ におけるそれぞれの有界開集合 O にフォン・ノイマン代数 $\mathcal{R}(O)$ が結び付けられる．その領域上で測定可能な量がなすフォン・ノイマン代数である．一般化されたグリーソンの定理は，そのようなフォン・ノイマン代数に属する射影すべての集合 $\mathcal{P}(\mathcal{R}(O))$ にたいしても適用可能である．

5 章で $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ 上の有限加法的真理値付与を定義した．その概念を，改めて，$\mathcal{P}(\mathcal{R})$ 上で定義しよう．

*53 ここで，$\mathcal{R}$ 上の線形汎関数 ρ とは，$\mathcal{R}$ から係数体（複素数）$\mathbf{C}$ への関数 ρ で，(i) 任意の $A, B \in \mathcal{R}$ について $\rho(A+B) = \rho(A) + \rho(B)$ と (ii) 任意の $A \in \mathcal{R}$ および任意の $\alpha \in \mathbf{C}$ について，$\rho(\alpha A) = \alpha\rho(A)$ を満たすものである．

定義 15. 次の条件を満たす，$\mathcal{P}(\mathcal{R})$ から $\{0,1\}$ への写像 μ を**有限加法的真理値付与**という．

1. 単位作用素 I について，$\mu(I)=1$ である．
2. 直交する任意の射影 $P,Q\in\mathcal{P}(\mathcal{R})$ について，$\mu(P+Q)=\mu(P)+\mu(Q)$ である．

さて，北島 [30] は，一般化されたグリーソンの定理と代数的場の量子論におけるある数学的事実（文献 [4] の Corollary 1.11.6）を用いて次の命題を示した（文献 [30] の定理 5.2 とその次の段落を参照）．

命題 6. ミンコフスキー空間 $\mathbf{R}^4=\mathbf{R}\times\mathbf{R}^3$ における任意の有界開集合 O について，$\mathcal{P}(\mathcal{R}(O))$ 上の有限加法的真理値付与は存在しない．

有限次元ヒルベルト空間において，スペクトル規則と $FUNC$ を満たす自己共役作用素への値の付与は，$\mathcal{P}(\mathcal{H})$ 上の有限加法的真理値付与と，1 対 1 に対応するのだった．命題 6 は，有界時空領域上で測定可能な物理量がなすフォン・ノイマン代数において，すべての物理量に確定した値を付与できないことを意味すると解釈できる．

6.2.2　$\mathcal{P}(\mathcal{R})$ の文脈依存型ブール表現

4 章で文脈依存型の確定値付与という考え方を説明した．本小節では，この考え方を，数学的に厳密に定式化する．

文脈依存型の確定値付与という考え方には，二つのバージョンがあった．一つはファン・フラーセンによるもので，物理量は文脈ごとに真なる物理量へと分裂するのであった．もう一つはベルによるもので，物理量は分裂こそしないが，文脈ごとに異なる値をもつのであった．これから行う数学的定式化はどちらのバージョンを表現したものとしても解釈できる．

定義 16. $\mathcal{R}$ をフォン・ノイマン代数とする．$\mathcal{R}$ の可換部分フォン・ノイマン代数からなるある族を $\mathcal{R}$ の**文脈集合**と呼び，その要素を**文脈**と呼ぶ．

4 章の議論では，文脈を自己共役作用素によって表した．一方，ここでは文脈を可換フォン・ノイマン代数で表している．だが，事実 5 の直後で述べたように，自己共役作用素 X は可換フォン・ノイマン代数 $\{X\}''$ を生成し，そのうえ，事実 7 で述べたように，可換フォン・ノイマン代数にはそれを生成する自己共役作用素が存在するのだった．よって，本質的な違いはない．また，現時点では，$\mathcal{R}$ の文脈集合としていかなる可換部分フォン・ノイマン代数をとるのかについては，なにも言及していないことに注意してほしい．

定義 17. $\mathcal{F}$ はフォン・ノイマン代数 $\mathcal{R}$ の文脈集合であるとする．次の条件を満たす $(\mathcal{B}, \{r_\mathcal{V}\}_{\mathcal{V}\in\mathcal{F}})$ を，$\cup_{\mathcal{V}\in\mathcal{F}}\mathcal{P}(\mathcal{V})$ **の文脈集合** $\mathcal{F}$ **の下でのブール表現**と呼ぶ．

1. $\mathcal{B}$ は σ-完備なブール束である．
2. それぞれの $\mathcal{V} \in \mathcal{F}$ について，写像 $r_\mathcal{V} : \mathcal{P}(\mathcal{V}) \to \mathcal{B}$ は単射である σ-準同型写像である．
3. $\mathcal{F}$ に属する任意のフォン・ノイマン代数 $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ について，$\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$ ならば $r_\mathcal{V} = r_\mathcal{W} \circ h_{\mathcal{V}\mathcal{W}}$ である（ただし，ここで写像 $h_{\mathcal{V}\mathcal{W}} : \mathcal{P}(\mathcal{V}) \to \mathcal{P}(\mathcal{W})$ は，それぞれの $P \in \mathcal{P}(\mathcal{V})$ について $h_{\mathcal{V}\mathcal{W}}(P) \equiv P$ と定義される包含写像である）．
4. $\cup_{\mathcal{V}\in\mathcal{F}}\, r_\mathcal{V}(\mathcal{P}(\mathcal{V}))$ は $\mathcal{B}$ を σ- 生成する[*54]．

X と Y は文脈 $\mathcal{V}$ に属する自己共役作用素であり，そのうえ X は Y の関数である（すなわち，あるボレル関数 f が存在し $X = f(Y)$ である）とする．さて，よく知られているように X と Y のスペクトル射影について次のことが成立する．任意のボレル集合 $E \in \mathbf{B}(\mathbf{R})$ について，

$$P_E^X = P_{f^{-1}(E)}^Y$$

である．すると，明らかに $r_\mathcal{V}(P_E^X) = r_\mathcal{V}(P_{f^{-1}(E)}^Y)$ となる．このことは，各文脈において *FUNC* が成立することを意味する．これは 4 章で述べた「文脈内の *FUNC*」に該当する．

上述の条件 3 で仮定したように，二つの文脈間に包含関係 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$ があるとする．引き続き自己共役作用素 X と Y は関数的関係 $X = f(Y)$ にあるのだが，今回は X は $\mathcal{V}$ に，Y は $\mathcal{W}$ に属するとする（もちろん，文脈間の包含関係から $X \in \mathcal{W}$ でもある）．さて，3 番目の条件が成立すると，任意のボレル集合 $E \in \mathbf{B}(\mathbf{R})$ について，

$$r_\mathcal{V}(P_E^X) = r_\mathcal{W}(P_E^X) = r_\mathcal{W}(P_{f^{-1}(E)}^Y)$$

でなければならない．この条件によって，ブール表現から，自明で興味のもてないモデルが排除される．例えば，フォン・ノイマン代数 $\mathcal{R}$ に属するすべての自己共役作用素 X それぞれについて，X 自身を含む最小の可換部分フォン・ノイマン代数 $\{X\}''$ を考えよう．証明は省くが，そのように構成された可換部分代数すべてからなる集合を文脈集合とする，条件 3 以外のすべての条件をみたすモデルは存在する．そのような数学的には自明であるものの面白みに欠けるモデルは，3 番目の条件によって排除される．

[*54] $\mathcal{B}$ は $\cup_{\mathcal{V}\in\mathcal{F}}\, r_\mathcal{V}(\mathcal{P}(\mathcal{V}))$ を含む最小の σ-完備なブール束であるということ．

モンチンスキー（ [32] の Theorem 4.4）は，ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上のすべての射影作用素からなる集合 $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ は極大オブザーバブルすべてからなる集合を文脈集合としてその下でブール表現可能であることを証明した[*55]．さて，モンチンスキーと同じ方法で，次の命題を示すことができる．

命題 7. （モンチンスキーの定理と証明に基づく容易な一般化）
$\mathcal{F}$ は，フォン・ノイマン代数 $\mathcal{R}$ の極大可換フォン・ノイマン部分代数すべてからなる族であるとする．そのとき，$\cup_{\mathcal{V}\in\mathcal{F}}\mathcal{P}(\mathcal{V})$ の文脈集合 $\mathcal{F}$ の下でのブール表現が存在する．

証明の概略をみる前に，それに必要な概念，ブール束の自由 σ-積 (free σ-product) を導入しよう．$\{\mathcal{B}_t\}_{t\in T}$ は σ-完備なブール束からなる族であるとする．次の条件を満たすとき，$(\mathcal{B}, \{f_t\}_{t\in T})$ を $\{\mathcal{B}_t\}_{t\in T}$ の自由 σ-積 (free σ-product) という（以下の定義は文献 [15] の p. 318 による．)．

1. $\mathcal{B}$ は σ-完備なブール束である．
2. それぞれの $t\in T$ について，写像 $f_t : \mathcal{B}_t \to \mathcal{B}$ は，単射である σ-準同型写像である．
3. 任意の $(\mathcal{C}, \{g_t\}_{t\in T})$ （ここで，$\mathcal{C}$ は σ-完備なブール束，$g_t : \mathcal{B}_t \to \mathcal{C}$ は σ-準同型写像）について，各 $t\in T$ について $g_t = g\circ f_t$ となる σ-準同型写像 $g : \mathcal{B}\to\mathcal{C}$ が一意存在する．

σ-完備なブール束からなる任意の族について，その自由 σ-積は同型なものを除くと一意存在することが知られている（証明については文献 [42] の Section 38 を参照)．

さて，命題 7 は次のようにして示すことができる．そこで仮定しているように，文脈集合 $\mathcal{F}$ は，フォン・ノイマン代数 $\mathcal{R}$ の極大可換フォン・ノイマン部分代数すべてからなる族であるとする．前段落の議論より，σ-完備なブール束の族 $\{\mathcal{P}(\mathcal{V})\}_{\mathcal{V}\in\mathcal{F}}$ の自由 σ-積が存在する．実は，その自由 σ-積自体が，$\cup_{\mathcal{V}\in\mathcal{F}}\mathcal{P}(\mathcal{V})$ の文脈集合 $\mathcal{F}$ の下でのブール表現となっている．まず，ブール表現の四つの条件のなかで，条件 1 と 2 を満たすことは自明である．条件 3 を満たすことも，明らかである．なぜなら，異なる極大可換フォン・ノイマン代数の間に包含関係が成立することは，その極大性の定義に反するからである．最後に，条件 4 であるが，自由 σ-積の 3 番目の条件は $\cup_{t\in T} f_t(\mathcal{B}_t)$ が $\mathcal{B}$ を σ-生成するということと同値である（証明については，文献 [15] の p. 319 を参照)．よって，条件 4 も満

[*55] 正確には，極大オブザーバブルごとに文脈を考える必要はない．同一のスペクトル射影をもつ極大オブザーバブルからなる集合ごとに文脈を考えれば十分である（2.1.6 節の脚注 10 参照)．

たされる．

フォン・ノイマン代数 $\mathcal{R}$ に属するすべての自己共役作用素について文脈依存型の確定値付与を考える場合，$\mathcal{R}$ に属するどの自己共役作用素にも，それが属する文脈が少なくとも一つは存在しなければならない．$\mathcal{R}$ に属するどの自己共役作用素にも，それが属する極大可換フォンノイマン部分代数が存在する．よって，文脈集合として，$\mathcal{R}$ の極大可換フォン・ノイマン部分代数すべてからなる族をとると，$\mathcal{R}$ に属するすべての自己共役作用素に値を付与できる．ただし，もしそのようにとった文脈集合から極大可換フォン・ノイマン部分代数が一つでも欠けると，どの文脈にも属さない自己共役作用素（当該の極大可換フォン・ノイマン部分代数を生成する自己共役作用素）が存在することになる．要するに，$\mathcal{R}$ の極大可換フォン・ノイマン部分代数すべてからなる族を文脈集合とするのは，$\mathcal{R}$ に属するすべての自己共役作用素に値を付与するうえで，必要最小限の文脈集合のとり方なのである．以下では，文脈集合のこのとり方を採用して議論を進める．

6.3 代数的局所性

$\mathcal{R}_1$，$\mathcal{R}_2$ は，次の条件を満たすフォン・ノイマン代数であるとする．

1. $\mathcal{R}_1$，$\mathcal{R}_2$ はそれぞれ可換代数でない．
2. $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2'$.
3. **シュリーダー性質:** 任意の $X \in \mathcal{R}_1$，$Y \in \mathcal{R}_2$ について，$X \neq 0$ かつ $Y \neq 0$ ならば，$XY \neq 0$ である．

2 番目の条件は，$\mathcal{R}_1$ に属する任意の作用素は $\mathcal{R}_2$ に属する任意の作用素と可換であるといっている．$\mathcal{R}_2 \subseteq \mathcal{R}_1'$ と定式化しても同じである．

具体例を挙げよう．N 次元ヒルベルト空間 $\mathcal{H}^N$ からなるテンソル積ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_1^N \otimes \mathcal{H}_2^N$ 上の作用素を考える．$\mathcal{H}_1^N$，$\mathcal{H}_2^N$ 上の有界作用素すべてからなる集合を, それぞれ $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$，$\mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ と表し，それぞれのヒルベルト空間上の単位作用素をそれぞれ I_1，I_2 と表す．$\{A \otimes I_2 : A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)\}$ と $\{I_1 \otimes B : B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)\}$ は上述の三つの条件をすべて満たすフォン・ノイマン代数である．

また，O_1 と O_2 はミンコフスキー空間上の有界開集合で，そのうえ「厳密に空間的に分離している」，すなわちある原点の近傍 N が存在し，任意の $x \in N$ について，$O_1 + x$ と O_2 が「空間的に分離」しているとする．あとで再び説明するが，代数的場の量子論においてそのような O_1 と O_2 にそれぞれ対応づけられるフォン・ノイマン代数 $\mathcal{R}(O_1)$ と $\mathcal{R}(O_2)$ もまた上述の三つの条件をすべて満たす．

$\mathcal{F}_1$，$\mathcal{F}_2$ は，それぞれ $\mathcal{R}_1$，$\mathcal{R}_2$ の極大可換フォン・ノイマン部分代数すべてからなる族であるとする．すぐに明らかになる対比のために，それらを**局所文脈集合**と呼ぶ．さて，$\mathcal{R}_1$ と $\mathcal{R}_2$，それぞれの文脈 $\mathcal{V}_1$ $(\in \mathcal{F}_1)$ と $\mathcal{V}_2$ $(\in \mathcal{F}_2)$ について，$(\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2)''$ は，$\mathcal{R}_1$ と $\mathcal{R}_2$ をともに含む最小のフォン・ノイマン代数 $(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2)''$ の可換部分フォン・ノイマン代数である．そこで，$\mathcal{F}_{12} \equiv \{(\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2)'' : \mathcal{V}_1 \in \mathcal{F}_1, \mathcal{V}_2 \in \mathcal{F}_2\}$ を**広域文脈集合**と呼ぼう．

以上の準備の下で，次の問題について考えるのは大変興味深い．

問題 2. 文脈集合 $\mathcal{F}$ が，局所文脈集合と広域文脈集合との和集合である（すなわち，$\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_{12}$）とする．そのとき，$\cup_{\mathcal{V} \in \mathcal{F}} \mathcal{P}(\mathcal{V})$ の文脈集合 $\mathcal{F}$ の下でのブール表現は存在するだろうか？

この問にたいする完全に一般的な解答は知られていない．[*56]本論考では，この問いの意味についてコメントするにとどめ，問題自体に答えることはしない．

- 上述のように，文脈集合として $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_{12}$ をとる．そして，$\cup_{\mathcal{V} \in \mathcal{F}} \mathcal{P}(\mathcal{V})$ の文脈集合 $\mathcal{F}$ の下でのブール表現

$$(\mathcal{B}, \{r_{\mathcal{V}_1}\}_{\mathcal{V}_1 \in \mathcal{F}_1} \cup \{r_{\mathcal{V}_2}\}_{\mathcal{V}_2 \in \mathcal{F}_2} \cup \{r_{(\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2)''}\}_{(\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2)'' \in \mathcal{F}_{12}})$$

  が存在すると仮定しよう．

  さて，任意の局所文脈 $V_1 \in F_1$ は，広域文脈 $(V_1 \cup V_2)''$ と包含関係 $V_1 \subseteq (V_1 \cup V_2)''$ にあり，$V_2 \in F_2$ についても同様の関係が成立する[*57]．そこで，ブール表現の定義における 3 番目の条件より，存在すると仮定されている写像は等式 $r_{\mathcal{V}_1} = r_{(\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2)''} \circ h_{\mathcal{V}_1 (\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2)''}$ を満たす．ここで，$h_{\mathcal{V}_1 (\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2)''}$ は，任意の $Q \in \mathcal{P}(\mathcal{V}_1)$ について $h_{\mathcal{V}_1 (\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2)''}(Q) \equiv Q$ のように定義される包含写像であった．よって，「任意の射影作用素 $P \in \mathcal{P}(\mathcal{V}_1)$ について，$r_{\mathcal{V}_1}(P) = r_{(\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2)''}(P)$ である」という結論が得られる．

  前段落では，局所文脈 $\mathcal{V}_1 \in \mathcal{F}_1$ と $\mathcal{V}_2 \in \mathcal{F}_2$ において議論を進めたが，後者の局所文脈を $\mathcal{W}_2 \in \mathcal{F}_2$ へと変更しても，同様の結論「任意の射影作用素 $P \in \mathcal{P}(\mathcal{V}_1)$ について，$r_{\mathcal{V}_1}(P) = r_{(\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{W}_2)''}(P)$ である」が得られる．

[*56] デモプーロス [14] は Section 5, ADDENDA において，この問いに部分的解答を与えた．彼は，$\mathcal{B}(\mathcal{H}_1^N) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H}_2^N)$（$\mathcal{H}^N$ は $N(\lneq \infty)$ 次元ヒルベルト空間）の場合において，上述のブール表現が存在することを示した．

[*57] このことは，次の二つの数学的事実による．(i) Double Commutant Theorem：任意のフォン・ノイマン代数 $\mathcal{R}$ について，$\mathcal{R} = \mathcal{R}''$ である（定理の詳細と証明は文献 [51] の 110 頁の定理 18.6 を参照)．(ii) $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の任意の部分集合 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ について，$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ ならば $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{A}'$ である．まず，$\mathcal{V}_1 \subseteq (\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2)$ である．(ii) を二度使用すると，$\mathcal{V}_1'' \subseteq (\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2)''$ であるが，(i) より $\mathcal{V}_1'' = \mathcal{V}_1$ である．

すると，任意の $P \in \mathcal{P}(\mathcal{V}_1)$ について，たとえ $\mathcal{V}_2 \neq \mathcal{W}_2$ $(\mathcal{V}_2, \mathcal{W}_2 \in \mathcal{F}_2)$ であっても，

$$r_{(\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2)''}(P) = r_{(\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{W}_2)''}(P)$$

となる．同様に，任意の $P \in \mathcal{P}(\mathcal{V}_2)$ について，たとえ $\mathcal{V}_1 \neq \mathcal{W}_1$ $(\mathcal{V}_1, \mathcal{W}_1 \in \mathcal{F}_1)$ であっても，

$$r_{(\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2)''}(P) = r_{(\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{V}_2)''}(P)$$

となる．この関係を**代数的局所性**と呼ぼう．いまや，上述の問題の意味を明確に述べなおすことができる．二つの局所文脈と広域文脈のブール表現が存在するか，という問題は，代数的局所性が成立するのかという問題にほかならないのである．

6.4 局所的真理値付与の不可能性

仮に代数的局所性が成立したとしても，局所性を満たす真理値付与が存在し，量子論の統計的予測を再現できるとは限らない．本節では，局所性条件と文脈依存型の確定値付与が満たすべきいくつかの諸条件から矛盾を導出する．局所性条件以外の条件は，真理値付与を考える場合不可欠な条件である．よって，文脈依存型の確定値付与を推し進める場合，局所性は捨てざるをえない．

6.4.1 ハーディー・タイプの非局所性論証

2 次元ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_1^2$ と $\mathcal{H}_2^2$ のテンソル積ヒルベルト空間を $\mathcal{H}_1^2 \otimes \mathcal{H}_2^2$ と表記する．$|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1^2 \otimes \mathcal{H}_2^2$ は，スピン 1/2 の 2 粒子からなる系のスピン状態を表す任意のベクトルであるとする．そのとき，$|\psi\rangle$ を $|\psi\rangle = \alpha|+\rangle_1 \otimes |+\rangle_2 - \beta|-\rangle_1 \otimes |-\rangle_2$（ここで，$\alpha$ と β は，$\alpha^2 + \beta^2 = 1$ を満たす，非負の実数）のように表示できる正規直交基底（$\mathcal{H}_1^2$ については $\{|+\rangle_1, |-\rangle_1\}$，$\mathcal{H}_2^2$ については $\{|+\rangle_2, |-\rangle_2\}$）が存在する．このような表示は「シュミット分解」と呼ばれる．ハーディー [23] は状態のシュミット分解を用いて，次の命題を証明した．

命題 8.（*Hardy*）シュミット分解を用いて，ある状態 $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1^2 \otimes \mathcal{H}_2^2$ が，非負実数 α, β を用いて $|\psi\rangle = \alpha|+\rangle_1|+\rangle_2 - \beta|-\rangle_1|-\rangle_2$（ここで $\alpha^2 + \beta^2 = 1$）のように表示されたとする．$\alpha, \beta \neq 0$ で，そのうえ $\alpha \neq \beta$ であるならば，次の関係式を満たす 4 つの射影作用素

$P_1, P_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{H}_1^2)$ および $Q_1, Q_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{H}_2^2)$ が存在する．

$$\langle\psi|P_1 \otimes Q_1|\psi\rangle = 0$$
$$\langle\psi|P_2 \otimes (I - Q_1)|\psi\rangle = 0$$
$$\langle\psi|(I - P_1) \otimes Q_2|\psi\rangle = 0$$
$$\langle\psi|P_2 \otimes Q_2|\psi\rangle \gneq 0$$

さて，フォン・ノイマン代数においては，文献 [26] で明らかにしたように次の命題が成立する．なお，次の命題における三つの条件は，本章第 3 節冒頭で代数的局所性を説明する際に挙げた諸条件と同じである．条件の意味についてはそちらを参照してほしい．

命題 9. $\mathcal{R}_1$ と $\mathcal{R}_2$ は，同一のヒルベルト空間上で作用する有界作用素からなるフォン・ノイマン代数であり，そのうえ次の条件を満たすとする．

1. $\mathcal{R}_1$ と $\mathcal{R}_2$ は，それぞれ可換代数ではない．
2. $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2'$ である．
3. **シュリーダー性質**： 任意の $X \in \mathcal{R}_1$ および $Y \in \mathcal{R}_2$ について，$X \neq 0$ かつ $Y \neq 0$ であるならば $XY \neq 0$ である．

そのとき，次の関係式を満たす，4 つの射影作用素 $P_1, P_2 \in \mathcal{R}_1; Q_1, Q_2 \in \mathcal{R}_2$ と，$(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2)''$ 上の正規状態 ρ が存在する．

$$\rho(P_1Q_1) = 0 \tag{28}$$
$$\rho(P_2(I - Q_1)) = 0 \tag{29}$$
$$\rho((I - P_1)Q_2) = 0 \tag{30}$$
$$\rho(P_2Q_2) \gneq 0 \tag{31}$$

ここで証明の前に，ヒルベルト空間上の有界作用素に関するいくつかの事実について，証明で必要とされる限りにおいて述べておきたい．

(a) **有界作用素の核** (Kernel)　有界作用素 V の核とは，閉部分空間 $Ker(V) \equiv \{\phi \in \mathcal{H} : V\phi = 0\}$ のことである．

(b) **部分等距離作用素**　有界作用素 V で，$Ker(V)$ に属するすべてのベクトルと直交する任意の $\psi \in \mathcal{H}$ について，等式 $\| V\psi \| = \| \psi \|$ が成立するものを部分等距離作用素という．（ユニタリー作用素は部分等距離作用素である．）

(c) **部分等距離作用素の初期空間と終空間**　V が部分等距離作用素であるとき，$(Ker(V))^{\perp}$ を V の「初期空間」，$range(V)$ を V の「終空間」という．V が部分

等距離作用素であるとき，V^* も部分等距離作用素となる．V^* の初期空間，終空間は，それぞれ，V の終空間，初期空間である．そのとき，次の数学的事実が成立するのはもっともなことである．部分等距離作用素とその共役作用素との積，すなわち V^*V と VV^* は，それぞれ V の初期空間，V の終空間の上への射影作用素となる．

(d) **絶対値作用素**　$|T|$ とは作用素 $\sqrt{T^*T}$ のことである．任意の有界作用素 T について，作用素 T^*T は自己共役（$(T^*T)^* = T^*T^{**} = T^*T$）であり，そのうえ正作用素（任意の $\phi \in \mathcal{H}$ について $(\phi, T^*T\phi) = \| T\phi \|^2 \geq 0$）となる．よって，作用素のルートが定義可能となる．

(e) **有界作用素の極分解** (Polar Decomposition)　任意の有界作用素 T は，ある部分等距離作用素 V を用いて，$T = V|T|$ と表すことができる．これを作用素の極分解という．T がフォン・ノイマン代数 $\mathcal{R}$ に属するとき，$|T|$ と V も $\mathcal{R}$ に属する．有界作用素の極分解 $T = V|T|$ における部分等距離作用素 V の初期空間と終空間，それぞれについて，$(Ker(V))^\perp = \overline{range(T^*)}$，$range(V) = \overline{range(T)}$ が成立する．ここで，作用素の値域上に付された線は，作用素の値域（部分空間）の閉包を表す．一般に，作用素の値域は部分空間とはなるが，閉部分空間とは限らない．（以上の事項の証明については，例えば，文献 [51] の 75 頁の 12.3 節 Polar Decomposition を参照してほしい．）

以下，命題 9 を証明する．

Proof. $\mathcal{R}_1$ は可換代数ではないので，相互に非可換である射影 $R, T \in \mathcal{R}_1$ が存在し，$(I-R)TR \neq 0$ を満たす[*58]．R, T は $\mathcal{R}_1$ に属し，そのうえ $\mathcal{R}_1$ は代数なので，作用素 $(I-R)TR$ は $\mathcal{R}_1$ に属する．この作用素の極分解をとると，部分等距離作用素 $V(\neq 0) \in \mathcal{R}_1$ が存在し，$(I-R)TR = V|(I-R)TR|$ となる．ここで，作用素 V の初期空間と終空間について，それぞれ，$(Ker(V))^\perp = \overline{range(((I-R)TR)^*)} = \overline{range(RT(I-R))}$ $(\subseteq range(R))$ と $range(V) = \overline{range(((I-R)TR))}$ $(\subseteq range(I-R))$ が成立する．さて，部分的等距離作用素とその共役作用素の積は射影作用素となる（上述の項目 (c) を参照）．よって，V^*V と VV^* は射影作用素である．そのうえ，V^*V は V の初期空間の上への射影，VV^* は V の終空間の上への射影だが，上で述べたように，それぞれの空間は，$range(R)$，$range(I-R)$ に含まれるので，それらの射影は直交する．以上より，$\mathcal{R}_1$ に

[*58] 仮に，$(I-R)TR = 0$ だとすると，(i) $TR = RTR$．両辺の共役作用素をとると，$(TR)^* = (RTR)^*$．左辺は $(TR)^* = RT$ となり，右辺は $(RTR)^* = RTR$ となるので，(ii) $RT = RTR$．すると，(i) と (ii) より，R と T は可換となってしまう．

ついて，それに属する部分的等距離作用素 V が存在し，V^*V と VV^* は直交する 0 でない射影である．同様にして，$\mathcal{R}_2$ についても，それに属する部分的等距離作用素 W が存在し，W^*W と WW^* は相互に直交する 0 でない射影であることがわかる．

さて，$\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2'$ なので，V^*V と W^*W は可換であり，V^*VW^*W は射影である．同様に，VV^*WW^* も射影である．そのうえ，シュリーダー性質より，これらの射影は 0 でない．

さて，α，β はある正の実数で，$\alpha^2+\beta^2=1$ および $\alpha \neq \beta$ を満たすとしよう．そのうえ，ノルム 1 のベクトル ϕ は $range(V^*VW^*W)$ に属していると仮定する．V^*VW^*W は 0 でないので，そのようなベクトルは存在する．このベクトルを用いて，ベクトル ψ を $\psi \equiv \alpha\phi - \beta VW\phi$ のように定義する．ϕ と $VW\phi$ は，それぞれ $range(I-R)$，$range(R)$ に属するので直交していること，そのうえノルム 1 であることに注意してほしい．これらのことと，$\alpha^2+\beta^2=1$ より，ψ はノルム 1 のベクトルである．

ここで，作用素 $P_1, P_2 \in \mathcal{R}_1$ と $Q_1, Q_2 \in \mathcal{R}_2$ を次のように定義しよう．

$$P_1 \equiv \frac{1}{(\alpha+\beta)}\{\alpha VV^* + (\alpha\beta)^{1/2}(V+V^*) + \beta V^*V\}$$

$$P_2 \equiv \frac{1}{\alpha^3+\beta^3}\{\alpha^3 VV^* - (\alpha\beta)^{3/2}(V+V^*) + \beta^3 V^*V\}$$

$$Q_1 \equiv \frac{1}{(\alpha+\beta)}\{\alpha WW^* + (\alpha\beta)^{1/2}(W+W^*) + \beta W^*W\}$$

$$Q_2 \equiv \frac{1}{\alpha^3+\beta^3}\{\alpha^3 WW^* - (\alpha\beta)^{3/2}(W+W^*) + \beta^3 W^*W\}$$

これらの作用素は射影作用素である．このことを P_1 を具体例に確かめよう．射影作用素は，次の二つの条件を満たす有界作用素として定義されるのだった．(i) 自己共役: 作用素 A は自己共役 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $A^*=A$．(ii) べき等性：作用素 A はべき等 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $A^2=A$．条件 (i) についてみていこう．まず，VV^*，$V+V^*$，V^*V はすべて自己共役作用素である．それらに，それぞれ実数 α，β から構成される係数をかけ，それらを加え合わせてもやはり自己共役作用素である．次に，条件 (ii) についてみていこう．

$$
\begin{aligned}
(P_1)^2 &= \frac{1}{(\alpha+\beta)^2}\{\alpha VV^* + (\alpha\beta)^{1/2}(V+V^*) + \beta V^*V\}^2 \\
&= \frac{1}{(\alpha+\beta)^2}\{\alpha(\alpha+\beta)VV^* + (\alpha\beta)^{1/2}(\alpha+\beta)(V+V^*) + \beta(\alpha+\beta)V^*V\} \\
&= \frac{1}{(\alpha+\beta)}\{\alpha VV^* + (\alpha\beta)^{1/2}(V+V^*) + \beta V^*V\} \\
&= P_1
\end{aligned}
$$

二つ目の等号成立を導出する際，$VV^*V = V$，$V^*VV^* = V^*$ および $VV = V^*V^* = 0$ を用いている．それらが成立することは，V と V^*，それぞれの初期空間，終空間について証明冒頭で述べたことから明らかだと思う．他の作用素 P_2, Q_1, Q_2 についても，同様にして，射影作用素であることを示すことができる．

さて，これらの射影作用素と，さきに定義したベクトル ψ について，次の（不）等式が成立することがわかる．

$$
\begin{aligned}
(\psi, P_1Q_1\psi) &= 0 \\
(\psi, Q_2\psi) &= (\psi, P_1Q_2\psi) \\
(\psi, P_2\psi) &= (\psi, P_2Q_1\psi) \\
(\psi, P_2Q_2\psi) &= \frac{(\alpha^2-\beta^2)^2}{(\alpha^3+\beta^3)^2}(\alpha\beta)^2 \gneq 0
\end{aligned}
$$

これらの式が成立することを，４番目の式を具体例にみていきたい．その式変形をみれば，残りの式も同様のやり方で導出できることがわかると思う．4 番目の式の左辺について，等式 $(\psi, P_2Q_2\psi) = (P_2\psi, Q_2\psi)$ が成立する．よって，$P_2\psi$ と $Q_2\psi$ との内積について考える．

まず，

$$
P_2\psi = \frac{1}{\alpha^3+\beta^3}\{\alpha^3VV^* - (\alpha\beta)^{3/2}(V+V^*) + \beta^3V^*V\}(\alpha\phi - \beta VW\phi) \tag{32}
$$

から考えよう．等式 (32) の右辺の一部は，

$$
\begin{aligned}
&\{\alpha^3VV^* - (\alpha\beta)^{3/2}(V+V^*) + \beta^3V^*V\}\alpha\phi \\
=&\alpha^4VV^*\phi - \alpha^{5/2}\beta^{3/2}(V\phi + V^*\phi) + \alpha\beta^3V^*V\phi \\
=&-\alpha^{5/2}\beta^{3/2}V\phi + \alpha\beta^3\phi
\end{aligned}
$$

となる．ここで，最後の等号は，$\phi \in range(V^*VW^*W)$，および部分等距離作用素 V と V^* の初期空間，終空間についての，これまで繰り返し述べてきた事実より成立する．

同じ事実を用いると，等式 (32) の右辺の他の部分は，

$$
\begin{aligned}
&\{\alpha^3VV^* - (\alpha\beta)^{3/2}(V+V^*) + \beta^3V^*V\}(-\beta VW\phi) \\
=& -\alpha^3\beta VV^*VW\phi + \alpha^{3/2}\beta^{5/2}(VVW + V^*VW)\phi - \beta^4V^*VVW\phi \\
=& -\alpha^3\beta VW\phi + \alpha^{3/2}\beta^{5/2}W\phi
\end{aligned}
$$

となる．

よって，

$$
P_2\psi = \frac{1}{\alpha^3+\beta^3}\{-\alpha^{5/2}\beta^{3/2}V\phi + \alpha\beta^3\phi - \alpha^3\beta VW\phi + \alpha^{3/2}\beta^{5/2}W\phi\} \tag{33}
$$

同様にして，

$$
Q_2\psi = \frac{1}{\alpha^3+\beta^3}\{\alpha^{3/2}\beta^{5/2}V\phi + \alpha\beta^3\phi - \alpha^3\beta VW\phi - \alpha^{5/2}\beta^{3/2}W\phi\} \tag{34}
$$

が得られる．

そこで，内積 $(P_2\psi, Q_2\psi)$ を求めるには (33) の右辺と (34) の右辺の内積を計算すればよい．(33) の右辺，および (34) の右辺は，四つのベクトル $\{V\phi, \phi, VW\phi, W\phi\}$ の線形結合だが，それらはノルム 1 であり，そのうえ相互に直交する．よって，

$$
\begin{aligned}
(P_2\psi, Q_2\psi) &= \frac{1}{(\alpha^3+\beta^3)^2}\{-\alpha^4\beta^4 + \alpha^2\beta^6 + \alpha^6\beta^2 - \alpha^4\beta^4\} \\
&= \frac{(\alpha^2-\beta^2)^2}{(\alpha^3+\beta^3)^2}(\alpha\beta)^2
\end{aligned}
$$

となる．α と β は異なる正の実数であった．よって， この内積は 0 でない．ここで確かめたのは 4 番目の式だけだが，他の三つの等式が成立することも，これまで繰り返し使用した事実を利用して示すことができる．

さて，密度作用素として，ψ が張る 1 次元部分空間の上への 1 次元射影作用素 P_ψ をとり，$(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2)''$ 上の線形汎関数 ρ_ψ を，

$$
\rho_\psi \equiv Tr(P_\psi X) \qquad X \in (\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2)''
$$

のように定義する．ρ_ψ は，$(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2)''$ 上の正規状態であり，そのうえ命題 9 における (28) から (31) を満たす．よって，命題が示された． □

6.4.2　矛盾の導出

これから，命題 9 を用いて，量子論における統計的予測と整合的な，局所性を満たす真理値付与が存在しないことをみていく．$\mathcal{R}_1$，$\mathcal{R}_2$ は，命題 9 における三つの条件を満たすフォン・ノイマン代数であるとする．文脈集合 $\mathcal{F}_1$，$\mathcal{F}_2$ は，それぞれ $\mathcal{R}_1$ と $\mathcal{R}_2$ の極大可換フォン・ノイマン部分代数すべてからなる族であるとする．さらに，射影と広域文脈のペアからなる，次の集合を定義しよう．

$$\mathcal{S} \equiv \{\ (P, (\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2)'')\ \mid\ \mathcal{V}_1 \in \mathcal{F}_1,\ \mathcal{V}_2 \in \mathcal{F}_2,\ P \in (\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2)''\ \}$$

もし写像 $\mu : \mathcal{S} \to \{1, 0\}$ が真理値付与であるならば，まず次の条件を必ず満たすべきであろう．

- **有限加法的真理値付与**
  1. 任意の広域文脈 $(\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2)''$ において，$\mu(I, (\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2)'')) = 1$ である．
  2. 任意の広域文脈 $(\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2)''$ において，任意の直交している射影 $P, Q \in (\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2)''$ について，
  $$\mu(P + Q, (\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2)'')) = \mu(P, (\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2)'') + \mu(Q, (\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2)'')$$
  が成立する．

さらに，写像 μ が，次の条件も満たすならば，それを局所性要件を満たす真理値付与と考えてよいであろう．

- **局所性**
  1. 射影 P は $\mathcal{V}_1$ の要素であるとする．任意の局所文脈 $\mathcal{V}_2, \mathcal{W}_2 \in \mathcal{F}_2$ について，
  $$\mu(P, (\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2)'')) = \mu(P, (\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{W}_2)''))$$
  である．
  2. 射影 Q は $\mathcal{V}_2$ の要素であるとする．任意の局所文脈 $\mathcal{V}_1, \mathcal{W}_1 \in \mathcal{F}_1$ について，
  $$\mu(Q, (\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2)'')) = \mu(Q, (\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{V}_2)''))$$
  である．

有限加法的真理値付与と**局所性**を満たす写像 $\mu : \mathcal{S} \to \{1, 0\}$ すべてからなる集合を $\mathcal{T}$ と表記する．$(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2)''$ 上の状態が正規状態 ρ であるとき，$\mathcal{T}$ とその要素 μ は次の二つの要請を満たすべきである．

- **同時付値の規則 I**
  射影 P，Q は，それぞれ $\mathcal{R}_1$，$\mathcal{R}_2$ に属するとする．もし $\rho(PQ)=0$ であるならば，任意の $\mu\in\mathcal{T}$，および任意の局所文脈 $\mathcal{V}_1$（ただし，$P\in\mathcal{V}_1$）と $\mathcal{V}_2$（ただし，$Q\in\mathcal{V}_2$）について，$\mu(P,(\mathcal{V}_1\cup\mathcal{V}_2)''))=0$ あるいは $\mu(Q,(\mathcal{V}_1\cup\mathcal{V}_2)''))=0$ である．
- **同時付値の規則 II**
  射影 P，Q は，それぞれ $\mathcal{R}_1$，$\mathcal{R}_2$ に属するとする．もし $\rho(PQ)\gneq 0$ であるならば，ある写像 $\mu\in\mathcal{T}$ および局所文脈 $\mathcal{V}_1$ （ただし，$P\in\mathcal{V}_1$）と $\mathcal{V}_2$（ただし，$Q\in\mathcal{V}_2$）が存在し，等式 $\mu(P,(\mathcal{V}_1\cup\mathcal{V}_2)''))=1$ と $\mu(Q,(\mathcal{V}_1\cup\mathcal{V}_2)''))=1$ を満たす．

以上の準備のもとで，次の命題を示すことができる．

命題 10. $\mathcal{R}_1$，$\mathcal{R}_2$ は，命題 9 で述べた 3 つの条件を満たすフォン・ノイマン代数であり，ρ_ψ は，その命題の証明において構成した正規状態であるとする．さらに，$P_1,P_2\in\mathcal{R}_1$ および $Q_1,Q_2\in\mathcal{R}_2$ も命題 9 の証明において構成した射影作用素であるとする．そのとき，正規状態 ρ_ψ と四つの射影 P_1,P_2,Q_1,Q_2 を用いて，**有限加法的真理値付与**，**局所性**，および**同時付値の規則** I **と** II から矛盾が導出される．

Proof. 120 頁の不等式 (31) に**同時付値の規則 II** を適用しよう．ある写像 $\mu\in\mathcal{T}$ および局所文脈 $\mathcal{V}_1$（ただし，$P_2\in\mathcal{V}_1$）と $\mathcal{V}_2$（ただし，$Q_2\in\mathcal{V}_2$）が存在し，次の二つの等式を満たす．

$$\mu(P_2,(\mathcal{V}_1\cup\mathcal{V}_2)''))=1 \tag{35}$$

および

$$\mu(Q_2,(\mathcal{V}_1\cup\mathcal{V}_2)''))=1. \tag{36}$$

次に射影 P_1 について考えよう．それを要素とする $\mathcal{R}_1$ の可換フォン・ノイマン部分代数は存在する (例えば, $\{P_1\}''$)．ただし, そのような可換フォン・ノイマン部分代数が局所文脈であるとは限らない (いま, $\mathcal{R}_1$ の文脈集合 $\mathcal{F}_1$ は，$\mathcal{R}_1$ の極大可換フォン・ノイマン部分代数すべてからなる族であった)．しかし，任意の可換フォン・ノイマン部分代数には，それを含む極大可換なフォン・ノイマン部分代数が存在する．よって，P_1 および $I-P_1$ をともに要素とする局所文脈 $\mathcal{W}_1(\in\mathcal{F}_1)$ が存在する．さて，等式 (30) に**同時付値の規則 I** を適用すると，$\mu(I-P_1,(\mathcal{W}_1\cup\mathcal{V}_2)''))=0$ あるいは $\mu(Q_2,(\mathcal{W}_1\cup\mathcal{V}_2)''))=0$ である．仮に後者 $\mu(Q_2,(\mathcal{W}_1\cup\mathcal{V}_2)''))=0$ であるならば，**局所性**より等式 $\mu(Q_2,(\mathcal{V}_1\cup\mathcal{V}_2)''))=0$ が得られる．しかし，この等式は (36) と矛盾する．よって，$\mu(I-P_1,(\mathcal{W}_1\cup\mathcal{V}_2)''))=0$

であることがわかる．すると，有限加法性より，

$$\mu(P_1, (\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{V}_2)'')) = 1. \tag{37}$$

となる．

次に，射影 Q_1 について考えよう．前段落と同様の議論を経て，Q_1 および $I - Q_1$ をともに要素とする文脈 $\mathcal{W}_2 (\in \mathcal{F}_2)$ が存在することがわかる．さらに，等式 (29) について，やはり前段落と同様の議論によって，

$$\mu(Q_1, (\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{W}_2)'')) = 1. \tag{38}$$

が得られる．

(37) と (38) のそれぞれに**局所性**を適用すると，

$$\mu(P_1, (\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2)'')) = 1 \quad \text{かつ} \quad \mu(Q_1, (\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2)'')) = 1$$

が得られる．一方，等式 (28) に**同時付値の規則 I** を適用すると，

$$\mu(P_1, (\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2)'')) = 0 \quad \text{あるいは} \quad \mu(Q_1, (\mathcal{W}_1 \cup \mathcal{W}_2)'')) = 0$$

が得られる．よって，矛盾が生じる． □

命題 10 では，フォン・ノイマン代数 $\mathcal{R}_1$ と $\mathcal{R}_2$ が次の 3 条件を満たすと仮定していた．

1. $\mathcal{R}_1$ と $\mathcal{R}_2$ は，それぞれ非可換代数である．
2. $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2'$ である．
3. **シュリーダー性質:** 任意の $X \in \mathcal{R}_1, Y \in \mathcal{R}_2$ について，$X \neq 0$ および $Y \neq 0$ ならば，$XY \neq 0$ である．

これらの条件は，代数的場の量子論 (AQFT:*Algebraic quantum field theory*) の公理系において満たされる．その理論においては，ミンコフスキー空間 $\mathbf{R}^4 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$ 上のそれぞれの有界開集合 O に，測定可能量のフォン・ノイマン代数 $\mathcal{R}(O)$ が結び付けられるのだった．まず，$\mathcal{R}(O)$ は「固有無限」(properly infinite) という型に分類される．その型に分類されるフォン・ノイマン代数は必ず非可換代数となる[*59]．よって，1 番目の条件は，任意の有界開集合に対応付けられるフォン・ノイマン代数において満たされる．次に，AQFT において，O_1 と O_2 が「空間的に分離している」 (spacelike separated) ならば，$\mathcal{R}(O_1) \subseteq (\mathcal{R}(O_2))'$ である．これは AQFT において，公理として要請されることで

[*59] 証明については，例えば，文献 [4] の p. 47 (Corollary 1.11.6) を参照．

ある[*60]．最後に，もし O_1 と O_2 が「厳密に空間的に分離している」(strictly spacelike separated) ならば，すなわちある原点の近傍 N が存在し，任意の $x \in N$ について，$O_1 + x$ と O_2 が「空間的に分離」しているならば，AQFT の公理から $\mathcal{R}(O_1)$ と $\mathcal{R}(O_2)$ が**シュリーダー性質**を満たすことを証明できる[*61]．

コッヘン＝シュペッカーの NO-GO 定理を回避するために，文脈依存型の確定値付与という考え方を採用したのだった．しかし，そのとき，レッドヘッドとヘイウッドが示したように，非局所性に関わる困難が生じた．ただし，彼らの議論は，有限次元ヒルベルト空間，そして非相対論的量子力学に限定されていた．命題 10 は，ヘイウッドとレッドヘッドに類似の結果を，ヒルベルト空間の次元を限定せず，しかも相対論的な設定（代数的場の量子論）においても適用可能な形で提示したものである．

6.5 量子論における文脈依存性

最近の量子力学の哲学において，「文脈依存主義」は，類似してはいるが異なる二つの考え方を指すのに使われているようである．一つは，もちろん，4 章と本章でみたような，文脈依存型の確定値付与という考え方である．この考え方は，自己共役作用素を文脈ごとに真なる物理量へと分裂させる（ファン・フラーセン）ことによって，あるいは物理量の値を文脈ごとに指定する（ベル）ことによって，コッヘン＝シュペッカーの NO-GO 定理を回避し，すべての物理量に**同時に**値を付与しようとしたのだった．この意味での文脈依存主義の背景にあるのは，極めて強い実在主義，いいかえると古典的実在主義とでもいうべきものである．

もう一つの文脈依存主義は，科学哲学者のクリフトンとハルヴォーソン [21] が提示したもので，彼らはそれをボーアが考えていたことの数学的定式化であると考えている[*62]．ただし，本論文では，それが本当にボーアが考えていたことなのかについては議論せず，彼らが提示した量子論解釈だけを，議論の対象とする．彼らは，コッヘン＝シュペッカーの NO-GO 定理を受けて，すべての物理量に同時に値付与することを放棄し，発想を転換して，同時に値を付与できる物理量の極大な集合はなんなのかについて考えた．彼らの考え方においては，系の状態と被測定物理量によって文脈が指定され，値が付与される枠組みが決まる [文脈依存性]．それぞれの文脈においては無知解釈が可能となり，（すべてで

[*60] 例えば， [4] の p. 10 を参照.
[*61] 証明については，再び [4] の p. 51 (Theorem 1.12.3) を参照.
[*62] 1 章の註でも述べたように，彼らの議論は最近，2 人の日本人研究者，北島と小澤 [35] によって一般化され注目を集めている.

はなく）制限された物理量に値が付与される [実在主義]．クリフトンとハルヴォーソンはこの文脈に依存した実在主義を量子的実在主義と呼ぶ．

今後，後者の意味での文脈依存主義をコンテクスチュアリズム，文脈をコンテクストと呼び，明確に区別したい．これから，本論文最後に，コンテクスチュアリズムと非局所性との関係を考察する．具体的には，前節で証明した命題 10 との関係を考えることになる．そうすることで，コンテクスチュアリズムを採用することが何事を意味するのかを明らかにしたい．

まず，コンテクスチュアリズムについて，以下の議論で必要とされる限りで，説明したい．また，これから行う説明は，非相対論的設定，そのうえ有限次元ヒルベルト空間に限定する．コンテクスチュアリズムにおいて，コンテクストは，対象とする系の状態 Ψ と被測定物理量 M によって決まる．そこで，今後，$[\Psi, M]$ をコンテクストと呼ぶ．まず，コンテクスト $[\Psi, M]$ における「適切な事象空間」(*appropriate event space*) を次のように指定する．1 次元射影からなる集合 $\{P_{\phi_i} : i = 1, 2, \cdots, N\}$ で，次の 3 条件を満たすもののなかで極大なものを「コンテクスト $[\Psi, M]$ における適切な事象空間」という．

(a)　それぞれの ϕ_i は M の固有ベクトルである．
(b)　$i \neq j$ ならば，$(\phi_i, \phi_j) = 0$ である．
(c)　それぞれの ϕ_i は Ψ と直交しない．

これらの条件によって，被測定物理量 M に関して真でありうる 1 次元射影（命題），いいかえると，Ψ による生起確率が 0 でない 1 次元射影（命題）が指定される．ただし，M の固有値が縮退している場合，上記の 3 条件だけでは適切な事象空間はいつでも一意に定まるわけではない．そこで，クリフトンとハルヴォーソンは更なる条件を課すのだが，本論文ではその条件に言及しない．というのも，以下で議論の対象となるのは被測定物理量が極大物理量（固有値が縮退していない）である場合に限られるからである．そこで，コンテクスト $[\Psi, M]$ における適切な事象空間を $\mathcal{E}_{[\Psi, M]}$ と表記する．

次に，$\mathcal{E}_{[\Psi, M]}$ を用いて，コンテクスト $[\Psi, M]$ において真理値を付与しうる確定性質の集合 $\mathbf{Def}(\mathcal{E}_{[\Psi, M]})$ を次のように定義する．

$$\mathbf{Def}(\mathcal{E}_{[\Psi, M]}) \equiv \{P \in \mathcal{P}(\mathcal{H}) : \forall Q \in \mathcal{E}_{[\Psi, M]}\ [Q \leq P \text{ or } PQ = 0]\}$$

証明は省くが，$\mathbf{Def}(\mathcal{E}_{[\Psi, M]})$ は，ヒルベルト空間上の射影作用素すべてからなる束の部分束となっている．$\mathcal{E}_{[\Psi, M]}$ に属する任意の射影（もちろん，これは 1 次元射影）は $\mathbf{Def}(\mathcal{E}_{[\Psi, M]})$ に属し，その原子元である．また，$\mathcal{E}_{[\Psi, M]}$ に属するすべての射影の和と直交する任意の 1 次元射影もまた $\mathbf{Def}(\mathcal{E}_{[\Psi, M]})$ に属し，その原子元である．それらのこと

から，まず，M のスペクトル射影はすべて $\mathbf{Def}(\mathcal{E}_{[\Psi,\,M]})$ に属することがわかる．また，$\mathcal{E}_{[\Psi,\,M]}$ に属するすべての射影の和を R と表すとき，射影作用素 $I-R$ の値域（これは部分空間である）の次元が 2 以上の場合，$\mathbf{Def}(\mathcal{E}_{[\Psi,\,M]})$ はブール束にはならないこともわかる．

ブール束であるとは限らないが，$\mathbf{Def}(\mathcal{E}_{[\Psi,\,M]})$ から 2 元ブール束 $\{1,0\}$ への準同型写像が存在する．そのような写像 ν_i は，$\mathcal{E}_{[\Psi,\,M]}$ に属する各射影 P_{ϕ_i} ごとに存在する．それぞれの ν_i は，束の順序で $P_{\phi_i} \leq P$ であるすべての射影 P を 1 へ，それ以外を 0 へと写すものとして定義される．よって，$\mathbf{Def}(\mathcal{E}_{[\Psi,\,M]})$ は真理値を付与しうる命題の集合であると解釈できる．

それぞれの準同型写像 ν_i に，値 $(\Psi, P_{\phi_i}\Psi)$ を付与すると，その値は ν_i によって真となる事態が生じる確率を表すと考えられる．そのうえ，$\mathbf{Def}(\mathcal{E}_{[\Psi,\,M]})$ は，$\mathcal{P}(\mathcal{H})$ の部分束のなかで，Ψ によって部分束のそれぞれの元に付与される値を古典的確率として解釈できる極大のものである．実際，ハルヴォーソンとクリフトンは文献 [20] において，$\mathcal{P}(\mathcal{H})$ の部分束 $\mathcal{L}$ が $\mathbf{Def}(\mathcal{E}_{[\Psi,\,M]}) \subset \mathcal{L}$ を満たすならば，Ψ によって $\mathcal{L}$ の元に付与される確率を古典的確率として解釈できないことを示した．

さて，命題 10 を思い出してほしい．その命題はコンテクスチュアリズムにも適用可能であろうか．これから，この問いについて考えたい．

命題 10 では，フォン・ノイマン代数 $\mathcal{R}_1$ と $\mathcal{R}_2$ が次の 3 条件を満たすことを仮定していた．

1. $\mathcal{R}_1$ と $\mathcal{R}_2$ は，それぞれ非可換代数である．
2. $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2'$ である．
3. **シュリーダー性質:** 任意の $X \in \mathcal{R}_1, Y \in \mathcal{R}_2$ について，$X \neq 0$ および $Y \neq 0$ ならば，$XY \neq 0$ である．

これらの 3 条件を満たす具体例として，厳密に空間的に分離した二つの有界開集合それぞれ対応づけられるフォン・ノイマン代数や，テンソル積ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ 上の有界作用素からなるフォンノイマン代数 $\{A \otimes I_2 \colon A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)\}$ と $\{I_1 \otimes B \colon B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)\}$ があった．これまで，コンテクスチュアリズムを非相対論的設定，有限次元ヒルベルト空間に限定して説明してきた．そこで，後者の具体例を用いて議論を進める．

さて，命題 10 では，広域文脈 $(\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2)''$ とそれに属する射影 P とのペアからなる集合を $\mathcal{S}$ と呼び，写像 $\mu\colon\ \mathcal{S} \to \{1,0\}$ が満たすべき要件を述べたのだった．コンテクスチュアリズムについて考察するにあたり，集合 $\mathcal{S}$ を改めて定義し，写像 μ が満たすべき要件を述べ直したい．

コンテクスチュアリズムにおいて，一般には，コンテクストは任意の状態と任意の被測定物理量のペアにより指定されるのだった．だが，いま非局所性の問題を考察していること，そのうえ完全な理論を構成するというより局所性を満たす真理値付与の可能性を考えていることから，被測定物理量を次のものに制限したい．$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ 上の極大自己共役作用素で，$\mathcal{H}_1$，$\mathcal{H}_2$ それぞれのヒルベルト空間上の極大自己共役作用素 M_1，M_2 それぞれの固有ベクトルからなるテンソル積のすべて（もちろん，これは $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ の完全正規直交系をなす）を固有ベクトルとするものである．そのような自己共役作用素を $< M_1, M_2 >$ と表記する．ここで，なぜ被測定物理量を作用素のテンソル積 $M_1 \otimes M_2$ にしないのかと疑問に思うかもしれない．その理由は，たとえ M_1 と M_2 が極大作用素であっても，それらのテンソル積は極大であるとは限らないからである．

以上の準備のもとで，$\mathcal{S}$ を，これから述べる三つの条件を満たす，射影作用素とコンテクストのペア $(P, [\Psi, < M_1, M_2 >])$ すべてからなる集合であるとする．

- Ψ は $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ に属する状態ベクトルである．
- M_1, M_2 は，それぞれ $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ 上の極大自己共役作用素である．
- P は，$\mathbf{Def}(\mathcal{E}_{[\Psi, < M_1, M_2 >]})$ に属する射影作用素である．

そして，これから，写像 μ : $\mathcal{S} \to \{1, 0\}$ が満たすべき条件について考える．

命題 10 では，「有限加法的真理値付与」，「局所性」，および「同時付値の規則 I と II」から矛盾を導出した．まず，コンテクスチュアリズムにおいても，次のように有限加法的真理値付与を課すことになんの問題もないだろう．

- **有限加法的真理値付与**
  1. 任意のコンテクスト $[\Psi, < M_1, M_2 >]$ において，$\mu(I, [\Psi, < M_1, M_2 >]) = 1$ である．
  2. 任意のコンテクスト $[\Psi, < M_1, M_2 >]$ において，任意の直交している射影 $P, Q \in \mathbf{Def}(\mathcal{E}_{[\Psi, < M_1, M_2 >]})$ について，

     $$\mu(P+Q, [\Psi, < M_1, M_2 >]) = \mu(P, [\Psi, < M_1, M_2 >]) + \mu(Q, [\Psi, < M_1, M_2 >])$$

     が成立する．

次に，「局所性」条件を次のように改める．コンテクスチュアリズムが局所性条件を満たす必要があるのか，否かについては後で議論する．

- **局所性**

1. 射影 P は $\mathcal{H}_1$ 上の射影作用素であるとする．$P \otimes I$ を要素とする任意の $\mathbf{Def}(\mathcal{E}_{[\Psi,\,<M_1,M_2>]})$ と $\mathbf{Def}(\mathcal{E}_{[\Psi,\,<M_1,M_2'>]})$ において，

$$\mu(P \otimes I,\, [\Psi,\, < M_1, M_2 >]])) = \mu(P \otimes I,\, [\Psi,\, < M_1, M_2' >])$$

である．

2. 射影 Q は $\mathcal{H}_2$ 上の射影作用素であるとする．$I \otimes Q$ を要素とする任意の $\mathbf{Def}(\mathcal{E}_{[\Psi,\,<M_1,M_2>]})$ と $\mathbf{Def}(\mathcal{E}_{[\Psi,\,<M_1',M_2>]})$ において，

$$\mu(I \otimes Q, [\Psi, < M_1, M_2 >])) = \mu(I \otimes Q, [\Psi, < M_1', M_2 >])$$

である．

さて，命題 10 の証明と同じように，**有限加法的真理値付与**と**局所性**を満たす写像 $\mu : \mathcal{S} \to \{1, 0\}$ すべてからなる集合を $\mathcal{T}$ と表記する．そして，$\mathcal{T}$ とその要素 μ が次の条件を満たすことを要請する．

- **同時付値の規則 I**
  P，Q は，それぞれ $\mathcal{H}_1$，$\mathcal{H}_2$ 上の射影作用素であるとする．もし $(\Psi, P \otimes Q\Psi) = 0$ であるならば，$P \otimes Q \in \mathbf{Def}(\mathcal{E}_{[\Psi,\,<M_1,M_2>]})$ を満たす任意の $< M_1, M_2 >$ について，任意の $\mu \in \mathcal{T}$ において，$\mu(P \otimes I, [\Psi, < M_1, M_2 >]) = 0$ あるいは $\mu(I \otimes Q, [\Psi, < M_1, M_2 >]) = 0$ である．
- **同時付値の規則 II**
  射影 P, Q は, それぞれ $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ 上の射影作用素であるとする．もし $(\Psi, P \otimes Q\Psi) \neq 0$ であるならば，$P \otimes Q \in \mathbf{Def}(\mathcal{E}_{[\Psi,\,<M_1,M_2>]})$ を満たす任意の $< M_1, M_2 >$ について，ある写像 $\mu \in \mathcal{T}$ が存在して，$\mu(P \otimes I, [\Psi, < M_1, M_2 >]) = 1$ と $\mu(I \otimes Q, [\Psi, < M_1, M_2 >]) = 1$ を満たす．

ここで，同時付値の規則 II は，命題 10 の対応する規則より強く定式化されている．命題 10 では，広域文脈 $(\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2)''$ にかかる量化子は存在量化子であったが，ここでは，$< M_1, M_2 >$ にかかる量化子は全称量化子である．そのように改めたのは，規則の自然な定式化を考慮した結果である．ただし，コンテクスチュアリズムにおいて命題 10 に対応する命題を示すとき，数学的に必要なのは弱い定式化で十分である．

以上の準備のもとで，命題 10 と同じようにして，矛盾を導出できる．ここで証明を繰り返すことはせず，いくつかのことを確認するにとどめる．命題 10 の証明で四つの射影を用いた．ここでは，それらはそれぞれ，$P_1 \otimes I$，$P_2 \otimes I$，$I \otimes Q_1$，$I \otimes Q_2$ といったテ

ンソル積の形式で表される．まずは $P_2 \otimes Q_2$ をスペクトル射影とするテンソル積空間上の極大作用素 $< M_1, M_2 >$ と，命題 10 の証明で利用した状態 ψ（この状態もテンソル積空間上の状態になおす必要がある）とからなるコンテクスト $[\psi, < M_1, M_2 >]$ を考え，次にそのコンテクストのもとでの確定性質 $\mathbf{Def}(\mathcal{E}_{[\psi,\, < M_1, M_2 >]})$ を構成し，それを用いて証明を進めればよい．

さて，かくしてコンテクスチュアリズムにおいても，有限加法性，局所性，同時付値の規則 I と II は両立しない．そのうえ，これからみるように，コンテクスチュアリズムにおいて，局所性以外のすべての条件が成立する．一般に，コンテクスチュアリズムにおいては，まずコンテクスト $[\Psi, M]$ における適切な事象空間 $\mathcal{E}_{[\Psi,\, M]} = \{P_{\phi_i} : i = 1, 2, \cdots, N\}$ を定義し，それを用いて確定性質の集合 $\mathbf{Def}(\mathcal{E}_{[\Psi,\, M]})$ を指定するのだった．そして，確定性質の集合から 2 元ブール束 $\{1, 0\}$ への準同型写像 ν_i（真理値付与）を，$\mathcal{E}_{[\Psi,\, M]}$ のそれぞれの元 P_{ϕ_i} ごとに考えるのだった．そのようにして得られる準同型写像すべてからなる集合を改めて $\mathcal{T}$ と表記する．そのとき，$\mathcal{T}$ に属する任意の準同型写像が,「有限加法性」を満たすことは明らかであろう．

次に，同時付値の規則 I について考えよう．コンテクスチュアリズムにおいて，系の状態によって付与される確率が 0 の射影は常に準同型写像によって 0 へと写される．厳密には次の事実が成立する．

- $(\Psi, P\Psi) = 0$ であるとする．M は極大自己共役作用素で，$P \in \mathbf{Def}(\mathcal{E}_{[\Psi,\, M]})$ であるとする．そのとき，$\mathcal{E}_{[\Psi,\, M]}$ の元である P_{ϕ_i} ごとに指定される，$\mathbf{Def}(\mathcal{E}_{[\Psi,\, M]})$ から 2 元ブール束 $\{1, 0\}$ への任意の準同型写像 $\nu_i \in \mathcal{T}$ について，$\nu_i(P) = 0$ である．

この事実から，コンテクスチュアリズムにおいて同時付値の規則 I が成立することは明らかである．

同時付値の規則 I について： $(\Psi, P \otimes Q\Psi) = 0$ であるとする．また，$< M_1, M_2 >$ はテンソル積空間上の極大作用素で，$P \otimes Q \in \mathbf{Def}(\mathcal{E}_{[\Psi,\, < M_1, M_2 >]})$ を満たすとする．そのとき，上述の事実より，$\mathbf{Def}(\mathcal{E}_{[\Psi,\, < M_1, M_2 >]})$ から 2 元ブール束 $\{1, 0\}$ への任意の $\nu \in \mathcal{T}$ について，$\nu(P \otimes Q, [\Psi, < M_1, M_2 >]) = 0$ である．すると，$P \otimes Q = (P \otimes I) \wedge (I \otimes Q)$ および ν が 2 元ブール束への準同型写像であることから，$\nu(P \otimes I, [\Psi, < M_1, M_2 >]) = 0$ あるいは $\nu(I \otimes Q, [\Psi, < M_1, M_2 >]) = 0$ である．

続けて，同時付値の規則 II について考えよう．コンテクスチュアリズムにおいて，確率が 0 でない射影 P には，$P_{\phi_k} \leq P$ なる，「適切な事象空間」に属する 1 次元射影 P_{ϕ_k} が

存在し，$\nu_k(P)=1$ である．より厳密には次の事実が成立する．

- $(\Psi, P\Psi) \neq 0$ であるとする．M は極大自己共役作用素で，$P \in \mathbf{Def}(\mathcal{E}_{[\Psi,\,M]})$ であるとする．そのとき，$\mathbf{Def}(\mathcal{E}_{[\Psi,\,M]})$ から 2 元ブール束 $\{1, 0\}$ へのある $\nu \in \mathcal{T}$ が存在して，$\nu(P)=1$ である．

この事実から，コンテクスチュアリズムにおいて，同時付値の規則 II が成立することは明らかである．

同時付値の規則 II について： $(\Psi, P\otimes Q\Psi) \neq 0$ であるとする．また，$< M_1, M_2 >$ はテンソル積空間上の極大作用素で，$P \otimes Q \in \mathbf{Def}(\mathcal{E}_{[\Psi,\,<M_1,M_2>]})$ を満たすとする．そのとき，上述の事実より，$\mathbf{Def}(\mathcal{E}_{[\Psi,\,<M_1,M_2>]})$ から 2 元ブール束 $\{1, 0\}$ へのある $\nu \in \mathcal{T}$ が存在して，$\nu(P\otimes Q)=1$ である．すると，$P\otimes Q = (P\otimes I)\wedge(I\otimes Q)$ および ν が 2 元ブール束への準同型写像であることから，$\mu(P\otimes I, [\Psi, < M_1, M_2 >]) = 1$ かつ $\mu(I\otimes Q, [\Psi, < M_1, M_2 >]) = 1$ である．

以上より，コンテクスチュアリズムにおいて，有限加法性と同時付値の規則 I と II が成立することが示された．よって，コンテクスチュアリズムにおいて局所性は成立不可能である．この事実を，コンテクスチュアリズムはどのように受け入れるのだろうか．おそらく，次のように考えるだろう．局所性条件は異なるコンテクスト（例えば，局所性条件の (1) でいうと，$[\Psi, < M_1, M_2 >]$ と $[\Psi, < M_1, M_2' >]$）の間に，局所性に関するある関係が成立するように要請する条件だが，コンテクスチュアリズムは異なるコンテクスト間の関係を一切要請しない．というよりも，そうすることでコッヘン＝シュペッカーの NO-GO 定理を回避したのである，と．もちろん，このように考えることに矛盾はない．ただし，次の点は少々気がかりである．コンテクスチュアリズムは，コンテクストに限定すると無知解釈が成立することをもって，自らの立場を実在主義と呼んだのだった．コンテクスト限定的とはいえ，系の所有値を考えている．空間的な関係にある二つの時空領域を例に考えよう．一方の領域上で物理量の**所有値**（測定値でない）を論じるときに，もう一方の時空領域上での被測定量を考慮に入れなければならないならば，測定者が自分が存在する近傍の時空領域上で自分の目の前にある系の所有値について何事を語ろうとも，それは無意味である．ただ，このように直観に訴える議論を続けても非生産的であり，そもそもないものねだりなのかもしれない．それでも，以上の議論によって，コンテクスチュアリズムがいう量子的実在主義なるものがもつ非古典的側面を明るみにしたとはいえるだろう．

おわりに

本論文では，量子論における非局所性について考察してきた．ここで，まず，各章における議論とその結論をまとめておきたい．

第 I 部では，EPR 相関と非局所性との関係について議論した．はじめに第 1 章で，EPR 論証とはなにか，ベルタイプの不等式の導出など，議論の背景を紹介した．（EPR 相関をもつ結合系について）量子力学が与える統計的予測を再生産する，局所性を満たす説明モデルが存在するならば，ベルタイプの不等式が導出される．しかし，実験結果はこの不等式を破る．そこで，多くの研究者は，EPR 相関を局所性を満たすように説明する数学的モデルは存在しないと考えているのだった．

だが，サボーとレデイは，ベルタイプの不等式を導出する際，ア・プリオリに正しいとは考えられない，あることが，暗黙裡に前提とされている，と指摘した．彼らは，不等式の導出では，議論の対象となるすべての相関に共通の共通原因が存在することが前提とされるが，すべての相関について，各相関ごとに共通原因が存在しさえすれば十分である，と主張した．第 2 章では，彼らの論点を考察した．その結果，彼らが主張したように各相関ごとの共通原因だけが存在すると仮定したときでも，二つの粒子からなる結合系が「1 重項状態」にあるときには，**非局所的文脈-独立性**と **C-独立性 I** という自然な条件のもとで，ベルタイプの不等式が導出されることを証明した（42 頁の命題 3）．さらに，**C-独立性 I** を，それより弱い条件である **C-独立性 II** と置き換えても，やはり量子力学的確率と両立しないある不等式が導出されることを証明した（45 頁の命題 4）．したがって，それらの不等式が破れるときには，各相関ごとの共通原因のみを要請しても，EPR 相関の説明モデルは存在しない．

第 2 章でみたように，量子力学が与える統計的予測を再生産する，局所性を満たす数学的モデルは存在しない．このことをもって，「量子力学は非局所的な理論である」といわれることがある．しかし，量子力学的予測を再生産すべく構成される数学的モデルが非局所的であることと，量子力学という理論自体が非局所的であることとは，直ちに同一というわけではない．そこで，第 3 章では，量子力学自体の非局所性の意味を明確にすることを試みた．3.1 節で述べたように，量子力学的相関を利用して「空間的」に離れた領域間で信号のやりとりをすることは，不可能である．このことは専門家にはよく知られたことで，一部の研究者は，この信号伝達不可能性は，「空間的」に離れた二つの領域で生じる事象間に因果関係が存在しないことを意味すると考える．しかし，哲学には，二つの事象間における因果関係の有無を判定する様々な基準が存在するのであった．信号伝達の可能，

不可能を用いて，因果関係の有無を判定するのは，そのような基準のなかの一候補にすぎない．3.2 節では，著者が最も自然と考える，因果関係の有無を判定する基準を提示した（56 頁の「因果的に閉じているための必要条件」）．この基準は因果についての常識的な感覚を数学的に表現したものであるが，それにしたがうと，量子力学的相関をもつ二つの事象間に，因果関係が存在することになってしまう（59 頁の事例分析 2）．そこで我々は，因果概念の再検討を迫られる．一つの有力な方策は，すでに述べたように，信号伝達の可能・不可能によって，因果の有無を判定するというものであるが，その方策になんの課題もないわけではない（61 頁コメント 2）．

第 II 部では，コッヘン＝シュペッカーの NO-GO 定理と非局所性との関係を考察した．はじめに，第 4 章で，その定理の意味，導出に用いられる前提など，議論の背景を説明した．コッヘン=シュペッカーの NO-GO 定理によると，**スペクトル規則**および $FUNC$ と呼ばれる規則を満たすようには，すべての物理量に同時に確定した値を付与できないのであった．この不可能性を回避する方策に，「文脈依存型の確定値付与」という方法があるのだった．この方法では，$FUNC$ を否定することによって，値付与の不可能性を結論づける議論はブロックされる．だが，この方法において非局所性に関わる新たな困難が生じることを，ヘイウッドとレッドヘッドが証明したのであった．

第 4 章で紹介した議論は，次のことを暗黙の前提として進められていた．それは，「ヒルベルト空間上の射影作用素からなる束（射影束）を，物理量についての観測命題がなす束と，みなしてよい」ということである．多くの数学者や物理学者にとって，このことは自明なのかもしれないが，それについて明示的に書かれた教科書や論文は意外なほど少ない．第 5 章では，射影束を観測命題がなす束と考えてよい根拠を，数学的に厳密に与えた．

第 4 章で紹介したように，ヘイウッドとレッドヘッドは，値付与の不可能性を回避する「文脈依存型の確定値付与」という方法に，非局所性に関わる新たな困難が生じることを数学的に示したのだった．ただし，彼らの議論は次の二点で数学的に制限されており，不満が残った．その不満とは，第一に，議論が有限次元ヒルベルト空間に限定されていること，第二に，議論が非相対論的設定に限定されていることによるのであった．そこで，第 6 章では，それらの制限を撤廃し，無限次元ヒルベルト空間，さらには相対論的設定をも含むべく，より一般的な数学的ツール（フォン・ノイマン代数）を用いて，ヘイウッド，レッドヘッドと同様の議論を行うことを試みた．その結果，より一般的な状況において，「文脈依存型の確定値付与」という方法に非局所性の困難が生じることを数学的に示した（126 頁の命題 10）．「文脈依存型の確定値付与」においては，ある特定の有界時空領域上で測定可能な物理量の値は，その領域と「空間的」に離れた別の有界時空領域上でどの物理量を測定するのかに依存して決まる，という非局所性が生じる．6.5 節では，命題 10 で

得られた結果を，最近議論されることの多い，クリフトンとハルヴォーソンのコンテクスチュアリズムに適用した．その結果，コンテクスチュアリズムにおいても，非局所性に関する同様の困難が生じることが明らかになった．

本論文の議論を経て，なお様々な課題が残されている．なかでも，次の二つが重要である．

1. 3 章で述べた「因果的に閉じているための必要条件」（56 頁）は，二つの事象間の因果関係の有無を判定する自然な基準である．しかし，この基準にしたがうと，量子力学的相関をもつ二つの事象が「空間的」に離れた時空領域で生じたときでも，それら二つの事象間に因果関係があることになってしまうのだった．このことの意味を，もっと突き詰めて考える必要がある．より具体的には，次の疑問が残る．
    - そもそも，量子力学的現象のように確率的に生じる事象について，因果性を議論することは，本当に有意味なのだろうか？
    - 仮に，確率的事象に因果性を問うことが有意味であるならば，確率的世界において因果関係の有無を判定する，本論文で考察した以外の基準は存在しないのだろうか？
    - 「因果的に閉じているための必要条件」のような常識的な因果観が否定されるのは，量子力学的現象に限ったことなのか，それとも他の現象においても生じうることなのか？
    - 3 章最後で述べたように，信号伝達の可能・不可能は，因果関係の有無を判定する基準の有力な候補であるが，その判定基準を採用するとき，（本論文で言及した以外に）深刻な問題が生じることはないのだろうか?
    - 信号伝達の可能・不可能によって因果関係の有無を判定する以外の方法で，「空間的」に離れて生じる事象間に因果関係はないと判定する基準は存在しないだろうか？
2. 6.5 節において，クリフトンとハルヴォーソンのコンテクスチュアリズムについて考察した．彼らは，そのコンテクスチュアリズムを，ボーア解釈の数学的に厳密な定式化である，と考えている．本当にボーアが考えていたことなのかは別にしても，彼らのコンテクスチュアリズムは，量子力学の標準的解釈の数学的定式化としてよくできている．ただし，6.5 節でコンテクスチュアリズムにも非局所性の困難が生じることが明らかになった．その困難について，彼らはおそらく，やはりその

節で述べたように，非局所性の困難は反事実的条件文の形式で述べられているので，実際には検証不可能なことであり真の困難ではない，というだろう．しかし，著者は，相対論的設定のもとで代数的場の量子論を考えるとき，非局所性の困難を，反事実的条件文を用いない形式で述べなおすことができるのではないか，と考えている．もしそうならば，コンテクスチュアリズムの真の意味が，より一層明らかになるだろう．そしてそのとき，コンテクスチュアリズムを実在論として維持することは，難しくなるだろう．

これら二つの課題には共通点がある．その共通点とは，二つの課題は，ともに，量子力学自体の局所性・非局所性に関わる課題である，ということだ．本論文のもっとも主要な結果が述べられている 2 章や 6.4 節で議論したような，量子力学を不完全であるとみなし，その理論を補完すべく構成した数学的モデルの局所性・非局所性に関わる課題ではない．

量子力学を不完全とみなすのは，自然とはいかなるものである**べき**か，についての自分の考えが，量子力学という理論と齟齬をきたした結果である．2 章や 6.4 節に代表されるように，著者のこれまでの研究における視点は，主として，自然がいかなるものであるべきか，についての自分なりの考えを数式で表現し，それを自然および理論と照らし合わせてみる，というものであった．本論文では，「局所性」に関わる多様な定義を与えたが，それらは自然というものはしかじかの性質を満たすべきだという著者の世界観を，自然の側に押し付け，そのたびごとに否定されることの繰り返しであった，といってもいいだろう．

今後の研究では，少しばかり，視点を変えていきたいと考えている．目指すのは，自然がいかなるものなのかを，理論や実験結果から学ぶという視点である．局所性や因果性について自然が満たすべきことを定式化し，それを理論や自然と照らし合わせるのではなく，局所性や因果性について理論や実験結果が教えてくれることを概念的に明らかにする，という視点である．上記二つの課題は，そのような視点から生じるものである．

参考文献

[1] Albert, D. Z. (1992): *Quantum Mechanics and Experience*, Harvard University Press.

[2] Aspect, A. , Dalibard, J. and Roger, G. (1982): ‘Experimental Test of Bell’s Inequalities Using Time-Varying Analyzers’, *Physical Review Letters* **49**, 1804-1807.

[3] Bana, G. and Durt, T. (1997): ‘Proof of Kolmogorovian Censorship’, *Foundations of Physics* **27**, 1355-1373.

[4] Baumgartel, H. (1995): *Operatoralgebraic Methods in Quantum Field Theory*, Akademie Verlag.

[5] Bell, J. S. (1964): ‘On the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox’, *Physics* **1**, 195-200.

[6] Bell, J. S. (1966): ‘On the Problems of Hidden Variables in Quantum Mechanics’, *Review of Modern Physics* **38**, 447-475.

[7] Bell, J. S. (1985): ‘The Theory of Local Beables’, *Dialectica* **39**, 86-96.

[8] Bell, J. S. (2004): *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics* (second edition), Cambridge.

[9] Bohm, D. (1951): *Quantum Theory*. Prentice-Hall. 〔ボーム『量子論』，井上健・後藤邦夫・高林武彦・河辺六男訳，みすず書房，1964〕

[10] Bohr, N. (1935): ‘Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered complete?’ *Physical Review* **48**, 696-702. 〔ボーア「物理的実在の量子力学的記述は完全と考えうるのか」，山本義隆編訳（『ニールス・ボーア論文集 1 因果性と相補性』所収），岩波文庫，1999〕

[11] Brown, H. R. and Svetlichny, G. (1990): ‘Nonlocality and. Gleason’s lemma. Part I. Deterministic theories’, *Foundations of Physics* **20**, 1379-1387.

[12] Bub, J. (1997): *Interpreting the Quantum World*, Cambridge University Press.

[13] Clauser, J. F. and Horn, M. A. (1974): ‘Experimental Consequences of Objective Local Theories’, *Physical Review* **D 10**, 526-535.

[14] Demopoulos, W. (1980): ‘Locality and the Algebraic Structure of Quantum Mechanics’, in P. Suppes (ed.) (1980) *Studies in Foundations of Quantum Mechanics*, East Lansing, 119-144.

[15] Dwinger, Ph. (1967): ‘Direct Limits of Partially Ordered Systems of Boolean Algebras’, *Indagationes Mathematicae* **29**, 317-325.

[16] Einstein, A. (1948): ‘Quantenmechanik und Wirklichkeit’, *Dialectica* **2**, 320-324. 〔アインシュタイン「量子力学と実在」，谷川安孝訳（『アインシュタイン選集 1』所収），共立出版，1971〕

[17] Einstein, A. , Podolsky, B., and Rosen, N. (1935): ‘Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered complete?’, *Physical Review* **47**, 777-780. 〔アインシュタイン／ポドルスキー／ローゼン「物理的実在についての量

子力学的記述は完全であると考えることができるだろうか」，谷川安孝訳（『アインシュタイン選集 1』所収），共立出版，1971〕

[18] Fine, A. (1982): 'Some local models for correlation experiments', *Synthese* **50**, 279-294.

[19] Gleason, A. (1957): 'Measures on the Closed Subspaces of a Hilbert Space', *Journal of Mathematics and Mechanics* **6**, 885-893. Reprinted in C. A. Hooker (ed.) (1975), *The Logico-Algebraic Approach to Quantum Mechanics*, Reidel, 123-133.

[20] Halvorson, H. and Clifton, R. (1999): 'Maximal Beable Subalgebras of Quantum-Mechanical Observables', *International Journal of Theoretical Physics* **38**, 2441-2484.

[21] Halvorson, H. and Clifton, R. (2002): 'Reconsidering Bohr's Reply to EPR', in T. Placek and J. Butterfield (eds.) (2002), *Non-Locality and Modality*, Kluwer, 1-28.

[22] Hamhalter, J. (2003): *Quantum Measure Theory*, Kluwer.

[23] Hardy, L. (1993): 'Nonlocality for Two Particles without Inequalities for almost all Entangled States', *Physical Review Letters* **71**, 1665-1668.

[24] Heywood, P. and Redhead, M. (1983): 'Nonlicality and the Kochen-Specker Paradox', *Foundations of Physics* **13**, 481-499.

[25] Higashi, K. (2008): 'The Limits of Common Cause Approach to EPR Correlation', *Foundations of Physics* **38**, 591-609.

[26] Higashi, K. (2009): 'A Difficulty of Local Truth-Value Assignment in Contextual Approach', *Annals of the Japan Association for Philosophy of Science* **18**, 45-56.

[27] Hofer-Szabo, G. and Redei, M. (2004): 'Reichenbachian Common Cause Systems', *International Journal of Theoretical Physics* **43**, 1819-1826.

[28] Jarrett, J. (1984): 'On the Physical Significance of the Locality Conditions in the Bell Arguments', *Nous* **18**, 569-589.

[29] Kadison, R. and Ringrose, J. (2000): *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras* vol. 1: Elementary Theory, American Mthematical Society.

[30] Kitajima, Y. (2006): 'On the Problem of Hidden Variables in Algebraic Quantum Field Theory', *Annals of the Japan Association for Philosophy of Science* **15**, 25-38.

[31] Kochen, S. and Specker, E. (1967): 'The Problem of Hidden Variables in Quan-

tum Mechanics', *Journal of Mathematics and Mechanics* **17**, 59-87. Reprinted in C. Hooker (ed.) (1975) *The Logico-Algebraic Approach to Quantum Mechanics*, Reidel.

[32] Maczynski, M. J. (1971): 'Boolean Properties of Observables in Axiomatic Quantum Mechanics', *Reports on Mathematical Physics* **2**, 135-150.

[33] Maudlin, T. (2002): *Quantum Non-Locality and Relativity* (second edition), Blackwell.

[34] Ozawa, M. (2010): 'Quantum Reality and Measurement: A Quantum Logical Approach', *Foundations of Physics* **41-3**, 592-607.

[35] Ozawa, M. and Kitajima, Y. (2012): 'Reconstructing Bohr ' s Reply to EPR in Algebraic Quantum Theory', *Foundations of Physics* **42-4**, 475-487.

[36] Peres, A. (1993): *Quantum Theory: Concepts and Methods*, Kluwer.

[37] Pitowsky, I. (1989): *Quantum Probability-Quantum Logic*, Springer.

[38] Rédei, M. (1998): *Quantum Logic in Algebraic Approach*, Kluwer.

[39] Rédei, M. (2002): 'Reichenbach's Common Cause Principle and Quantum Correlations', in T. Placek and J. Butterfield (eds.) (2002), *Non-Locality and Modality*, Kluwer, 259-270.

[40] Redhead, M. (1987): *Imcompleteness, Nonlocality, and Realism*, Oxford University Press. 〔レッドヘッド『不完全性・非局所性・実在主義』，石垣壽郎訳，みすず書房，1997〕

[41] Reichenbach, H. (1956): *The Direction of Time*, University of California Press.

[42] Sikorski, R. (1964): *Boolean Algebras* (Second Edition), Springer.

[43] Stairs, A. (1983): 'Quantum Logic, Realism, and Value Definiteness', *Philosophy of Science* **50**, 578-602.

[44] Swift, R. and Wright, R. (1979): 'Generalized Stern-Gerlach experiments and the observability of arbitrary spin operators', *Journal of Mathematical Physics* **21**, 77-82.

[45] Szabó, L. E. (1995): 'Is Quantum Mechanics Compatible with a Deterministic Univers? Two Interpretations of Quantum Probabilities', *Foundations of Physics Letters* **8**, 421-440.

[46] Szabó, L. E. (2000): 'Attempt to Resolve the EPR-Bell Paradox via Reichenbach's Concept of Common Cause', *International Journal of Theoretical Physics* **39**, 901-911.

[47] Van Fraassen, B. C. (1973): 'Semantic Analysis of Quantum Logic', in C. Hooker (ed.), *Contemporary Research in Foundations and Philosophy of Quantum Theory*, Reidel, 80-113.

[48] Van Fraassen, B. C. (1991): *Qu antum Mechanics: An Empiricist View*, Oxford University Press.

[49] Wheeler, J. A. and Zurek, W. H. (eds.) (1984): *Quantum Theory and Measurement*, Princeton University Press.

[50] Wigner, E. P. (1975): 'Epistomological Perspectives on Quantum Theory', in C. Hooker (ed.), *Contemporary Research in the Foundations and Philosophy of Quantum Mechanics*, Reidel, 369-385.

[51] Zhu, K. (1993): *Introduction to Operator Algebras*, CRC Press.

[52] 新井朝雄　(1997): 『ヒルベルト空間と量子力学』, 共立出版.

[53] 石垣壽郎　(1999): 「量子力学における確率概念について」,『科学基礎論研究』 **28**, 39-44.

[54] 日合文雄, 柳研二郎　(1995): 『ヒルベルト空間と線形作用素』, 牧野書店.

[55] 東克明 (2012): 「EPR 論証とベルの不等式」・「コッヘン=シュペッカーの NO-GO 定理」　(白井仁人・東克明・森田邦久・渡部鉄兵　『量子という謎』　勁草書房, 2 章・3 章).